1. Halmazelmélet.

A MORSE-KELLY féle axióma rendszer

$X, Y, Z, \ldots$ (nagy betűk): osztályok

$X \in Y$: az X osztály eleme az Y osztálynak

(példák: 1) the üres osztály : $\emptyset$

tehát, minden X-re, $X \notin \emptyset$;

2) $\{\emptyset\}$, rövidítve: 1,

$X \in 1 \iff X = \emptyset$)

Definíció: X halmaz, ha van olyan Y (osztály) melyre $X \in Y$.

Konvenció: Kis betűvel mindig halmazokat jelölünk. Tehát: "minden x-re, (...)" azt jelenti, hogy "minden X osztályra, melyre létezik Y úgy, hogy $X \in Y$, (...)"

AxEx Kiterjedési (extensionality) axióma:

minden X, Y osztályokra

$$\forall Z\,(Z \in X \leftrightarrow Z \in Y) \Rightarrow X = Y$$

Megjegyzés: Ekvivalens:

$$\forall z\,(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \Rightarrow X = Y$$

<u>Cl Comp</u> Osztály {komprehenzió / comprehension} axióma séma

Tetszőleges $P(X, \vec{Y})$ $X, \vec{Y}$ változókból (szabad)

függő állítás (reláció) mellett, ($\vec{Y}$ lehet üres)

van olyan osztály, mondjuk Z, hogy
$\forall x\,(x \in Z \leftrightarrow P(x, \vec{Y}))$ fennáll. (1)

Z egyértelműen meghatározott ($A \times E \times$ miatt)

Jelölése: $Z = \{x : P(x, \vec{Y})\}$. Z az $\vec{Y}$ <u>függvénye</u>.

<u>Megjegyzés</u>: a nagyobbik változat:

$$\exists Z\, \forall X\, (X \in Z \leftrightarrow P(X, \vec{Y})) \qquad (2)$$

ellentmondásos: legyen $P(X, \vec{Y}) \equiv X \notin X$;

tegyük fel, hogy létezik R melyre

$$X \in R \leftrightarrow X \notin X$$

minden X-re. Legyen $X = R$. Ekkor

$$R \in R \leftrightarrow R \notin R;$$

ellentmondás.

Ezzel szemben, ha a $P(X, \vec{Y})$ reláció olyan

hogy $P(X, \vec{Y})$-ból <u>következik</u>, hogy X halmaz (példa: $P(X, \vec{Y}) \equiv X \in X$), akkor

(2) ekvivalens (1)-el:

((tegyük fel (1)-t; legyen, (2)-höz, Z, (1) szerint meghatározva; legyen X tetszőleges osztály; ha $X \in Z$, akkor X halmaz, $X = x$, úgy hogy $P(x, \vec{Y})$ igaz (1)-ből; ha $P(X, \vec{Y})$, akkor, a feltevés szerint, X halmaz, $X = x$, úgy hogy (1)-ből megint, $x = X \in Z$.
(2) nyilvánvalóan maga után vonja (1) igazságát)).

Példa folytatva: Létezik olyan A osztály, melyre

$$\forall x (x \in A \iff x \in x);$$

ekvivalens:

$$\forall X (X \in A \iff X \in X).$$

További példa:

$$\exists R \; \forall x (x \in R \iff x \notin x)$$

– és ez most nem vezet ellentmondásra! De: következik:

Tétel. Van valódi osztály: osztály, amely nem halmaz.

További példa:
$$\exists U \begin{cases} \forall x (x \in U \iff x = x) \\ \forall x (x \in U) \end{cases}$$

tehát: minden X-re, $X \subseteq U$: $\forall x (x \in X \to x \in U)$

U: univerzális osztály; az összes halmazok osztálya

Halmaz-kreáló axiómák (1.-től 7.-ig):

A következő osztályok (a négyszögletes keretben megjelenők) mind halmazok:

AxÜ 1. $\boxed{\{x : \bot\}}$

magyarázat: $\bot$ = hamis = $\exists x (x \neq x)$

jelölés: $\emptyset = \{x : \bot\}$ = az üres osztály

"Az üres osztály halmaz".

AxS 2.0 $\boxed{\{y : y = x\}}$

szabad változó

jelölés: $\{x\} = \{y : y = x\}$

"Az egyetlen x-t tartalmazó osztály halmaz".

szabad változók

AxD 2.1 $\boxed{\{y : y = u \lor y = v\}}$

jelölés: $\{u, v\}$

megjegyzés: 2.0 következik 2.1-ből: $\{x\} = \{x, x\}$.

AxR 3. $\boxed{\{y : y \in X \,\&\, y \in x\}}$

szabad osztály-változó

szabad halmaz változó

ekvivalens megfogalmazás:

$X \subseteq x \Rightarrow X$ halmaz

"Egy halmaz minden részosztálya halmaz".

(rövidítések nélkül:

$$\forall u (u \in X \to u \in X') \land \exists V (X' \in V) \Rightarrow \exists W (X \in V))$$

Ax U (4.) $\boxed{\{ y : \exists v (y \in v \wedge v \in x) \}}$

szabad változó

jelölés: $\bigcup x =$

$=$ az x-ben elemként meglévő halmazok uniója

Ax Ha (5.) $\boxed{\{ y : \forall v (v \in y \to v \in x) \}}$

szabad változó

jelölés: $\mathcal{P}(x) = x$ hatványhalmaza $=$

$=$ az x részhalmazainak halmaza

Jelölés: $\langle x, y \rangle = \{ \{x\}, \{x, y\} \}$ (lásd: 2.0 és 2.1)

1. BESZÚRÁS ide

Ax He (6.) $\boxed{\{ y : \exists x (x \in u \wedge \langle x, y \rangle \in F \ \& \ \forall z (\langle x, z \rangle \in F \to z = y)) \}}$

szabad halmaz változó

szabad osztály változó

Ekvivalens megfogalmazás:

jelölések: $\operatorname{dom} F = \{ x : \exists y \langle x, y \rangle \in F \}$

$\operatorname{rng} F = \{ y : \exists x \langle x, y \rangle \in F \}$

F Függvény ha: $\forall x \forall y \forall y' ((\langle x, y \rangle \in F \ \& \ \langle x, y' \rangle \in F) \to y = y')$

$\& \ \forall u (u \in F \to \exists x \exists y \,.\, u = \langle x, y \rangle).$

'Ax He' ekvivalense megfogalmazása:

"Ha F függvény, és dom(F) halmaz, akkor rng(F) is halmaz".

— · —

Jelölés: $Sx = \bigcup\{x, \{x\}\}$ $(= x \cup \{x\})$
(Sx = 'successor' of x)

Ax V 7. $\boxed{\{x : \forall Y[(\emptyset \in Y \,\&\, \forall y(y \in Y \to Sy \in Y)) \to x \in Y]\}}$

Jelölés: $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$: a természetes számok (Neumann J. megfogalmazásában) osztálya. Az axióma azt mondja ki, hogy $\mathbb{N}$ halmaz (végtelenségi axióma).

Y: lekötött osztályváltozó [az egyetlen eset amikor egy axióma egy lekötött osztályváltozót említ annak az osztálynak a megnevezésében, amiről állítja, hogy halmaz]

(halmaz-kreáló axiómák felsorolásának vége)

— · —

Kiválasztási axióma $\exists G(G$ Függvény $\&\, \forall x(x \neq \emptyset \to x \in \mathrm{dom}(G)$ $\&\, \forall x \forall y(\langle x,y\rangle \in G \to y \in x))$

2. Az elsőrendű logika

$\forall x . \ldots x \ldots$ $\equiv$ minden x-re, $\ldots x \ldots$ igaz

$n : \mathbb{N}$: n-t deklaráljuk mint olyan változót amely az $\mathbb{N}$ halmazon fut végig ($\mathbb{N}$: a természetes számok halmaza: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ $(0 \in \mathbb{N}!)$

Ez után:

$\forall n . \ldots n \boxed{\ldots}$ $\equiv$ minden n természetes számra, $\ldots n \boxed{\ldots}$ igaz.

$\exists x \ldots$: van olyan x, hogy ...

$\wedge$ = & : és

$\vee$ = vagy (nem kizáró)

$\neg$ = tagadás

$\ldots \rightarrow \circ\circ\circ$ = ha ..., akkor $\circ\circ\circ$

Példa: "Az $\{x_n\}_n$ valós szám sorozatot Cauchy-sorozatnak nevezzük, ha minden 0-nál nagyobb ε mellett, létezik olyan n_0 természetes szám, hogy minden n_0-nál nagyobb m-re és n-re, x_n és x_m abszolút értékben ε-nál kisebb értékben különböznek egymástól."

—·—

$$\text{Cauchy}(\{x_n\}_n) :\equiv:$$

$$(\forall \varepsilon > 0)\ \exists n_0\ \forall m\ \forall n\ (m, n \geq n_0 \rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon)$$

—·—

Nyelvtan:

$\boxed{\text{Tipusok:}}$

$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza (tipusa)
$\mathbb{N}$	a természetes számok halmaza (tipusa)
$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	a (végtelen) valós számsorozatok halmaza (tipusa)
BOOLE:	igazság értékek (IGAZ, HAMIS) halmaza (tipusa)

Változók:

$\boxed{x, y, \varepsilon : \mathbb{R}}$ az x, y, ε jelek tetszőleges valós számokat jelentenek

$\boxed{n, m, n_0 : \mathbb{N}}$

megjegyzés: $\mathbb{N}$ $\mathbb{R}$-nek egy altípusa ('subtype'). Ezért, az n, m, n_0 változók egyben valós számokat is jelölnek. Mégis, amikor '$\forall n$'-t írunk, akkor 'minden n természetes számra' értelemben beszélünk.

$\boxed{\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$

Műveletek:

$0 : \mathbb{N}$ 0: állandó (konstans) 0-változós, $\mathbb{N}$-értékű függvény

megjegyzés: tehát, 0-t mint valós számot is használhatjuk.

$$\boxed{x, y : \mathbb{R} \;::\; \left\{\begin{matrix} \text{minusz}(x,y) \\ x - y \end{matrix}\right\} : \mathbb{R}}$$

Tehát: ha x, y valós számok, akkor a 'minusz' kétváltozós műveletet alkalmazva x-re és y-ra, egy (további) valós számot kapunk, amit $\text{minusz}(x,y)$-nal, illetve $x-y$ --el jelölünk.

" $\text{minusz} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ "

— . —

$$\boxed{x : \mathbb{R} \;::\; |x| : \mathbb{R}}$$

$|x|$ = abszolút érték

$|-| = \text{absz} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

egyváltozós művelet

— . —

$$\boxed{\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\; n : \mathbb{N} \;::\; \left\{\begin{matrix} \text{app}(\varphi, n) \\ \varphi_n \end{matrix}\right\} : \mathbb{R}}$$

$\text{app} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Relációk}}$:

$x, y : \mathbb{R} \quad :: \quad x < y : \text{BOOLE}$

(esetleg, máskor:

$x, y : \mathbb{R} \quad :: \quad x = y : \text{BOOLE}$)

$\boxed{\text{Logikai müveletek:}}$

$A : \text{BOOLE}, \quad B : \text{BOOLE} \quad :: \quad \left\{ \begin{array}{l} A \wedge B \\ A \& B \end{array} \right\} : \text{BOOLE}$

('ÉS')

IGAZ

$\top, \quad A \vee B, \quad A \to B, \quad \neg A$: — " — hasonlóan

logikai állandó

x változó, $A : \text{BOOLE} \quad ::$

$\forall x A, \quad \exists x A : \text{BOOLE}$

Példák összetett $\left\{ \begin{array}{l} \text{relációra} \\ \text{(állításra)} \end{array} \right\}$ (formulára):

A fenti nyelvtani deklarációkat (változókra, műveletekre, stb) feltételezzük

Ezek után: a következő egy nyelvtanilag helyes formula; Cauchy(φ) -vel jelöljük (az egyetlen szabad változó benne φ; igazság értéke φ (valós szám sorozat) értékétől függ, de más változó értékétől nem!)

$$\mathrm{Cauchy}(\varphi) :\equiv :$$

$$\forall \varepsilon \Big(0 < \varepsilon \to \exists n_0 \, \forall m \, \forall n \, \big(n_0 < m \,\&\, n_0 < n \to \underbrace{|\, app(\varphi, n) - app(\varphi, m) \,| < \varepsilon}_{|\varphi_n - \varphi_m| < \varepsilon} \big) \Big)$$

Továbbá:

$$\mathrm{Conv}(\varphi, x) :\equiv: (\forall \varepsilon > 0)\, \exists n_0\, (\forall n \geq n_0).$$
$$|x - \varphi_n| < \varepsilon.$$

$$\mathrm{CauchyAx} :\equiv: \quad \mathrm{Cauchy}(\varphi) \longrightarrow \exists x\, \mathrm{Conv}(\varphi, x).$$

nincs szabad változó

3. Halmazelméleti kódolás; a véges objektumok a halmazelméletben újraértelmezve; a természetes számok

Definíció

3.1 Egy osztály függvény, az 5. oldal alján szereplő meghatározás szerint; 'függvény'-en egy halmazt értünk amely függvény.

dom F, rng F : lásd ugyanott.

Jelölés: F függvényre, és $x \in dom(F)$-re,

$\boxed{F(x) = y}$ ahol y az az egyértelműen meghatározott halmaz (minden halmaz, illetve osztály!) amelyre $\langle x, y \rangle \in F$.

Midőn F függvény, X tetszőleges osztály, $F \upharpoonright X$ azt a függvényt jelenti, amelyre $dom(F \upharpoonright X) = (dom\, F) \cap X$, és $(F \upharpoonright X)(x) = F(x)$ $(x \in dom(F \upharpoonright X))$.

[megjegyzés: $Y \cap X \underset{def}{=} \{u : u \in Y \,\&\, u \in X\}$]

Definíció

3.2 IN = a természetes számok halmaza: lásd 6 old., AxV (7.)

Definíció

3.3 Jelölés: $F : X \longrightarrow Y$ azt jelenti, hogy F függvény, $\mathrm{dom}(F) = X$, és $\mathrm{rng}(F) \subseteq Y$.

$X \xrightarrow{F} Y$ ugyanaz mint $F : X \xrightarrow{F} Y$.

Midőn

$$X \xrightarrow{F} Y \xrightarrow{G} Z,$$

képezhetjük a

$G \circ F : X \rightarrow Z$ függvényt, amelyre

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) \quad (x \in X).$$

(Egyszerű) feladat: Ha F, G halmazok (függvények) akkor $G \circ F$ is halmaz.

Definíció

3.4 Az $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ alakú függvényeket (végtelen) sorozatoknak hívjuk [mostantól kezdve a nagy-betűk is halmazokat jelölnek - korsak ezt explicite nem hangoztatjuk].

Definíció

3.5 $A \times B \underset{\mathrm{def}}{=} \{\underbrace{\langle a, b\rangle}_{\text{rendezett pár}} : a \in A \ \& \ b \in B\}$

Lásd: 5 old.

(egyszerű f.: ha A, B halmazok, akkor $A \times B$ is az)

Definíció

3.5.1 Legyen A halmaz, Akkor

$$B^A \; (= {}^A B) \underset{\text{def}}{=} \{ f : | \, f : A \to B \}$$

(ha B is halmaz, akkor B^A is az).

3.6 "A természetes számok elméletének alapjai"

3.6.1 A teljes indukció elve:

Tétel Legyen $P(n)$ valamely, az n tetszőleges természetes számra vonatkozó állítás. Tegyük fel, hogy $P(0)$ igaz, és azt is, hogy minden n-re, ha $P(n)$ igaz, akkor $P(n+1)$ is igaz.

Emlékeztető: $\boxed{0 = \emptyset}$: az üres halmaz $\quad \boxed{n+1 = S(n)}$ & $Sn = n \cup \{n\}$

Állítás. Ez esetben $P(n)$ igaz minden $n \in \mathbb{N}$-re.

$$[P(0) \ \& \ \forall n \in \mathbb{N}.\ (P(n) \longrightarrow P(Sn))] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}. P(n)$$

Más szóval:

$$\forall P \{[0 \in P \ \& \ \forall x (x \in P \rightarrow Sx \in P)] \longrightarrow \forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow x \in P)\}$$

Rögtön következik $\mathbb{N}$ meghatározásából.

Tételek 3.6.2. ($n, m : \mathbb{N}$ továbbra is)

PEANO axiómák"

3.6.2.1 $\forall n.\quad Sn \neq 0$

3.6.2.2 $\forall n \forall m.\ Sn = Sm \rightarrow n = m$

3.6.2.3 $\forall n\ (n = 0 \ \vee\ \exists m.\ n = Sm)$

Bizonyítások

1. Segédtétel

$$(n \in \mathbb{N} \ \& \ x \in n) \Rightarrow (x \in \mathbb{N} \ \& \ x \subseteq n)$$

bizonyítás indukcióval (n szerint):

'bázis' $n = 0$; triviális $((\bot \Rightarrow T) = T)$

'indukciós lépés': n helyett $Sn = n \cup \{n\}$:

— de használva, hogy az állítás maga igaz n-re

('indukciós feltevés'):

$$x \in n \cup \{n\} \overset{?}{\Rightarrow} (x \in \mathbb{N} \ \& \ x \subseteq n);$$

de: ha $x \in n$, akkor igaz az ind. felt. miatt

ha viszont $x \in \{n\}$, azaz $x = n$, akkor állítás nyilvánvaló.

KÉSZ!

2. Segédtétel

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \notin n$$

Indukció: $n = 0$: ✓

Tegyük fel, hogy $n \notin n$, de $Sn \in Sn$;

Tehát: $Sn \in (n \cup \{n\})$;

azaz: $Sn \in n$ vagy $Sn = n$.

$$\text{1. S.t.} \longrightarrow \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\underbrace{n \in Sn \subseteq n}_{n \in n} \qquad \underbrace{n \in Sn = n}_{n \in n};$$

ellentmondás.

3.6.2.1 : nyilvánvaló, hiszen $0 = \emptyset$ és $Sn \neq \emptyset$.

3.6.2.2 : Tegyük fel, hogy $Sn = Sm$, azaz $n \cup \{n\} = m \cup \{m\}$. Következik, hogy

vagy $n \in m$, vagy pedig $n = m$ (amikor is készen vagyunk) ÉS

vagy $m \in n$, vagy pedig $m = n$.

Tehát készen vagyunk, kivéve ha $n \in m$ és $m \in n$.

De $n \in m$-ből $n \subseteq m$ következik (1. S.t.), és így $m \in n \subseteq m$, és $m \in m$ – ami ellentmond a 2. Segédtételnek.

3.6.2.3 : Házi feladat

3.6.3 Rekurzió; alapforma.

Tétel Legyen A osztály, $a \in A$,

$G : A \to A$ függvény.

Akkor létezik egy egyértelműen meghatározott függvény, $F : \mathbb{N} \to A$, amelyre

$$\begin{cases} F(0) = a \\ F(Sn) = G(F(n)) \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Bizonyítás:

Legyen $R \subseteq \mathbb{N} \times A$. Nevezzük R-t zártnak, ha:

$$\langle 0, a \rangle \in R \;\&\; \forall n \in \mathbb{N} .\, \langle n, x \rangle \in R \to \langle Sn, Gx \rangle \in R.$$

1. Segédtétel. R zárt $\Rightarrow \operatorname{dom} R = \mathbb{N}$

bizonyítás: teljes indukcióval.

2. Segédtétel Legyen R zárt; definiáljuk az $\dot{R}$ relációt, $\dot{R} \subseteq \mathbb{N} \times A$ így:

$$\langle n, x \rangle \in \dot{R} \underset{def}{\iff} \langle n, x \rangle \in R \;\&\; [(n = 0 \;\&\; x = a) \vee$$

$$\exists m \exists y\, (n = Sm \;\&\; \langle m, y \rangle \in R \;\&\; x = g(y))]$$

Ekkor: $\mathring{R}$ ismét zárt.

Bizonyítás: Tiszta logika!

3. Segédtétel "Az összes zárt reláció metszete (szintén) zárt":

Legyen: $R_0 \overset{\text{def}}{=} \{x : \forall R (R \text{ zárt} \subseteq \mathbb{N} \times A \to x \in R)\}$.

Ekkor: R_0 zárt.

Bizonyítás: Tiszta logika!

Na most: tekintsük R_0-t, ahogyan 3. alatt meghatároztatott; és $\mathring{R}_0$-t, ahogyan az 2. alatt meghatároztatott. Mivel $\mathring{R}_0 \subseteq R$, és $\mathring{R}_0$ zárt (3. szerint: R_0 zárt; ezért 2. szerint: $\mathring{R}_0$ is zárt) ezért $\mathring{R}_0 = R_0$ (!)

Tehát, 2.-ben található definícióból következőleg:

$$(*) \begin{cases} \langle n, x\rangle \in \mathring{R}_0 \implies \\ \qquad (n = 0 \,\&\, x = a) \lor \\ \qquad \exists m \exists y (n = Sm \,\&\, \langle m, y\rangle \in \mathring{R}_0 \,\&\, x = g(y)) \end{cases}$$

"$R_0 = F$"

Legyen $F = \mathring{R}_0$. Bebizonyítjuk, hogy F függvény.

Ez azt jelenti, hogy:

$$\langle n, x\rangle \in F \ \& \ \langle n, x'\rangle \in F \ \underset{?}{\Rightarrow} \ x = x'.$$

Ezt n-szerinti indukcióval bizonyítjuk.

1) Legyen $n = 0$. (*) miatt ekkor, 3.6.2.1-t is használva: $\langle 0, x\rangle \in F \ \& \ \langle 0, x'\rangle \in F \Rightarrow x = a \ \& \ x' = a$

$$\Rightarrow \underline{x = x'} \ \checkmark$$

2) Legyen most $n = Sm$; tegyük fel, hogy

$$\langle Sm, x\rangle \in F \text{ és } \langle Sm, x'\rangle \in F.$$

Alkalmazzuk (*); 3.6.2.1-t használva, szükségképpen, van: m' és m''; és y', y'' úgy, hogy:

$$n = Sm = Sm' \ \& \ \langle m', y'\rangle \in F$$

és

$$n = Sm = Sm'' \ \& \ \langle m'', y''\rangle \in F$$

és $x = g(y')$, $x' = g(y'')$.

$n = Sm = Sm' = Sm''$ ből következik, hogy $m' = m'' = m$. (3.6.2.2). Tehát: $\langle m, y'\rangle \in F \ \& \ \langle m, y''\rangle \in F$

Az <u>indukciós</u> feltevés szerint $y' = y''$

és így $\underline{x} = g(y') = g(y'') \underline{= x'}$ $\checkmark$

Az 1. Segédtétel szerint $\mathrm{dom}(F) = \mathbb{N}$.

F Függvény. Mint $F \subseteq \mathbb{N} \times A$ reláció,

F zárt : $\langle 0, a \rangle \in F$ azt jelenti, hogy

$$\boxed{F(0) = a};$$

és

$$\langle n, x \rangle \in F \Rightarrow (Sn, Gx) \in F$$

azt jelenti, hogy $x = F(n) \Rightarrow Gx = F(Sn)$

azaz: $\boxed{F(Sn) = G(Fn)}$.

F létezésének bizonyítása teljes.

Egyértelműsége : házi feladat. [indukció].

3.6.4 Indukció és rekurzió: származtatott formák

Definíció 3.6.4.1 A <u>rendezés</u>-reláció $\mathbb{N}$-en:

A $<$ relációt így definiáljuk:

$< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} m < 0 \iff \bot \ (= \text{HAMIS}; \text{ tehát: } m<0 : \text{SOHA}) \\ m < Sn \overset{\text{def}}{\iff} m < n \vee m = n \end{cases}$$

megjegyzés: ez egy <u>rekurzív</u> definíció. Az

$$\left\{\begin{matrix} n \longmapsto \{m : m < n\} \\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \end{matrix}\right\}$$

függvényt definiáljuk rekurzióval.

Állítások: $\boxed{Sm < Sn \iff m < n}$

(bizonyítás: indukció: Tehát,

a $P(n) \equiv \forall m\, [Sm < Sn \leftrightarrow m < n]$

állítást bizonyítjuk indukcióval)

$$\boxed{m < n \;\dot\vee\; m = n \;\dot\vee\; n < m}$$

($\dot\vee$: kizáró diszjunkció: $A \dot\vee B$ azt jelenti, hogy az A, B állítások közül az egyik, és csak az egyik, igaz)
(házi feladat).

$\boxed{\text{Tétel 3.6.4.2}}$ Minden $P(n)$ természetes szám(ok)ra vonatkozó állításra:

$$\forall n\Big(\big(\forall m\,(m<n \rightarrow P(m))\big) \rightarrow P(n)\Big) \Leftarrow (*)$$

$$\rightarrow \forall n\, P(n).$$

Szavakban: Ha abból, hogy minden n-nél kisebb m-re $P(m)$ igaz, következik, hogy $P(n)$ igaz – és ez fennáll minden n-re –, akkor $P(n)$ igaz minden n-re.

Bizonyítás Definiáljuk:

$$Q(n) \underset{def}{\Longleftrightarrow} \forall m\,(m<n \to P(m))$$

Ekkor látjuk, hogy

$$\forall n\,(Q(n) \to Q(Sn))$$

következik abból, hogy $\Leftarrow (*)$ (fentebb) fennáll.

Továbbá: $Q(0)$ nyilvánvalóan igaz.

Tehát: a közönséges teljes indukció elvéből következik, hogy $\forall n\, Q(n)$. Végül: n helyett Sn-re alkalmazva ezt, minden n-re $P(n)$.

3.6.4.3 Megkésett ekvivalens definíció:

emlékezzünk, hogy minden természetes szám halmaz. Definiáljuk:

$$m<n \iff m \in n.$$

Állítás: ez ekvivalens a 20. oldalon található rekurziós definícióval (bizonyítás: indukció; használjuk: $0=\emptyset$; $Sn = n \cup \{n\}$)

Megjegyzések és illusztráció

3.6.4.2 tételt tekinthetjük a transzfinit indukció (teljes formájában rendszámokra vonatkozó állítás) speciális esetének.

A következő alkalmazásban használunk az eddigiekben még(?) nem bevezetett – de egyértelmént közismert – fogalmakat és tényeket (12 éven aluliaknak csak szülői felügyelet mellett ajánlott).

Lássuk be, hogy minden természetes szám egyértelműen előáll mint különböző 2-hatványok összege: minden $n \in \mathbb{N}$-re van egy egyértelműen meghatározott $I = I[n]$ halmaz úgy, hogy $n = \sum_{i \in I[n]} 2^i$.

Bizonyítás: 'transzfinit' indukcióval.

Tehát: legyen n tetszőleges, és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $m < n$-re. $n = 0$: OK; tegyük fel, hogy $n > 0$. Legyen $k \in \mathbb{N}$ maximális úgy $2^k \leq n$ (van ilyen, hiszen $2^0 = 1 \leq n$). Tekintsük: $m =_{def} n - 2^k < n$

indukciós feltevés: $m = \sum_{i \in I[m]} 2^i$.

állítás: $k \notin I[m]$; hiszen, $m < 2^k$, mert $m \geq 2^k$-ből $n - 2^k \geq 2^k$, $n \geq 2^k + 2^k = 2^{k+1}$ következik, és így k nem maximális. Legyen tehát $I[n] = I[m] \dot{\cup} \{k\}$; ekkor $n = \sum_{i \in I[n]} 2^i$, ahogy kívántuk.

Az egyértelműséghez elegendő belátni azt, hogy ha

$n = \sum_{i \in I} 2^{2^i} \neq 0$, akkor $\max_{k \in I} k = \max_{2^k \leq n} k$.

— . —

(3.6.4.4) Véges sorozatokra vonatkozó jelölések.

Legyen A egy osztály. Az A elemeinek egy *véges sorozata* egy $s : n \to A$ alakú függvény (emlékezzük, hogy $n = \{m \in \mathbb{N} : m < n\}$; tehát s az n-nél kisebb természetes számok halmazán értelmezett függvény). $A^{<\omega}$ jelöli az A-elemekből álló véges sorozatok osztályát (halmaz ha A halmaz).

Midőn $s \in A^{<\omega}$, a $\mathrm{dom}(s)$ természetes számot $lh(s)$-el jelöljük, és s *hosszúságának* nevezzük.

$\emptyset$, az üres halmaz, eleme $A^{<\omega}$-nak; $lh(\emptyset) = 0$ (az üres sorozat).

Midőn $s \in A^{<\omega}$, és $i < lh(s)$, $s_i \underset{def}{=} s(i)$ $(\in A)$.

Legyenek $a, b, c, \ldots \in A$. Akkor

$\langle a \rangle$

$\langle a, b \rangle$

$\langle a, b, c \rangle$

$\vdots$

azon véges sorozatok, melyre

$lh\langle a \rangle = 1$ $(= S0)$

$lh\langle a, b \rangle = 2$ $(= S1)$

$lh\langle a, b, c \rangle = 3$ $(= S2)$

$\vdots$

és $\langle a\rangle_0 = a$, $\langle a,b\rangle_0 = a$, $\langle a,b\rangle_1 = b$, etc.

Tétel 3.6.4.5. Tekintsük a 3.6.3 Tételben rekurzióval definiált F függvényt ((17) old.).

Azt állítjuk, hogy ha $n \in \mathbb{N}$, $x \in A$, akkor

$$F(n) = x \iff \exists s \in A^{<\omega}$$

$$\begin{aligned}[& lh(s) = n+1 \;(= S n) \\ & \& \; s_0 = a \\ & \& \; \forall k < n.\; s_{k+1} = G(s_k) \\ & \& \; s_n = x]\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ez a rekurzióval definiált függvény egy alternatív meghatározására szolgál; számunkra nagyon fontos! Az eredeti meghatározás (a 3.6.3 tétel bizonyítása) egy '$\forall R$' alakú univerzális kvantor által dominált kifejezés; az alternatív meghatározást az '$\exists s$' egzisztenciális kvantor vezeti be.

3.6.4.5 bizonyítása:

1. Tegyük fel, hogy $F(n) = x$. Definiáljuk s-t mint $s = F \restriction (n+1)$. Ekkor minden kívánt követelmény teljesül s-re.

2. A másik irányú implikációt, '$\Leftarrow$'-t, n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

Pontosabban, belátjuk, indukcióval, hogy a szögletes zárójelben lévő, s-re vonatkozó állítás, az utolsó, "$s_n = x$" konjunkciós tag nélkül, ekvivalens azzal, hogy $s = F \restriction (n+1)$.

(Természetesen, mindebben a 3.6.3 Tétel teljes állítását feltételezzük; lehetne, de nincsen itt a 3.6.3 Tételnek egy újabb bizonyítása).

4. Az előzőek folytatása: véges matematika

4.1 Primitív rekurzió (Gödel rekurzió-nak nevezi)

Tétel Legyenek Y és Z tetszőleges halmazok,

$$g : Y \to Z, \qquad h : \mathbb{N} \times Y \times Z \to Z$$

függvények. Akkor van egy egyértelműen meghatározott

$$f : \mathbb{N} \times Y \to Z$$

függvény, amelyre

$$\begin{cases} f(0,y) = g(y) & (y \in Y) \\ f(Sn, y) = h(n, y, f(n,y)) & (n \in \mathbb{N}, y \in Y) \end{cases}$$

<u>Bizonyítás</u>. Vissza vezetjük az <u>'alap formára'</u> (3.6.3; (17) old.).

Legyen: $A = Z^{\mathbb{N}\times Y}$

tehát: A a $\varphi : \mathbb{N}\times Y \to Z$ alakú függvények halmaza.

$a \in A: \quad a(n,y) \equiv g(y) \qquad (n\in\mathbb{N}, y\in Y)$

$G : A \to A :$

$\varphi \in Z^{\mathbb{N}\times Y} : \quad G(\varphi) \in A : \quad G(\varphi)(n,y) =$

$$\underset{def}{=} h(n \dot{-} 1, y, \varphi(n,y)) \in Z$$

(ellenőrizendő, hogy az argumentumok, és az értékek típusai megfelelők; <u>type checking!</u>)

Legyen $F : \mathbb{N} \to A$, 3.6.3 szerint, az a függvény, amelyre

$$\begin{cases} F(0) = a \\ F(Sn) = G(F(n)) & (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$$

és definiáljuk $f : \mathbb{N}\times Y \to Z$ -t így:

$$f(n,y) \overset{def}{=} (F(n))\,(n,y)$$

(figyeljük meg, hogy $F(n)\in A$; $F(n) : \mathbb{N}\times Y \to Z$)

Ellenőrizzük, hogy ez az f jó:

$$\underline{f(0,y)} = (F(0))(0,y) = a(0,y) = \underline{g(y)} : \text{OK}$$

$$\underline{f(Sn,y)} = (F(Sn))(Sn,y)$$

$$= (G(F(n)))(Sn,y)$$

$$= h(Sn \dot{-} 1, y, (F(n))(n,y))$$

$$= \underline{h(n,y,f(n,y))} : \text{OK}$$

— —

Alkalmazások: az összeadás, szorzás és hatványozás definíciója a természetes számokon:

$$\begin{cases} m+0 = m \\ m+Sn = S(m+n) \end{cases}$$

[itt: $Y = Z = \mathbb{N}$, $y = m$; $g(m) = m$, $h(n,m,p) = S(p)$; $f(m,n) = m+n$]

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0 \\ m \cdot Sn = (m \cdot n) + n \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^0 = 1 \\ m^{Sn} = m^n \cdot m \end{cases}$$

Némileg végtelen házi feladat:

az elemi aritmetikai szabályok (asszociatív, kommutatív, disztributív szabályok) bizonyítása (módszer: teljes indukció)

prímszámok, legnagyobb közös osztó, mindaz ami Euklidesz Elemei-ben a számelméletről található

— de persze ez már ugyanaz, mint amit az iskolában tanultunk (az iskolában viszont nem tanultuk a műveletek egzakt definícióját, és az elemi törvények bizonyítását).

—·—

4.2 'Transzfinit' rekurzió – természetes számokon

Tétel. Legyen A egy tetszőleges halmaz,

$$g : A^{<\omega} \longrightarrow A \quad \text{adott függvény}$$

(tehát: g hozzárendel egy A elemeiből álló véges sorozathoz A-nak egy elemét)

Akkor van egyetlen olyan $f : \mathbb{N} \to A$ függvény, melyre $f(n) = g(f \restriction n)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re.

Bizonyítás Legyen $s \in A^{<\omega}$, $a \in A$; ekkor $s^\frown\langle a\rangle$ az a véges sorozat, melyre, $n = lh(s)$ mellett,

$$lh(s^\frown\langle a\rangle) = n+1,$$

$(s^\frown\langle a\rangle)\restriction n = s$, és $(s^\frown\langle a\rangle)_n = a$.

Definiáljuk az $F : \mathbb{N} \longrightarrow A^{<\omega}$ függvényt a következő primitív rekurzióval:

$$F(0) = \emptyset \quad (\text{üres sorozat})$$

$$F(Sn) = F(n)^\frown\langle g(F(n))\rangle$$

Ha most $f : \mathbb{N} \to A$ -t így definiáljuk:

$$f(n) = (F(Sn))_n$$

akkor f megfelelő lesz ($F(n)$ nem más mint $f\restriction n$).

Beszúrások $\boxed{\text{1. (5. old.)}}$ $\langle x,y\rangle$ az x és y halmazok rendezett párja. A következő igaz:

$$\langle x,y\rangle = \langle u,v\rangle \iff x=u \;\&\; y=v.$$

Sajnos, az $\langle x,y\rangle$ jelölés konfliktusban van a 24. old-on bevezetett $\langle a,b\rangle$ jelöléssel. Ugyan az ottani $\langle a,b\rangle$ ugyanazt a szerepet tölti be ("rendezett pár") mint az itteni $\langle x,y\rangle$, a kettő mégsem ugyanaz. A megoldás: a későbbi $\langle a,b\rangle$-ben a hegyes zárójeleket egy más külsőleg kell elképzelni (pl. piros-nak).. Az eredeti $\langle x,y\rangle$ a fontosabb. Az a megoldás, hogy az eredeti $\langle x,y\rangle$-t (x,y)-nak írjuk, nem jó: a közönséges kerek zárójel nem eléggé ugrik ki.