Mik a számok a melyik téridőben?

Székely Gergely

Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
www.renyi.hu/~turms

Fiatal Kutatói Mini-konferencia,
2010. November 15., Budapest.

Nagyon naivan!

Mik a számok a „fizikai világban”?

Nagyon naivan!

Mik a számok a „fizikai világban”?

- Nyilván a valós (vagy a komplex) számok! (A fizikai elméleteink legalább 99%-a ezekkel számol.)

Nagyon naivan!

Mik a számok a „fizikai világban”?

- Nyilván a valós (vagy a komplex) számok! (A fizikai elméleteink legalább 99%-a ezekkel számol.)
- Nyilván része a racionális (sőt az egész) számoknak! (A mérések kimenetelei véges tizedestörtek.)

Nagyon naivan!

Mik a számok a „fizikai világban”?

- Nyilván a valós (vagy a komplex) számok! (A fizikai elméleteink legalább 99%-a ezekkel számol.)
- Nyilván része a racionális (sőt az egész) számoknak! (A mérések kimenetelei véges tizedestörtek.)

A kérdés ezen a szinten túl naiv...

Nagyon naivan!

Mik a számok a „fizikai világban”?

- Nyilván a valós (vagy a komplex) számok! (A fizikai elméleteink legalább 99%-a ezekkel számol.)
- Nyilván része a racionális (sőt az egész) számoknak! (A mérések kimenetelei véges tizedestörtek.)

A kérdés ezen a szinten túl naiv...

Próbáljuk meg szilárd logikai keretek között újrafogalmazni a kérdést!

Mi köze van a számoknak téridőhöz?

Mi köze van a számoknak téridőhöz?

A számfogalom definiálható a geometriából.
(Hilbert-féle koordinátázás)

Mi köze van a számoknak téridőhöz?

A számfogalom definiálható a geometriából.
(Hilbert-féle koordinátázás)

Tarski: Euklideszi geometria elsőrendű logikai axiómarendszere $\rightsquigarrow$ koordinátázás $\rightsquigarrow$ rendezett testek.

Mi köze van a számoknak téridőhöz?

A számfogalom definiálható a geometriából.
(Hilbert-féle koordinátázás)

Tarski: Euklideszi geometria elsőrendű logikai axiómarendszere $\rightsquigarrow$ koordinátázás $\rightsquigarrow$ rendezett testek.

Tétel:

„Minden egyenes, ami tartalmazza egy kör belső pontját metszi a körvonalat.” $\iff$ *„Minden pozitív számnak van négyzetgyöke.”*

Mi köze van a számoknak téridőhöz?

A számfogalom definiálható a geometriából.
(Hilbert-féle koordinátázás)

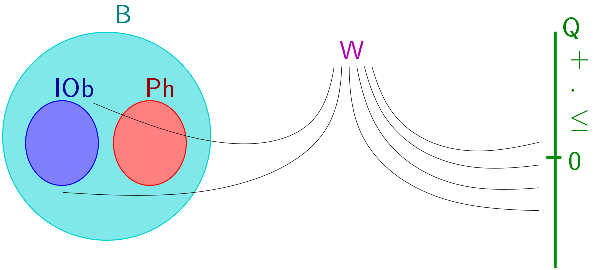
Tarski: Euklideszi geometria elsőrendű logikai axiómarendszere $\rightsquigarrow$ koordinátázás $\rightsquigarrow$ rendezett testek.

Tétel:

„Minden egyenes, ami tartalmazza egy kör belső pontját metszi a körvonalat.” $\iff$ *„Minden pozitív számnak van négyzetgyöke.”*

A téridő tulajdonságok hogyan tükröződnek a számokon?

Nyelv: $\{\,\mathsf{B}, \mathsf{IOb}, \mathsf{Ph}, \mathsf{Q}, +, \cdot, \leq, \mathsf{W}\,\}$

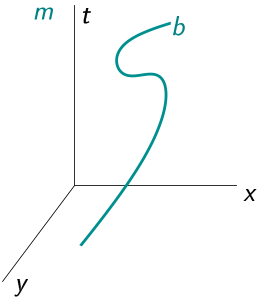


B $\rightsquigarrow$ Bodik (mozgó objektumok)

IOb $\rightsquigarrow$ Inerciális megfigyelők Ph $\rightsquigarrow$ Fotonok (fényjelek)

Q $\rightsquigarrow$ Mennyiségek (számok) $+$, $\cdot$ és $\leq$ $\rightsquigarrow$ műveleti jelek és rendezés

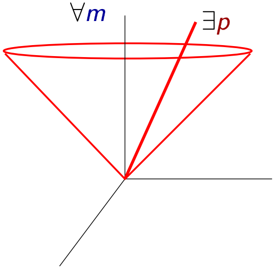
W $\rightsquigarrow$ Világkép reláció ($d+2$-változós $\mathsf{B}^2 \times \mathsf{Q}^d$ típusú reláció)



A b bodi életútja az m megfigyelő szerint.

Axióma [AxPh]:

A fénysebesség minden inerciális megfigyelő számára mindenhol, minden irányban ugyanakkora; és mindenhol, minden irányban ki is lehet bocsátani egy fényjelet ezzel a sebességgel.



$$\forall m\ \exists c_m > 0\ \forall \bar{x}\ \bar{x}'\ t\ t'\ \ \mathsf{IOb}(m)$$
$$\rightarrow \Big(\big(\exists p\ \ \mathsf{Ph}(p) \wedge \mathsf{W}(m,p,\bar{x},t) \wedge \mathsf{W}(m,p,\bar{x}',t') \big) \leftrightarrow$$
$$(x_1' - x_1)^2 + (x_1' - x_1)^2 + \ldots + (x_{d-1}' - x_{d-1})^2 = c_m^2 \cdot (t'-t)^2 \Big).$$

Mit tegyünk fel a számokról?

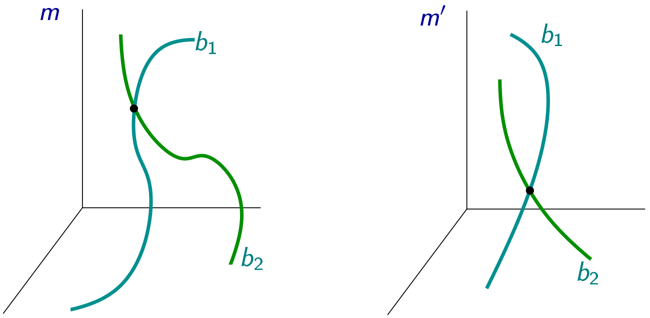
Mit tegyünk fel a számokról?

Axióma [AxField]:

A **számok struktúrája** $\langle \mathrm{Q}; +, \cdot, \leq \rangle$ *egy rendezett test.*

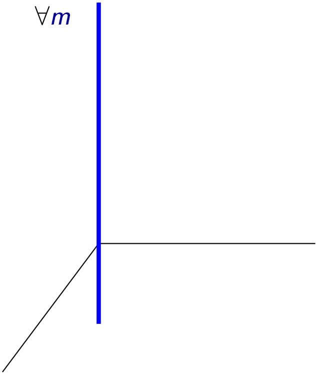
Axióma [AxEv]:

Az inerciális megfigyelők ugyanazokat az eseményeket (bodik találkozásait) látják.



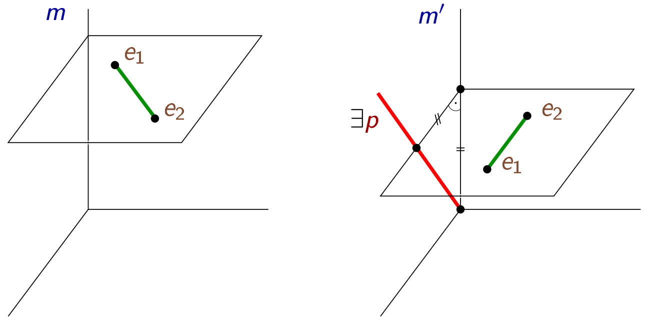
Axióma [AxSf]:

Az inerciális megfigyelők önmagukat állni látják.



Axióma [AxSym]:

Az inerciális megfigyelők egyetértenek a kölcsönösen egyidejűnek tartott események távolságán. Továbbá a fénysebesség 1.



$$\mathsf{SpecRel} = \{\mathsf{AxField}, \mathbf{AxPh}, \mathsf{AxEv}, \mathsf{AxSf}, \mathsf{AxSym}\}$$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

SpecRel $\models$ *„mozgó órák kiállnak a szinkronból”,*
„mozgó órák lelassulnak”,
„mozgó méterrudak megrövidülnek”,
stb.

SpecRel = {AxField, **AxPh**, AxEv, AxSf, AxSym}

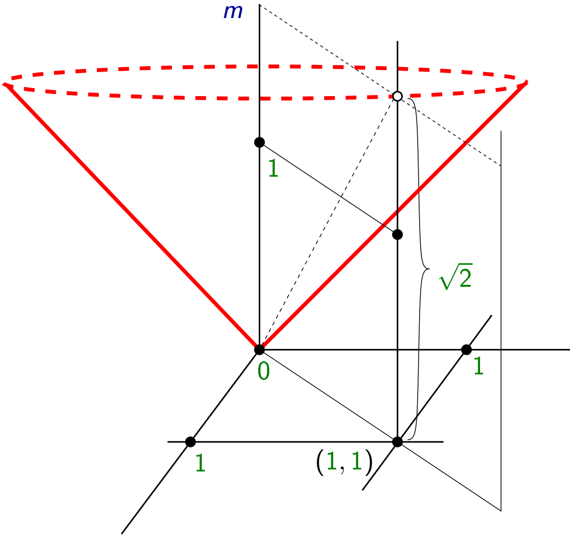
Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

SpecRel $\models$ *„mozgó órák kiállnak a szinkronból”,*
„mozgó órák lelassulnak”,
„mozgó méterrudak megrövidülnek”,
stb.

Kérdés: (Kutatási irány)

Mi maradna meg a SpecRel *tételekből, ha a rendezett testek helyett valami más algebrai struktúrát használnánk?*

Hiányzó fény-egyenesek. . .

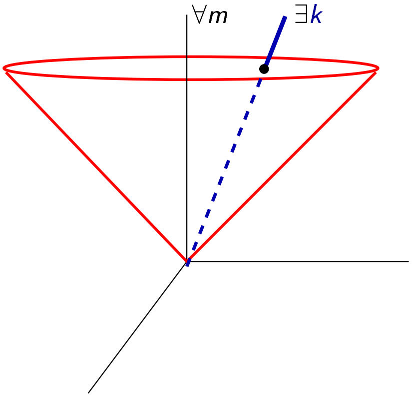


Def.:

$\mathrm{Számok}_n(\mathrm{Th}) = \{\langle \mathrm{Q}, +, \cdot, \leq \rangle : \langle \mathrm{Q}, +, \cdot, \leq \rangle$ *a* Th *elmélet modelljeinek mennyiség struktúrája, ha* $d = n\}$.

Axióma [AxThExp]:

Tetszőleges fénysebességnél kisebb sebességgel haladhat inerciális megfigyelő.

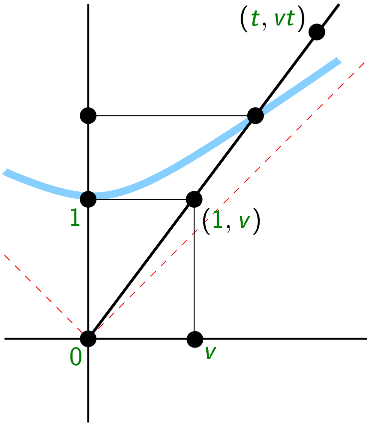


Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\mathrm{Számok}_n(\mathrm{SpecRel} + \mathrm{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

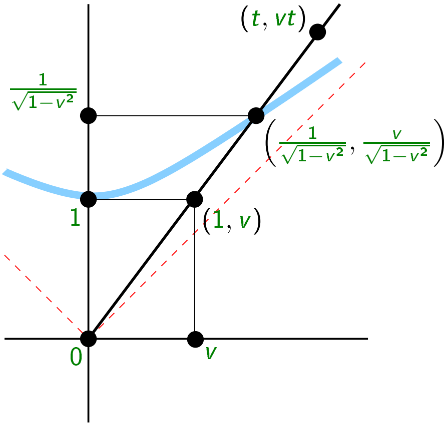
$\mathrm{Számok}_n(\mathrm{SpecRel} + \mathrm{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$



$0 < x \in Q$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\text{Számok}_n(\text{SpecRel} + \text{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$

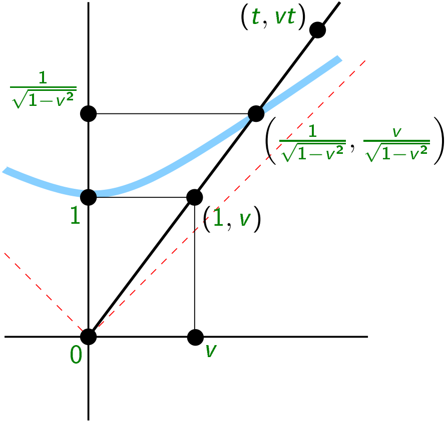


$0 < x \in Q$

$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \in Q$, ha $v \in Q \cap [0, 1)$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\text{Számok}_n(\text{SpecRel} + \text{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$



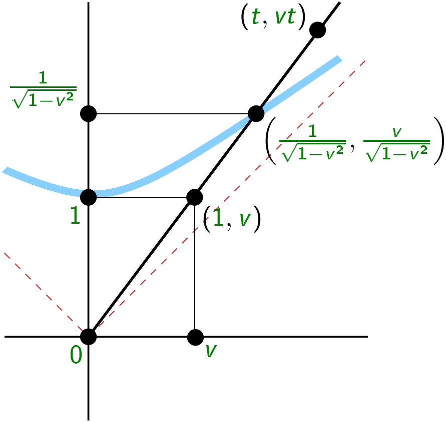
$0 < x \in Q$

$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \in Q$, ha $v \in Q \cap [0, 1)$

$\sqrt{1 - v^2} \in Q$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\text{Számok}_n(\text{SpecRel} + \text{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$



$0 < x \in \mathbb{Q}$

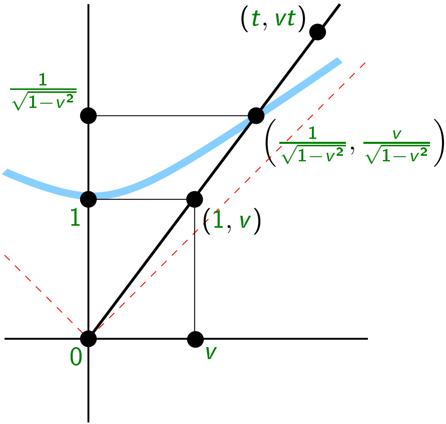
$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \in \mathbb{Q}$, ha $v \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$

$\sqrt{1 - v^2} \in \mathbb{Q}$

$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\text{Számok}_n(\text{SpecRel} + \text{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$



$0 < x \in Q$

$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \in Q$, ha $v \in Q \cap [0, 1)$

$\sqrt{1 - v^2} \in Q$

$x = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)$

$\frac{x+1}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \in Q$

$\sqrt{x} \in Q$

$$\mathsf{SpecRel}_0 = \mathsf{SpecRel} - \mathsf{AxSym}$$

$$\mathsf{SpecRel}_0 = \mathsf{SpecRel} - \mathsf{AxSym}$$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\mathsf{Számok}_3(\mathsf{SpecRel}_0 + \mathsf{AxThExp}) = \{$*Euklideszien rendezett testek*$\}$

$$\mathrm{SpecRel}_0 = \mathrm{SpecRel} - \mathrm{AxSym}$$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$\mathrm{Számok}_3(\mathrm{SpecRel}_0 + \mathrm{AxThExp}) = \{$*Euklideszien rendezett testek*$\}$

Tétel: (Andréka)

$\mathrm{Számok}_{2k}(\mathrm{SpecRel}_0 + \mathrm{AxThExp}) \supsetneqq \{$*Euklideszien rendezett testek*$\}$

$$\mathsf{SpecRel}_0 = \mathsf{SpecRel} - \mathsf{AxSym}$$

Tétel: (Andréka-Madarász-Németi)

$$\mathsf{Számok}_3(\mathsf{SpecRel}_0 + \mathsf{AxThExp}) = \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$$

Tétel: (Andréka)

$$\mathsf{Számok}_{2k}(\mathsf{SpecRel}_0 + \mathsf{AxThExp}) \supsetneq \{\textit{Euklideszien rendezett testek}\}$$

Kérdés: ($n \geq 4$)

$$\mathsf{Számok}_n(\mathsf{SpecRel}_0 + \mathsf{AxThExp}) = ???$$

Axióma [AxThExp$^-$]:

Tetszőleges fénysebességnél kisebb sebességhez tetszőlegesen közeli sebességgel haladhat inerciális megfigyelő.

Axióma [AxThExp$^-$]:

Tetszőleges fénysebességnél kisebb sebességhez tetszőlegesen közeli sebességgel haladhat inerciális megfigyelő.

Tétel: (Madarász-SzG)

$$\mathbb{Q} \in \mathsf{Sz\acute{a}mok}_n(\mathsf{SpecRel} + \mathsf{AxThExp}^-)$$

Axióma [AxThExp$^-$]:

Tetszőleges fénysebességnél kisebb sebességhez tetszőlegesen közeli sebességgel haladhat inerciális megfigyelő.

Tétel: (Madarász-SzG)

$$\mathbb{Q} \in \text{Számok}_n(\text{SpecRel} + \text{AxThExp}^-)$$

Köv.:

$$\{\textit{Archimédeszien rendezett testek}\} \subsetneqq \text{Számok}_n(\text{SpecRel}+\text{AxThExp}^-)$$

Axióma [$\mathsf{AxThExp}^-$]:

Tetszőleges fénysebességnél kisebb sebességhez tetszőlegesen közeli sebességgel haladhat inerciális megfigyelő.

Tétel: (Madarász-SzG)

$$\mathbb{Q} \in \mathsf{Számok}_n(\mathsf{SpecRel} + \mathsf{AxThExp}^-)$$

Köv.:

$$\{\textit{Archimédeszien rendezett testek}\} \subsetneqq \mathsf{Számok}_n(\mathsf{SpecRel} + \mathsf{AxThExp}^-)$$

Sejtés:

$$\mathsf{Számok}_n(\mathsf{SpecRel} + \mathsf{AxThExp}^-) = \{\textit{rendezett testek}\}$$

Gyorsuló megfigyelők (AccRel) / általános relativitáselmélet (GenRel)

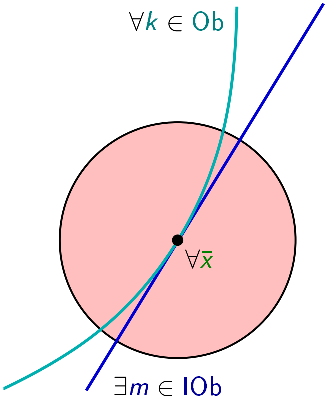
AccRel/GenRel nyelve ugyanaz.

Megfigyelők:

$$\mathrm{Ob}(m) \overset{def}{\iff} \exists xyzt\ b\ \ \mathrm{W}(m, b, x, y, z, t)$$

Axióma [AxCmv]:

Minden megfigyelő életútjának minden pillanatában lokálisan olyannak látja a világot, mint egy inerciális megfigyelő.



Axióma [AxEv^-]:

Minden megfigyelő látja azokat az eseményeket, amiben őt látták.

Axióma [AxSf^-]:

Minden megfigyelő önmagát az időtengely egy intervallumán látja.

$$\mathsf{AccRel}_0 = \mathsf{SpecRel} \cup \{\mathsf{AxCmv}, \mathsf{AxEv}^-, \mathsf{AxSf}^-\}$$

Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

$\mathsf{AccRel}_0 \models \forall m \in \mathsf{IOb}, k \in \mathsf{Ob}$ *„k életútja az m világképében a k (lokálisan) sajátideje szerint van paraméterezve.”*

Ikerparadoxon

$$\mathsf{AccRel}_0 = \mathsf{SpecRel} \cup \{\mathsf{AxCmv}, \mathsf{AxEv}^-, \mathsf{AxSf}^-\}.$$

Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

$$\mathsf{AccRel}_0 \not\models \mathsf{TwP}$$

$$\mathsf{AccRel}_0 = \mathsf{SpecRel} \cup \{\mathsf{AxCmv}, \mathsf{AxEv}^-, \mathsf{AxSf}^-\}.$$

Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

$$\mathsf{AccRel}_0 \not\models \mathsf{TwP}$$
$$Th(\mathbb{R}) \cup \mathsf{AccRel}_0 \not\models \mathsf{TwP}$$

ahol $Th(\mathbb{R})$ a valós számok teljes elsőrendű elmélete.

Axiómaséma [CONT]:

Q *minden nem üres korlátos (paraméteresen) definiálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja.*

$$\mathrm{AccRel} = \mathrm{AccRel}_0 \cup \mathrm{CONT}$$

Axiómaséma [CONT]:

Q *minden nem üres korlátos (paraméteresen) definiálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja.*

$$\mathsf{AccRel} = \mathsf{AccRel}_0 \cup \mathsf{CONT}$$

Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

$$\mathsf{AccRel} \models \mathsf{TwP}$$

Axiómaséma [CONT]:

Q *minden nem üres korlátos (paraméteresen) definiálható részhalmazának van legkisebb felső korlátja.*

$$\mathsf{AccRel} = \mathsf{AccRel}_0 \cup \mathsf{CONT}$$

Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

$$\mathsf{AccRel} \models \mathsf{TwP}$$

Tétel:

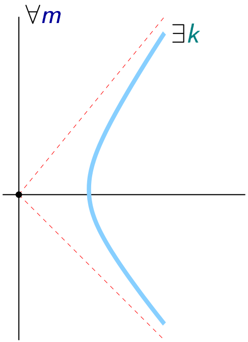
$$\mathsf{AxField} + \mathsf{CONT} \models \mathsf{Th}(\mathbb{R})$$

Köv.:

$$\mathsf{Számok}_n(\mathsf{AccRel}) = \{\textit{valósan zárt testek}\}.$$

Axióma [Ax∃UnifOb]:

Vannak egyenletesen gyorsuló megfigyelők.



Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

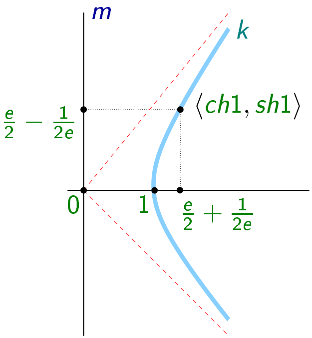
AccRel$\models \forall m \in$ IOb, $k \in$ Ob „k *életútja az* m *világképében a* k *sajátideje szerint van paraméterezve.*”

Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

AccRel $\models \forall m \in$ IOb, $k \in$ Ob „*k életútja az m világképében a k sajátideje szerint van paraméterezve.*”

Köv.:

$$\text{AccRel} + \text{Ax}\exists\text{UnifOb} \models e \in \mathbb{Q}$$



Tétel: (Madarász-Németi-SzG)

AccRel$\models \forall m \in$ IOb, $k \in$ Ob „k *életútja az* m *világképében a* k *sajátideje szerint van paraméterezve.*”

Köv.:

$$\mathrm{AccRel} + \mathrm{Ax}\exists\mathrm{UnifOb} \models e \in \mathbb{Q}$$

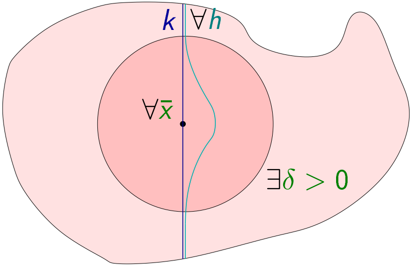
Kérdés:

$$\mathrm{Számok}_n(\mathrm{AccRel} + \exists\mathrm{UnifOb}) = ???$$

?Exponential ordered fields? (Salma Kuhlmann)

Def. (Geodetikus):

Egy megfigyelő életútját időszerű **geodetikusnak** *nevezzük, ha „lokálisan maximalizálja az eltelt időt”.*



Def. (Geodetikus):

Egy megfigyelő életútját időszerű **geodetikusnak** *nevezzük, ha „lokálisan maximalizálja az eltelt időt”.*

Axiómaséma [COMPR]:

Minden (paraméteresen) definiálható időszerű görbéhez van egy olyan megfigyelő, akinek az életútja ezen a görbén halad.

Áll.:

$$\text{Számok}_n(\text{AccRel} + \text{COMPR}) \subsetneqq \text{Számok}_n(\text{AccRel} + \exists\text{UnifOb})$$

Áll.:

$$\text{Számok}_n(\text{AccRel} + \text{COMPR}) \subseteq \text{Számok}_n(\text{AccRel} + \exists\text{UnifOb})$$

Kérdés:

$$\text{Számok}_n(\text{AccRel} + \text{COMPR}) = ???$$
$$\text{Számok}_n(\text{GenRel} + \text{COMPR}) = ???$$

???differentially closed fields??? (Abraham Robinson)

Köszönöm a figyelmet!

További részletek:

www.renyi.hu/~turms