Tudományos diákköri dolgozat

Az ikerparadoxon elsőrendű logikai tárgyalásban

Készítette: Székely Gergely
V. évf. ELTE TTK matematikus hallgató
turms@cs.elte.hu

Konzulensek: Andréka Hajnal
Rényi Intézet tudományos osztályvezetője
Madarász X. Judit
Rényi Intézet tudományos munkatársa

Budapest, 2003. novembere

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Ebben a dolgozatban a relativitáselmélet egyik vezérelvének és az ikerparadoxonnak a logikai kapcsolatát fogjuk vizsgálni. A relativitáselmélet azon alapelvét, miszerint minden nyugalomban lévő (inerciális) megfigyelő ugyanolyannak látja a világot, az **AxSymTime** axiómában fogjuk precízen formalizálni. Az ikerparadoxont, mely szerint, ha két ikertestvér közül az egyik nyugalomban van, míg a másik gyorsulásnak van kitéve, akkor az előbbi testvér két találálkozásuk között több időt érez eltelni mint az utóbbi, pedig az **AxTwp** axióma formalizálja.

Vizsgálódásainkat abban az elsőrendű logikai környezetben hajtjuk majd végre, melyet Andréka Hajnal, Madarász X. Judit és Németi István dolgozott ki a közelmúltban, Andai Attila, Sain Ildikó, Sági Gábor, Tőke Csaba és Vályi Sándor közreműködésével. Azzal a céllal építették ki ezt a környezetet, hogy az elsőrendű logikai eszközök segítségével a relativitáselmélet egy mélyebb megértését kapjuk, ahol elsősorban a miért tipusú kérdésekre koncentrálunk. [And-Mad-Né][Mad][And-Mad-Né-2] Efelé a cél felé törekszünk ebben a dolgozatban is.

A dolgozatban megadjuk a fent említett két axiómának geometriai karakterizációit, lásd a 3.1.1 és 3.2.1 tételeket. Ezen karakterizációk segítségével a 3.3.2 és 3.3.3-ban megoldunk pár problémát, amit Andréka H, Madarász J. X. és Németi I. vetett fel [And-Mad-Né]-ben. Továbbá 3.3.1-ben egy szemléletesebb bizonyítást adunk egy már ismert tételre. Az utolsó fejezetben pedig röviden rávilágítunk arra, hogy ezzel az ikerparadoxonnal kapcsolatos kérdéskör még nincs teljesen lezárva, és rejt magában érdekes megoldatlan problémákat.

2. fejezet

Az elsőrendű logikai keret

Ebben a fejezetben tömören vázoljuk azt a többszortú elsőrendű logikai keretet, melyben a relativitáselmélettel kapcsolatos vizsgálódásainkat szoktuk végezni. Továbbá megadunk egy alap axiómarendszert, melyben az ikerparadoxon és a fent említett szimmetria axióma kapcsolatát tárgyaljuk majd ezen dolgozatban.

2.1. A keret nyelv

Legelőször rögzítünk egy $n \geq 2$ egész számot, melyet innentől kezdve a tér-idő dimenziójának tekintünk és így is hivatkozunk majd rá.

A struktúra típusa, melyben a továbbiakban dolgozunk a következő:

$$\langle B, F; Obs, Ph, +, \cdot, \leq, W\rangle.$$

Itt B és F két nem üres halmaz, a struktúra két univerzuma más néven szortja, a többi pedig ezeken a szortokon értelmezett relációk és függvények.

B az úgynevezett `body`k szortja. Ezek lesznek az objektumok a tér-időben. Ennek a szortnak egy elemét a továbbiakban body-nak fogjuk nevezni. F pedig a `mennyiség`ek szortja. Ez a `megfigyelő`k – mint speciális bodyk – paraméter tartománya. Ennek a szortnak az elemeivel fognak majd koordinátázni a megfigyelők.

Az Obs és Ph két egyváltozós reláció a bodyk szortján. Az Obs jelöli ki azokat a bodykat, melyeket megfigyelőknek nevezünk majd, és a Ph pedig azokat, melyeket `foton`oknak.

A $+, \cdot, \leq$ az F szorton értelmezett kétváltozós müveletek illetve reláció, melyek a szokásos összeadás, szorzás müveletek, illetve a rendezés reláció szerepét töltik be.

A W pedig egy $n+2$ változós reláció, a $B \times F^n \times B$ részhalmaza. Ez a reláció azt az intuitív képet hordozza magában, hogy valaki, valahol észlel (koordinátáz) valamit. Pontosabban az első változóban szereplő body, az utolsó változóban szereplő bodyt a többi változóban szereplő mennyiségekkel koordinátázza.

2.2. A keret axiómák

Ebben a részben megadjuk azokat az axiómákat, melyeket a fent definiált relációkról felteszünk, hogy az ott megfogalmazott intuitív elvárások értelmet nyerjenek. Ezeket az axiómákat keret axiómáknak hívjuk és mindig, minden axióma rendszerben fölteszük őket.

A

$$\langle F, +, \cdot, \leq \rangle$$

reduktumról két axiómát teszünk fel: Az egyik $\mathbf{Ax_{OF}}$ azt fejezi ki, hogy F egy lineárisan rendezett test, $\mathbf{Ax}(\sqrt{\ })$ pedig azt, hogy minden pozitív elemből lehet négyzetgyököt vonni F-ben. [1] Ezt minden gond nélkül megtehetjük, de itt nem kívánjuk részletezni, mert teljesen technikai, és témánkhoz lényegét tekintve nem kapcsolódik. A részletek megtalálhatók: [Mad] vagy [And-Mad-Né].

Mivel azt akarjuk, hogy a megfigyelők legyenek azok a kitüntetett bodyk, amelyek koordinátáznak, ezért feltesszük, hogy:

$$W(m, p, b) \Rightarrow Obs(m),$$

ami pont ezt fogalmazza meg (azaz, ha egy body koordinátáz, akkor az megfigyelő).

Azért, hogy a megfigyelő mentes modelleket kizárjuk feltesszük, hogy:

$$\exists m \;\; Obs(m)$$

2.3. Az alap axiómarendszer (Specrel$^-$)

Ebben a részben megadunk egy axiómarendszert, a **Specrel**$^-$-t, a keretnyelven belül az egyikét azoknak, melyekkel általában dolgozni szoktunk.

Pár definíció, jelölés és konvenció elöljáróban:

A $(p_t, p_1 \dots p_{n-1}) = p \in F^n$ jelölést fogjuk használni az F fölötti n dimenziós vetktortér elemeire, utalva arra, hogy az első koordinátát, mint idő koordinátát tekintjük.

A vektortér egyeneseire a

$$\texttt{Lines} := \{\{q + \lambda s : \lambda \in F\} : q, s \in F^n, s \neq 0\}$$

jelölést használjuk.

A b body `életútját` az m megfigyelő világképében a

$$tr_m(b) := \{p \in F^n : W(m, p, b)\}$$

halmaz definiálja.

Továbbá $l \in \texttt{Lines}$ esetén, ahol $s \in F^n$ mint fent, a

$$v(l) := \begin{cases} \sqrt{\frac{s_1^2 + \dots + s_{n-1}^2}{s_t^2}} & \text{ha } s_t \neq 0 \\ \infty & \text{ha } s_t = 0 \end{cases}$$

[1] Az $\mathbf{Ax}(\sqrt{\ })$-t általában nem veszzük be a keret nyelvbe csak ezen dolgozatban.

definíciót használjuk az l egyenes 'sebességére'. Ha $tr_m(b) \in \texttt{Lines}$, akkor $v_m(b)$ rövidítést használjuk $v(tr_m(b))$ helyett.

AxLine

$$(\forall m \in Obs)(\forall b \in B)\ \ tr_m(b) \in \texttt{Lines}$$

Ez az axióma azt fejezi ki, hogy minden megfigyelő minden bodyt egyenesen lát mozogni. Lásd 2.1 ábra. (Az ilyen megfigyelőket a fizikában inerciálisnak szokták nevezni.)

A $\bar{t} := F \times \{0\}^{n-1}$ jelölést használjuk az idő tengelyre.

A fénysebességnek az 1 értéket feleltetjük meg.

AxE

$$(\forall m \in Obs)(\forall ph \in Ph)\ \ v_m(ph) = 1$$

Ez az axióma azt a relativisztikus jelenséget fogalmazza meg, hogy minden megfigyelő ugyanolyan gyorsan látja a fényt terjedni. (Ez a relativitáselmélet egyik vezérelve.)

AxSelf

$$(\forall m \in Obs)\ \ tr_m(m) = \bar{t}$$

Ez az axióma azt mondja, hogy a megfigyelők állni látják magukat a saját koordináta-rendszerükben. Lásd 2.1 ábra.

AxObs

$$(\forall m \in Obs)(\forall l \in \texttt{Lines})(\ v_m(l) < 1 \Longrightarrow (\exists k \in Obs)\ \ tr_m(k) = l\ )$$

Másképp fogalmazva: minden irányban, minden, a fénysebességnél lassabb sebességgel lehet haladni. Lásd 2.1 ábra.

AxPh

$$(\forall m \in Obs)(\forall l \in \texttt{Lines})(\ v(l) = 1 \Longrightarrow (\exists ph \in Ph)\ \ tr_m(ph) = l\ )$$

Ez az axióma pedig a fotonok létezését követeli meg minden irányban a fénysebességgel. Lásd 2.1 ábra.

Bevezetjük a

$$w_m(p) := \{b \in B : W(m, p, b)\}$$

jelölést az m megfigyelő által p pontban látott bodyk halmazára. És w_m-re úgy gondolunk, mint F^n pontjaihoz bodyk halmazait rendelő függvényre. Bodyk részhalmazait `események`nek nevezzük.

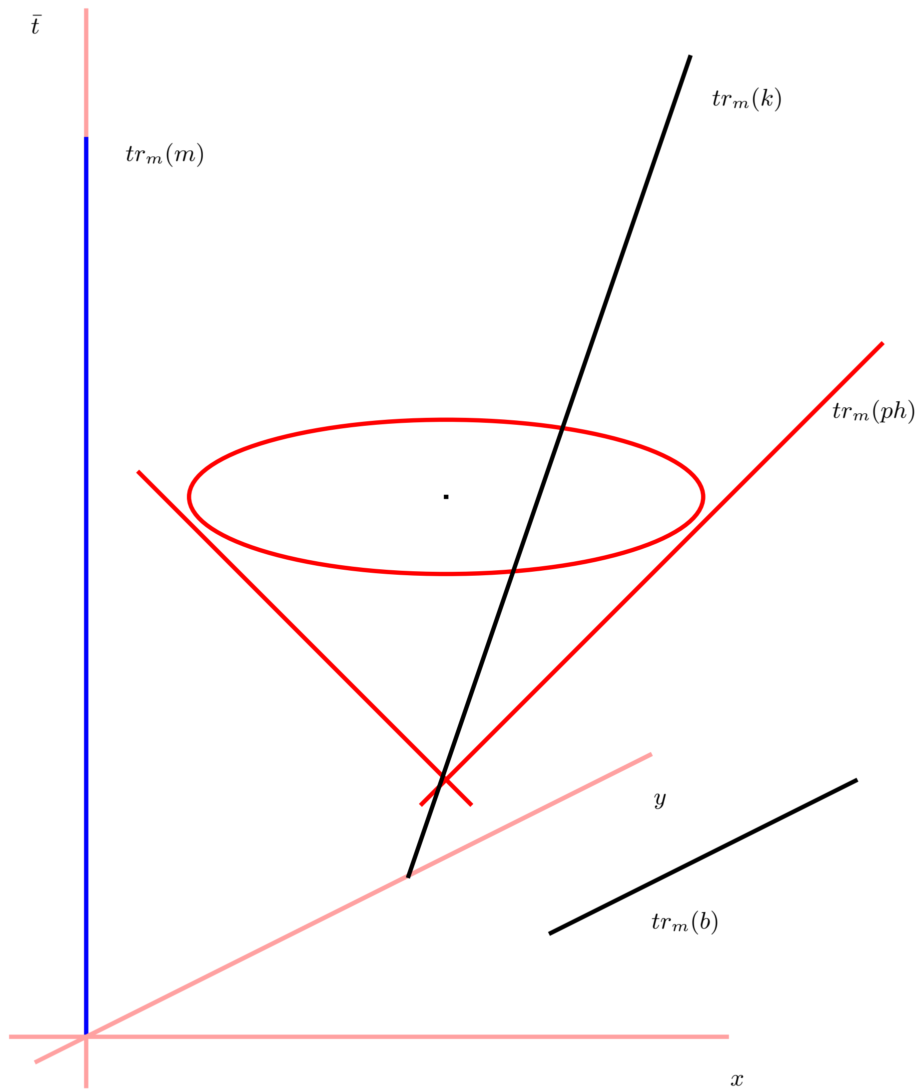
AxRange

$$(\forall m, k \in Obs)\ \ Ran(w_m) = Ran(w_k)$$

Azaz a w_m és w_k függvényeknek ugyanaz az értékkészlete, ami intuitíven azt jelenti, hogy minden megfigyelő pontosan ugyanazokat az eseményeket látja.

További fontos fogalom a `világképtranszformáció` m és k megfigyelők világképe között:

$$f_{mk} := \{\langle p, q\rangle \in F^n \times F^n : w_m(p) = w_k(q)\}$$



2.1. ábra. **Specrel**$^-$-hoz

Azaz f_{mk} azon pontpárok halmaza, ahol m és k ugyanazokat az eseményeket látja. Elég kevés feltevésből már következik, hogy ez nem csak egy relációként, hanem egy bijektiv leképezésként is felfogható, és így joggal nevezhető transzformációnak. Ez például az ezen dolgozatban használt axióma rendszerből (**Specrel**$^-$-ból) bőven következik, lásd [Mad][And-Mad-Né].

Ax($\|$)

$$(\forall m, k \in Obs)(\, tr_m(k) \text{ párhuzamos } \bar{t}\text{–vel} \Longrightarrow f_{mk} \text{ izometria}\,)$$

Ez az axióma azt mondja ki, hogy egymást állni látó megfigyelők ugyanazt az időeltérést, illetve távolságot mérik két esemény között.

Bevezetjük a $1_t := (1, 0, \ldots, 0)$ jelölést, továbbá $f_{mk}(p)_t$-vel jelöljük az $f_{mk}(p)$ pont idő (első) komponensét.

AxLinTime

$$(\forall m, k \in Obs)(\forall \lambda \in F)(\, f_{mk}(0) = 0 \Longrightarrow f_{mk}(\lambda 1_t) = \lambda f_{mk}(1_t)\,)$$

Ez az axióma azt jelenti, hogy, ha egy megfigyelő találkozott egy másikkal és egyszerre mért vele 0 órát, akkor úgy látja, hogy a másik számára egyenletesen telik az idő.

AxTimeStart

$$(\forall m \in Obs)(\forall \lambda \in F)(\exists k \in Obs)\;\; f_{mk}(p) = p + \lambda 1_t$$

Ez az axióma azt mondja, hogy minden megfigyelőhöz és időegységhez van egy másik megfigyelő, aki pont ugyanúgy látja a világot, mint az előbbi megfigyelő kivéve, hogy az órája az adott időegységgel később indult el.

AxTimeOrd

$$(\forall m, k \in Obs)\;\; f_{mk}(1_t)_t - f_{mk}(0)_t > 0$$

Az axióma azt fejezi ki, hogy az idő minden megfigyelő számára ugyanabba az irányba telik.

Ezt az axiómát azért tesszük fel, mert hiánya mellett ugyan a következő fejezet állításai érvényben maradnának, azonban a fogalmak és a bizonyítások technikailag elbonyolódnának, és ezáltal eltakarnák a lényeget.

Ezekből az axiómákból álló axiómarendszert nevezzük **Specrel**$^-$-nak:

$$\textbf{Specrel}^- = \{\textbf{AxLine}, \textbf{AxE}, \textbf{AxSelf}, \textbf{AxObs}, \textbf{AxPh}, \textbf{AxRange},$$

$$\textbf{Ax}(\|), \textbf{AxLinTime}, \textbf{AxTimeStart}, \textbf{AxTimeOrd}\}$$

3. fejezet

Az AxTwp és AxSymTime axiómák kapcsolata

Ebben a fejezetben megfogalmazzuk az **AxSymTime** és a **AxTwp** axiómákat, és megadjuk mind a kettőnek egy geometriai karakterizációját a **Specrel**$^-$ modelljeiben. Majd a karakterizációk következményeképp bebizonyítjuk a bevezetőben említett állításokat.

AxTwp

$$(\forall m, a, b, c \in Obs)(\forall p, q, r \in F^n)(\, p, q, r \text{ nincs egy egyenesen},$$

$$\{a, c\} \subset w_m(p), \{b, a\} \subset w_m(q), \{b, c\} \subset w_m(r)$$

$$\Longrightarrow |f_{mc}(r)_t - f_{mc}(p)_t| > |f_{ma}(q)_t - f_{ma}(p)_t| + |f_{mb}(r)_t - f_{mb}(q)_t|\,)$$

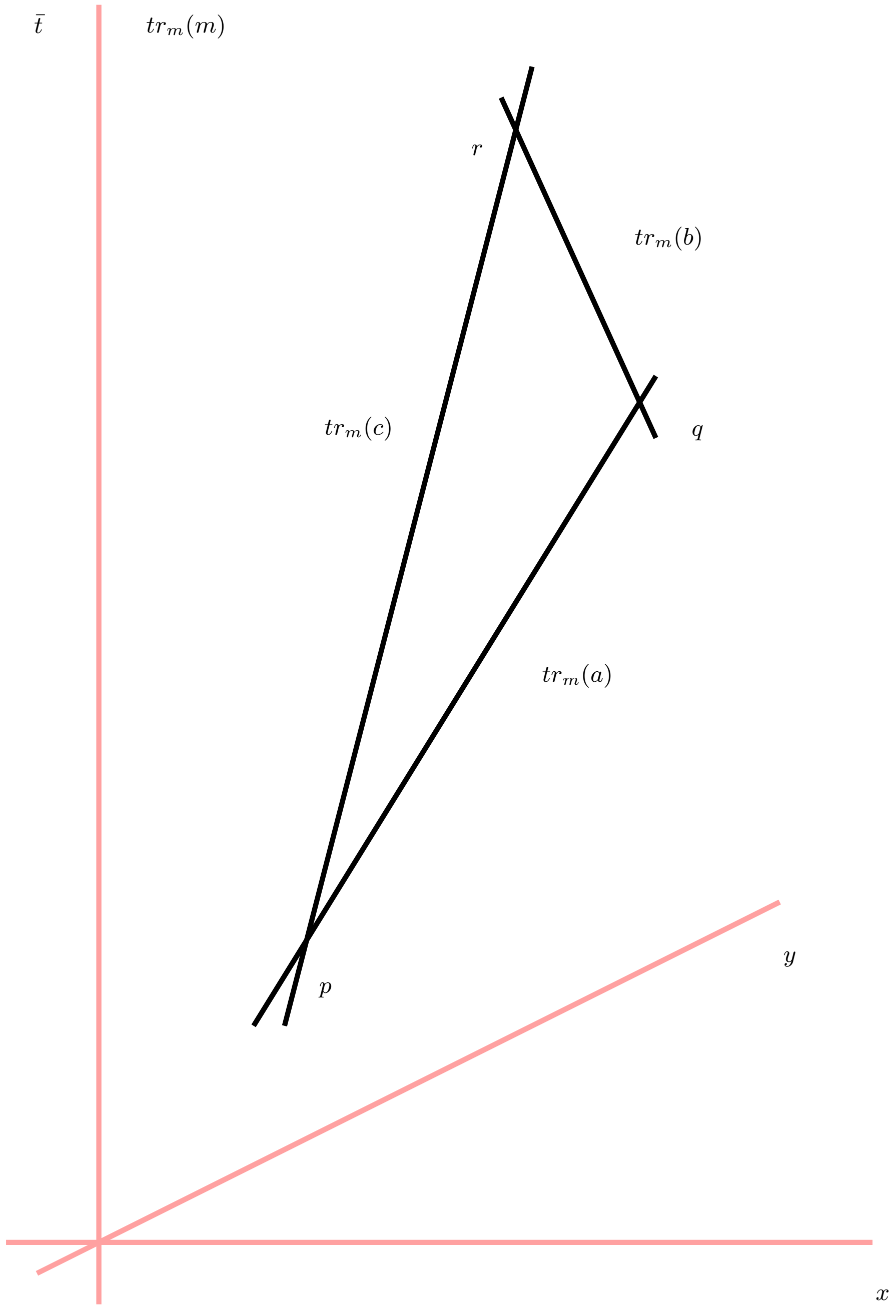
Mivel **Specrel**$^-$-ban csak egyenes vonalon történő (inerciális) mozgások szerepelnek, ezért az ikerparadoxont azzal a trükkel fogalmaztuk meg, hogy a gyorsuló ikertestvért két inerciálisból a-ból és b-ből illesztettük össze. Lásd 3.1 ábra. A fenti axióma pont azt fogalmazza meg, hogy ha az a, b, c megfigyelőket az m megfigyelő úgy látja, hogy az a, b megfigyelők, a b, c megfigyelők és az a, c megfigyelők rendre a q, r, p pontokban találkoztak, akkor m szerint a c megfigyelő több időt mér p és r pont között mint az a megfigyelő a pq és a b megfigyelő a qr szakaszon együttvéve.

AxSymTime

$$(\forall m, k \in Obs)(\, f_{mk}(0) = 0 \Longrightarrow f_{mk}(1_t)_t = f_{km}(1_t)_t\,)$$

Az axióma jelentése az, hogy az origóban találkozó megfigyelők ugyanannyira látják megrövidülni egymás egység-óráját. Mivel **AxLinTime**-t feltettük, ezért ez ugyan azt jelenti mint az, hogy a megfigyelők ugyanúgy látják lelassulni[1] egymás óráit. Ezt az állítást magában foglalja a relativitáselmélet azon

[1] **Specrel**$^-$-ból még nem következik, hogy lassulni látják egymás óráit, viszont ha az **AxSymTime**-ot hozzávesszük, akkor már igen.



3.1. ábra. **AxTwp**-hez

vezérelve, hogy a nyugalomban lévő (egyenes vonalú egyenletes mozgást végző) megfigyelők ugyanúgy látják a világot.

Az **AxSymTime** axióma a **Specrel**$^-$-el együtt lényegében véve már azt fejezi ki, amit a speciális relativitáselmélet alatt érteni szokás.

3.1. Az AxTwp karakterizációja

Az

$$MS_t^m := \{f_{km}(1_t) : k \in Obs \wedge f_{mk}(0) = 0\}$$

halmazt az m megfigyelő szerinti (idő) `Minkowski-szférának` nevezzük. Ez azon pontok halmaza F^n-ben, ahol m lát valakit 1 órát mérni azok közül, akikkel találkozott, és egyszerre mért 0-át.

Az MS_t^m halmazt `'konvexnek'` fogjuk nevezni, ha bármely két pontján át az azokat összekötő szakasz a halmaz fölött halad.[2]

Ha Σ egy formulahalmaz és φ egy formula, akkor $\Sigma \models \varphi$ alatt azt értjük, hogy φ igaz Σ minden modelljében.

A következő tétel egy geometriai karakterizációt ad az **AxTwp** axiómára a **Specrel**$^-$ modelljeiben.

Tétel 3.1.1

$$\textbf{Specrel}^- \models \textbf{AxTwp} \Longleftrightarrow \forall m \in Obs \;\; MS_t^m \;\; '\text{konvex}'$$

biz. Legyenek p, q, r pontok és m, a, b, c megfigyelők az **AxTwp** axiómában szereplő pontok, illetve megfigyelők. Lásd 3.2 ábra. Az **Ax**($\|$) miatt a párhuzamos életútú megfigyelők ugyanúgy mérik az időt. **AxObs** és **AxTimeStart** miatt az m megfigyelő minden pontból minden irányban lát fénynél lassabban haladni olyan megfigyelőt, aki az adott pontban mért 0 órát.

Ezért feltehetjük, hogy a p pont épp az origó.

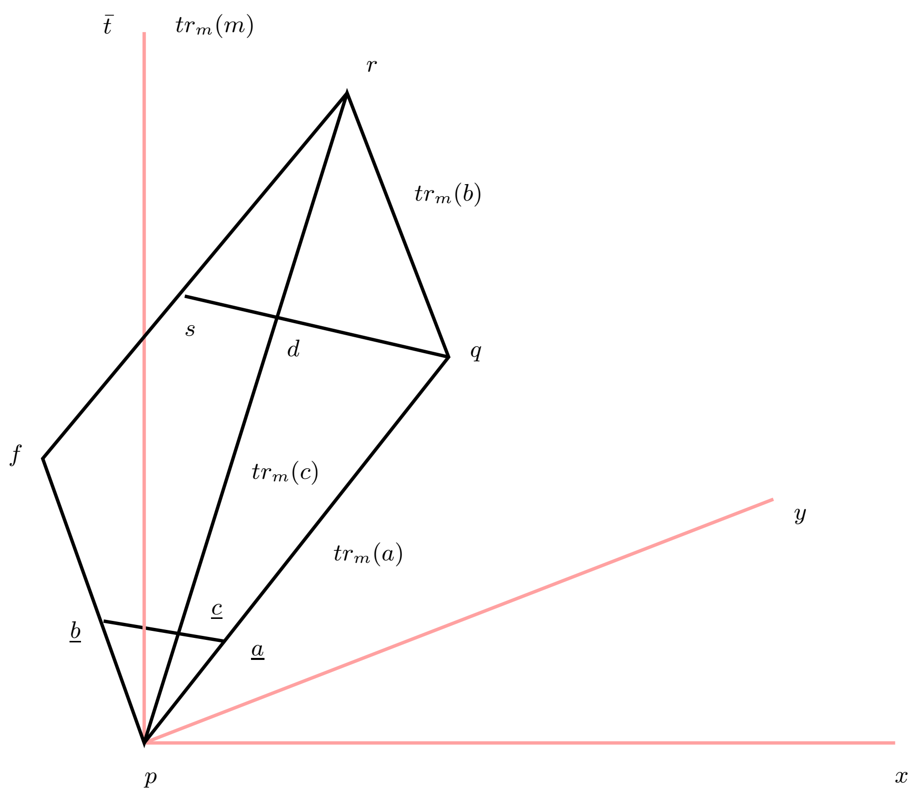
Legyen továbbá f a q pont $p\,r$ szakasz felezőpontjára vett tükörképe. **Ax**($\|$) miatt tudjuk, hogy a p, q, r, f pontok által meghatározott paralelogrammának a szemközti oldal egyenesein élő megfigyelők ugyanúgy látják telni az időt. Jelöljük a $p\,q$ és $p\,f$ szakaszokon a és b megfigyelők egység-óráit rendre $\underline{a}$-val és $\underline{b}$-vel.

Ahhoz, hogy lássuk mit jelent az, hogy a c megfigyelő több időt mér a $p\,r$ szakaszon mint a másik kettő a $p\,q$ és $q\,r$ szakaszokon együttvéve, nézzük meg, hogy hova kell felvenni a c megfigyelő egység-óráját, hogy ugyanannyit mérjen mint a másik kettő együtt. Ehhez húzzunk párhuzamost q ponton át $\underline{a}\,\underline{b}$-vel, jelöljük rendre d-vel, illetve s-sel ezen párhuzamosnak és $p\,r$, illetve $f\,r$ egyenesek metszéspontját. Jelöljük továbbá $\underline{c}$-vel a $\underline{a}\,\underline{b}$, illetve a $p\,r$ szakaszok metszéspontját. Belátjuk, hogy ha a c megfigyelő egység-órája pont a $p\underline{c}$ szakasz, akkor a c megfigyelő pont annyi időt mér $p\,r$ pontok között, mint a másik két megfigyleő

[2] A 'konvex' tulajdonságból következik, hogy MS_t^m minden egyenest legfeljebb egy pontban metsz, így gondolhatunk rá mint irányokhoz pontotkat rendelő (parciális)függvényre és ekkor a 'konvex' tulajdonság pont a szokásos függvénytani konvexitást fogja jelenteni.

közösen. Ehhez azt kell látni, hogy a $\frac{p\,q}{p\underline{a}} + \frac{p\,f}{p\,\underline{b}} = \frac{p\,r}{p\,\underline{c}}$ egyenlőség fennáll a szakaszok hosszára, mert **AxLinTime** miatt a $\frac{p\,q}{p\,\underline{a}}$, $\frac{p\,f}{p\,\underline{b}}$, $\frac{p\,r}{p\,\underline{c}}$ arányok rendre az a, b, c megfigyelők által a megfelelő szakaszokon mért időt jelentik. A fenti egyenlőség pedig a következők miatt áll fenn: a $p\,\underline{a}\,\underline{c}$ illetve a $p\,q\,d$ háromszögek hasonlóak, továbbá a $p\,\underline{c}\,\underline{b}$ és a $r\,d\,q$ háromszögek szintén hasonlóak, ez a konstrukcióból világosan látszik. Felírva a hasonlóságból adódó oldalarány egyenlőségeket, azt kapjuk hogy $\frac{p\,d}{p\,\underline{c}} = \frac{p\,q}{p\,\underline{a}}$ illetve, hogy $\frac{d\,r}{p\,\underline{c}} = \frac{r\,q}{p\,\underline{b}}$. Ezeket összeadva és felhasználva, hogy $p\,d + d\,r = p\,r$, pont a kívánt egyenlőséget kapjuk. Tehát azt kaptuk, hogy a c megfigyelő pontosan akkor mér ugyanannyit mint a másik kettő együttvéve, ha az egység-órája pont az a és b megfigyelők egység-óráit összekötő szakaszon van.

Ahhoz pedig, hogy a c megfigyelő több időt mérjen, az kell, hogy az egység-órája rövidebb legyen. Ez pedig pont azt jelenti, hogy az MS_t^m halmaznak megvan a 'konvex' tulajdonsága. □



3.2. ábra. a 3.1.1 tétel bizonyításához

3.2. Az AxSymTime karakterizációja

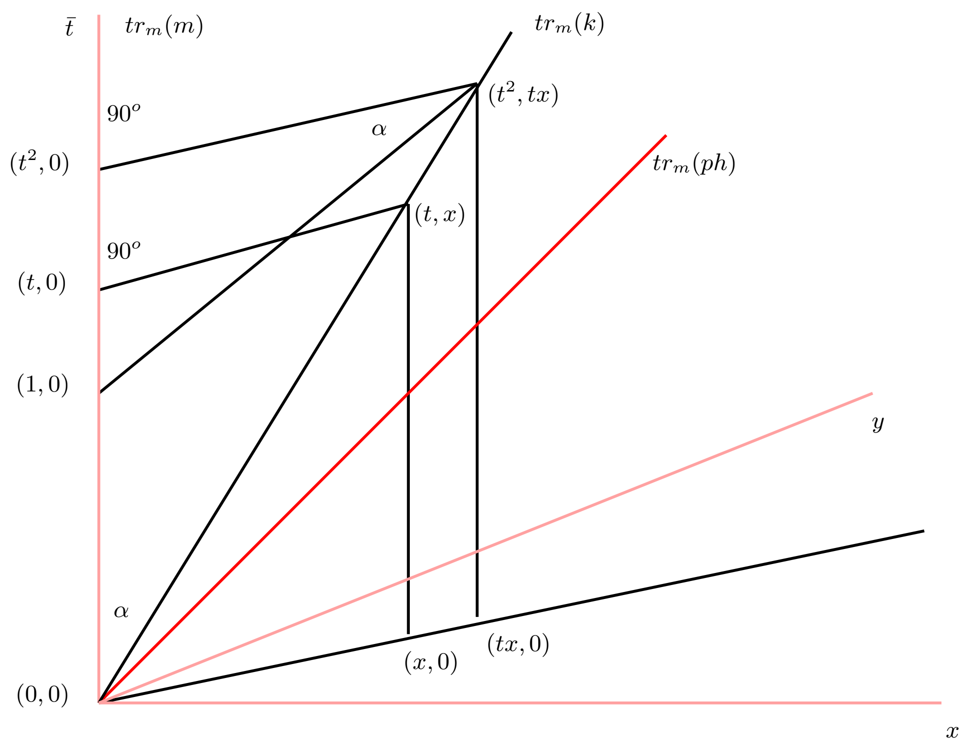
A $\{p \in F^n : p_t > 0, p_t^2 - p_1^2 - \cdots - p_{n-1}^2 = 1\}$ halmazt egység hiperboloidnak fogjuk nevezni, továbbá a kétdimenziós egység hiperboloidot egység hiperbolának hívjuk.

A következő tétel egy geometriai karakterizációt ad az **AxSymTime** axiómára a **Specrel**$^-$ modelljeiben.

Tétel 3.2.1

$$\textbf{Specrel}^- \models (\forall m \in Obs)(\ MS_t^m \text{ az egység hiperboloid}) \iff \textbf{AxSymTime}$$

biz.



3.3. ábra. a 3.2.1 tétel bizonyításához

A következő három állítás miatt, elég megmutatni azt, hogy **AxSymTime** azzal ekvivalens, hogy MS_t^m részhalmaza az egység hiperboloidnak:

AxObs és **AxTimeStart** miatt az m megfigyelő viágképében minden origón átmenő, fénynél lassabb egyenesen kell legyen olyan megfigyelő, aki az origóban mért nulla órát. Az egység hiperboloid minden ilyen egyenest pontosan egy pontban metsz. Továbbá, az egység hiperboloid minden pontját, a 0-val összekötő egyegyenes lassabb a fény sebességnél.

Legyen k egy tetszőleges olyan megfigyelő, aki az origóban találkozott m-mel és egyszerre mért vele 0 órát. $(f_{mk}(0) = 0)$ A számolások egyszerűsítése végett, a $\bar{t}$-n és $tr_m(k)$ átmenő síkon belül az m szerinti idő és az m-től mért távolsággal koordinátázunk, lásd 3.3 ábra. Az $f_{km}(1_t)$ koordinátái legyenek (t, x).

Mivel az $f_{mk}(1_t)$ és az $f_{mk}(1_t)_t 1_t$ pontok k világképében egyidejűek. Ezért az $f_{km}(f_{mk}(1_t)_t 1_t)$ pont az a pont m világképében, k életútján, amit k egyidejűnek lát $f_{km}(f_{mk}(1_t)) = 1_t$-vel.

AxLinTime miatt $f_{km}(f_{mk}(1_t)_t 1_t) = f_{mk}(1_t)_t f_{km}(1_t)$. Mivel azt tettük fel, hogy $f_{km}(1_t) = (t, x)$, így $f_{km}(1_t)_t = t$ és igy **AxSymTime** 'k-ra vonatkoztatva' azzal ekvivalens, hogy $f_{km}(f_{mk}(1_t)_t 1_t)$ koordinátái (t^2, tx). Felhasználva azt, hogy a k megfigyelő számára egyidejű pontok halmazai (szimultanitásai) az m megfigyelő világképében, a $\bar{t}$-t és $tr_m(k)$-t tartalmazó síkon belül, pont a k életútjának a fényegyenesekre (azaz, az 1 sebességű egyenesekre) való tükörképei, lásd [And-Mad-Né], azt kapjuk, hogy az $(1, 0)$, (t^2, tx) és a $(t^2, 0)$ pontok, illetve a $(0, 0)$, $(t, 0)$ és a (t, x) pontok által alkotott derékszögű háromszögek hasonlóak, hisz az $(0, 0)$ illetve a (t^2, tx)-nél lévő szögeik azonosak. Ezt a hasonlóságot felírva azt kapjuk, hogy $\frac{t^2-1}{tx} = \frac{x}{t}$, ami rendezve pont $1 = t^2 - x^2$. Azt bizonyítottuk, hogy k egység-órája pontosan akkor van az egység hiperboloidon, ha az **AxSymTime** teljesül k-ra vonatkoztatva.

Mivel k tetszőleges olyan megfigyelő volt, hogy $f_{mk}(0) = 0$, ezért az állítást bebizonyítottuk. $\Box$

3.3. A karakterizációk következményei

A karakterizációk következményeként igen szemléletes bizonyítást kapunk arra, hogy a speciális relativitáselméletből következik az ikerparadoxon.

Következmény 3.3.1

$$\mathbf{Specrel}^- \models \mathbf{AxSymTime} \Longrightarrow \mathbf{AxTwp}$$

biz. Mivel az egység hiperboloid 'konvex' a fenti értelemben, ezért az állítás a karakterizációs tételek után nyilvánvaló. $\Box$

Ha Σ egy formulahalmaz és φ egy formula, akkor $\Sigma \not\models \varphi$ alatt azt értjük, hogy van Σ-nak olyan modellje, amiben φ nem igaz.

Andréka H, Madarász J. X. és Németi I. vetették fel azt a kérdést, hogy az előző állításban megfordítható-e a következtetés iránya, lásd [And-Mad-Né] Question 4.2.17 és Question 4.2.16. Erre a kérdésre ad negatív választ a következő állítás:

Következmény 3.3.2

$$\mathbf{Specrel}^- \not\models \mathbf{AxTwp} \Longrightarrow \mathbf{AxSymTime}$$

biz. Ismert, hogy egy megfigyelő Minkowski-szféráját majdnem tetszőlegesen előírhatjuk **Specrel**$^-$ modelljeiben. Azaz, hogy minden H halmazhoz (ami az origóból induló (jövőbeli) fénykúpnak a belsejében van, és minden az origóból induló a fénykúpban haladó egyenest legalább egy pontban metsz) létezik **Specrel**$^-$-nak modellje úgy, hogy abban valamelyik m megfigyelőre épp $MS_t^m = H$. Lásd [And-Mad-Né]. Mivel nem a hiperboloid az egyetlen ilyen 'konvex' tulajdonságú halmaz, ezért ezekhez a halmazokhoz tartozó modellek mind példák a fenti állításra. □

Ha az **Ax∃∀Twp**

$$(\exists m \in Obs)(\forall a, b, c \in Obs)(\forall p, q, r \in F^n)(\, p, q, r \text{ nincs egy egyenesen,}$$

$$\{a, c\} \subset w_m(p), \{b, a\} \subset w_m(q), \{b, c\} \subset w_m(r)$$

$$\Longrightarrow |f_{mc}(r)_t - f_{mc}(p)_t| > |f_{ma}(q)_t - f_{ma}(p)_t| + |f_{mb}(r)_t - f_{mb}(q)_t|\,)$$

axiómával megfogalmazzuk azt, hogy van olyan megfigyelő, aki minden megfigyelő hármomszögben ikerparadoxont lát, akkor természetesen adódik az a kérdés, hogy ebből az axiómából következik-e az ikerparadoxon. A kérdésre adott válasz igenlő. Azaz, ha valaki úgy látja, hogy az ikerparadoxon igaz, akkor mindenki úgy látja. Ez abból következik, hogy az ikerparadoxonos axiómákban a következtetés utáni kifejezés csak látszólag függ az m megfigyelőtől.

Az **Ax∃Twp**

$$(\forall m \in Obs)(\exists a, b, c \in Obs)(\forall p, q, r \in F^n)(\, p, q, r \text{ nincs egy egyenesen,}$$

$$\{a, c\} \subset w_m(p), \{b, a\} \subset w_m(q), \{b, c\} \subset w_m(r)$$

$$\Longrightarrow |f_{mc}(r)_t - f_{mc}(p)_t| > |f_{ma}(q)_t - f_{ma}(p)_t| + |f_{mb}(r)_t - f_{mb}(q)_t|\,)$$

axiómával megfogalmazzuk azt, hogy minden megfigyelő lát olyan megfigyelőket akik ikerparadoxon szituációban vannak.

Ugyancsak természetesen adódik az a kérdés is, hogy igaz-e, hogy a fenti axiómából is következik az ikerparadoxon, lásd [And-Mad-Né] Question 4.2.15 és Question 4.2.16. Erre a kérdésre ad negatív választ a következő állítás:

Következmény 3.3.3

$$\mathbf{Specrel}^- \not\models \mathbf{Ax\exists Twp} \Longrightarrow \mathbf{AxTwp}$$

biz. Az ikerparadoxon karakterizációjának bizonyításából kicsit több is kiderül, mint amit a 3.1.1 tétel állít, ugyanis az is látszik belőle, hogy egy megfigyelő pontosan akkor lát három másik megfigyelőt ikerparadoxon szituációban, ha azok konvex helyzetben vannak. Így a fenti állítás abból adódik, hogy abból hogy három pont MS_t^m-n 'konvex' helyzetben van, még nem következik, hogy MS_t^m 'konvex'. □

Az állítas intuitív átfogalmazása az, hogy abból, hogy mindenki lát valahol ikerparadoxon szituációt még nem következik, hogy igaz az ikerparadoxon. Sőt a bizonyításból az is látszik, hogy előfordulhat, hogy az ikerparadoxont sértő szituációk kevesen vannak az összeshez képest. Például ha egy 'konvex' MS_t^m-t csak egy pontban változtatunk meg, (úgy, hogy még mindig messen minden, az m megfigyelő fénykúpjában haladó egyenest) akkor az ikerparadoxon csak akkor sérül, ha a három benne résztvevő megfigyelő egyike pont ebben az irányban halad.

A 3.3.3 állítás bizonyításában utaltunk rá, hogy a 3.1.1 tétel bizonyításának csekély módosításával, hasonló karakterizáció adható az **Ax∃Twp** axiómára is. Ez az a karakterizáció egy alternatív bizonyítást ad a [And-Mad-Né]-beli Proposition 4.2.14-re, továbbá megválaszolja az ugyancsak [And-Mad-Né]-beli Question 4.2.10-et. Mivel a bizonyítások nagyon hasonlóak a fenti következmények bizonyításaihoz, ezért a részletekre ezen dolgozatban nem térünk ki.

4. fejezet

Az AxTwp gyorsuló megfigyelők esetén (kitekintés)

Ebben a részben vázoljuk, hogy hogyan általánosítható az ikerparadoxon (és az alapaxióma rendszer), hogy ne csak inerciális megfigyelők tárgyalására legyen alkalmas. Továbbá rávilágítunk néhány nehézségre, ami a tárgyalás során elő-kerül.

4.1. Az AxTwp átfogalmazása gyorsuló megfigyelőkre

Igaziból gyorsuló megfigyelők esetén lenne érdekes tárgyalni az ikerparadoxont, mert ott lehetőség nyílna arra, hogy ne három, hanem két megfigyelőről szóljon, mint ahogy azt általában fogalmazni szokás. Ehhez nem kell mást tenni, mint az Obs reláció mellé felvenni egy $IObs$ relációt, mely a megfigyelők közül kijelöli azokat, amelyeket inerciális megfigyelőnek tekintünk. Így az ikerparadoxon a következő alakban fogalmazható meg:

AxTwpAcc

$$(\forall m, a \in IObs)(\forall c \in Obs \setminus IObs)(\forall p, r \in F^n)(\, p \neq q, \{a, c\} \subset w_m(p),$$

$$\{a, c\} \subset w_m(r) \Longrightarrow |f_{mc}(r)_t - f_{mc}(p)_t| > |f_{ma}(r)_t - f_{ma}(p)_t|\,)$$

Ahhoz, hogy az Obs és $IObs$ relációk tényleg azt jelentsék amit szeretnénk, a **Specrel**$^-$-ban szereplő axiómákat csak az $IObs$-beli megfigyelőkre követeljük meg. Persze mondanunk kell valamit a többi megfigyelőről is, ezt egy **Axg** nevet viselő axiómával tesszük meg, melyet itt nem részletezünk, de megtalálható a [And-Mad-Né-Szé] cikkben. Az **Axg** intuitív jelentése az, hogy minden megfigyelő világképe kis környezetben olyan mint egy inerciálisé.

Az ikerparadoxon gyorsuló megfigyelők esetén való tárgyalásának igénye már korábban is felvetőfött, lásd [Mad] pp.93-99 illetve [And-Mad-Né] pp.143-150.

4.2. Az AxTwp tárgyalásának nehézségei a gyorsuló esetben

Mivel elsőrendű nyelven a valós számok teste nem axiómatizálható izomorfizmus erejéig, ezért szeretnénk a tárgyalásunkat továbbra is tetszőleges rendezett test fölött folytatni. A gyorsuló megfigyelők tárgyalásánál pedig az olyan analízisbeli fogalmak, mint a folytonosság, deriválhatoság, stb. elkerülhetetlenek. Annak ellenére, hogy ezek a fogalmak minden gond nélkül általánosodnak tetszőleges rendezett testre, nem maradnak olyan erősek. A legtöbb gond ebből fakad. Egy példával illusztrálnánk is, hogy milyen jellegű problámát jelent ez: Azt, hogy a gyorsuló esetben csak a valós számok teste fölött marad érvényben a 3.3.1 állítása az okozza, hogy a többi rendezett test nem összefüggő a rendezés topológiában, így vannak folytonos (sőt, lokálisan konstans) ugró függvények. Ezért semmilyen az idő múlására tett folytonossági (akármilyen simasági) feltevéssel sem tudjuk megtiltani azt, hogy egy megfigyelő órája hirtelen előre (vagy vissza) ugorjon valamennyit. Emiatt teljesen megbolondulhatnak egy nem inerciális megfigylő órái. [Szé] arról szól majd, hogy hogyan lehet mégis elsőrendű logikában kezelni az ilyen jelenségeket. Ehhez felhasználja a Handbook of Mathematical Logic-ban lévő S. Feferman által írt fejezet módszereit.

Az ikerparadoxon mint jelenség, igen szoros kapcsolatban áll a gyorsulással. Ám ez a kapcsolat nem teljesen triviális hiszen, ha mozgó iker tovább távolodik (nem gyorsulva) majd visszaforduláskor ugyanazt a fordulási manővert hajtja végre, akkor az az időeltérés, amit a visszaérkezéskor az ikertestvéréhez képest mér, több lesz, mintha nem távolodott volna olyan sokat, holott látszólag ugyan annyit gyorsult.

Egy további nehézség, és ez igazából már nem is a gyorsuló megfigyelők, hanem az általános relativitáselmélet felé való továbbhaladás nehézsége az, hogy nem szeretnénk megkövetelni, hogy minden megfigyelő az egész F^n-et használja koordináta-rendszernek, hanem annak csak egy (nyilt) részét. Azt szeretnénk, hogy a modelljeink valamilyen értelemben lokálisak legyenek. Ez már elég előrehaladott stádiumban van, lásd [Mad-To].

Mind a két lépés, a gyorsuló megfigyelőkről való explicit beszéd lehetővé tétele és a modellek lokalizálása, az általános relativitáselmélet felé haladás (a speciális relativitás elmélet felöl). [Szé]-ben ezt a két irányt szeretnénk ötvözni.

Irodalomjegyzék

[And-Mad-Né] H. Andréka, J. X. Madarász, I. Németi. On the logical structure of relativity theories. Research report, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungar. Acad. Sci., Budapest, 2002 With contributions from A. Andai, G. Sági, I. Sain, Cs. Tőke. http://www.math-inst.hu/pub/algebraiclogic/Contents.html. 1312 pp.

[And-Mad-Né-2] H. Andréka, J. X. Madarász, I. Németi. Logical axiomatizations of space-time; samples from the literature János Bolyai Conference on Hyperbolic Geometry, Proceedings. Kluwer Academic Publishers, megjelenés alatt. Budapest, 2003.

[And-Mad-Né-Szé] H. Andréka, J. X. Madarász, I. Németi, G. Székely. A logical investigation of inertial and accelerated observers in flat space-time. Kalmár Workshop on Logic and Computer Science, pp.45-57. Szeged, 2003.

[And-Mad-Szé] H. Andréka, J. X. Madarász, G. Székely. Seminar notes, 2003. Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Budapest.

[Fe] S. Feferman: Theories of finite type related to mathematical practice. D4 fejezet a Handbook of Mathematical Logic konyvben, pp.913-971. North-Holland, 1977.

[Mad] J. X. Madarász. *Logic and Relativity (in the light of the definability theory).* PhD thesis, ELTE, Budapest, http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Contents.html., 2002.

[Mad-To] J. X. Madarász, Cs. Tőke. Partial relativity theories. Research report, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungar. Acad. Sci., Budapest, July 2003.

[Szé] G. Székely. Gyorsuló megfigyelők és az ikerparadoxon. Készülő szakdolgozat, ELTE TTK 2003.