9. A3 Matematika gyakorlat

1. Számoljuk ki a következő vektormezők (vektor-vektorfüggvények) divergenciáját és rotációját:

   $$\text{a.)}\ \mathbf{v}(x,y,z) = x^2\,\mathbf{i} + y^2\,\mathbf{j} + z^2\,\mathbf{k} \qquad \text{b.)}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\,\mathbf{i} + yz\,\mathbf{j} + zx\,\mathbf{k}$$

   $$\text{c.)}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = u(x,y)\,\mathbf{i} + v(x,y)\,\mathbf{j}$$

2. Adjuk meg a következő vektormezők potenciál függvényeit, ha léteznek:

   $$\text{a.)}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2y\,\mathbf{i} + (2x+2y)\,\mathbf{j} \qquad \text{b.)}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$$

   $$\text{c.)}\ \mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

3. Számítsuk ki az alábbi vektormezőknek a megadott görbementi integrálját:

   a.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; $A(1,2,-1)$ kezdőpontú és $B(2,1,1)$ végpontú szakasz.

   b.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; $x^2+y^2=2,\ z=0$ egyenletrendszerű kör.

   c.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 1)$.

4. Számítsuk ki az alábbi vektormezőknek felületi integrálját a megadott felületdarabok mentén:

   a.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = y\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(u,v) = (u+2v)\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + (u-v)\,\mathbf{k},\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$

   b.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xy\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k},\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi/2$.

5. A Stokes illetve Green tételek segítségével számítsuk ki az alábbi vektormezőknek a megadott görbementi integrálját:

   a.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y+z)\,\mathbf{i} + (x+z)\,\mathbf{j} + (x+y)\,\mathbf{k}$; ; $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} +\ \mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

   b.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\,\mathbf{i} + xz\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$; $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k}$ $(0 \le t \le 2\pi)$

   c.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = y^2x\,\mathbf{i} + x^2y\,\mathbf{j}$; $A(0,0), B(1,0), C(1,1), D(0,1)$ csúcspontú négyzet.

6. A Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével számítsuk ki az vektormezőknek felületi integrálját a megadott felületdarabok mentén:

   $$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = yz\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}; \quad \mathbf{r}(u,v) = uv\,\mathbf{i} + v^2\,\mathbf{j} + u^2\,\mathbf{k},\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$$

HF Számítsd ki az alábbi vektormezőnek a megadott görbementi integrálját:

c.) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (y^2+x^2)\,\mathbf{i} + (x+y)^2\,\mathbf{j}$; $A(0,0), B(1,0), C(0,1)$ csúcspontú háromszög.