9. A2b Matematika gyakorlat

1. Határozzuk meg a következő függvényeknek a megadott ponton átmenő szintfelületeinek az érintő síkját.

$$\text{a.)}\ f(x,y,z) = yx^2z + xy^2z \quad P_0(1,1,1) \qquad \text{b.)}\ g(x,y,z) = xe^y - z \quad P_0(3,0,3)$$

2. Határozzuk meg az $x^2+3y^2+2z^2 = 9$ felület azon pontjait, ahol az érintősík párhuzamos a $2x + 3y + 4z = 2$ síkkal.

3. Írjuk fel a következő többváltozós függvények a P_0 ponthoz tartozó teljes differenciálját, lineáris közelítését és érintősíkját:

$$\text{a.)}\ f(x,y) = yx^2 + xy^2 \quad P_0(2,1) \qquad \text{b.)}\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad P_0(3,4)$$

$$\text{c.)}\ g(x,y) = e^x y^2 - e^y x^2 \quad P_0(2,1)$$

4. Vizsgáljuk lokális szélsőértékek szempontjából az alábbi függvényeket:

$$\text{a.)}\ f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 \qquad \text{b.)}\ g(x,y) = e^{xy}$$

$$\text{c.)}\ h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3x + 2z + 4$$

$$\text{d.)}\ f(x,y) = x^4 + y^4 \qquad \text{e.)}\ g(x,y) = x^3y^3$$

5. Határozzuk meg az alábbi f függvény abszolút maximumát és minimumát a H tartományon:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6, \quad H = \{\, (x,y)\ :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 5 - x \,\}$$

6. A folytonosan deriválható f függvény értelmezési tartományának egyik belső pontjában a deriváltjai $f'_x = f'_y = f'_z = 0$, $f''_{xx} = f''_{yy} = f''_{zz} = -1$, $f''_{xy} = f''_{yz} = 0$, $f''_{xz} = c$. A c paraméter milyen értékei mellett lesz az f függvénynek biztosan szigorú maximuma az adott pontban?

7. Számoljuk ki a következő többváltozós összetett függvények megadott parciális deriváltjait láncszabály segítségével:

$$\text{a.)}\ f(x,y) = x^2 - y^2,\ \ x(r,\varphi) = r\cos\varphi,\ \ y(r,\varphi) = r\sin\varphi; \quad \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\text{b.)}\ f(x,y) = xe^y,\ \ x(t) = \sin t,\ \ y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}; \quad \frac{\partial f}{\partial t}$$

8. Legyen $f(x,y,z)$ függvény deriválható a $(1,0,0)$ pont egy környezetén, ahol $\nabla f(1,0,0) = [1,2,3]$. Tekintsük az $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ paraméterezésű görbét. Határozzuk meg a $\frac{\partial f}{\partial t}$ deriváltat a $t = 0$ pontban.