6. A2b Matematika gyakorlat

1. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisban:

$$\text{a.)}\ \varphi(\mathbf{x}) = [4x_1 - 2x_2, 6x_1 - 3x_2] \quad \mathbf{b}_1 = [2,3], \mathbf{b}_2 = [1,2]$$

$$\text{b.)}\ \varphi(\mathbf{x}) = [2x_1 - x_2, x_2, x_2 - x_3] \quad \mathbf{b}_1 = [1,0,0], \mathbf{b}_2 = [1,1,0], \mathbf{b}_3 = [1,1,1]$$

2. Oldjuk meg Cramer szabállyal a következő egyenletrendszereket:

$$\text{a.)}\ \begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 11 \end{aligned} \qquad \text{b.)}\ \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét:

$$\text{a.)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b.)}\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Számítsuk ki a következő 2×2-es mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\text{a.)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b.)}\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{c.)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{d.)}\ \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Számítsuk ki a következő 3×3-as mátrixok sajátértékeit és sajátvektorait:

$$\text{a.)}\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{b.)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{c.)}\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{d.)}\ \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az A mátrixnak a $\mathbf{v}$ vektor sajátvektora és a hozzá tartozó sajátérték λ, akkor az A^n mátrixnak is sajátvektora a $\mathbf{v}$ vektor és a hozzá tartozó sajátérték λ^n.

7. Bizonyítsuk be, hogy ha az A invertálható mátrix, akkor A^{-1} sajátértékei az A sajátértékeinek reciprokai és A^{-1} sajátvektorai megegyeznek A sajátvektoraival.