

4. A2b Matematika gyakorlat

1. Lineárisan függetlenek-e a következő vektorok? Ha igen, akkor bázist alkotnak-e?

$$\text{a.) } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{b.) } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{c.) } \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. Írjuk fel a \mathbf{v} és \mathbf{a} vektor koordinátáit a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, (\mathbf{b}_3)$ bázisban:

$$\text{a.) } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{b.) } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$\text{c.) } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3. Alteret alkotnak-e az alábbi halmazok? Ha igen, adjuk meg az altér egy bázisát és dimenzióját.

$$\text{a.) } W = \{(a, b, c) : a + b + c = 1\} \quad \text{b.) } W = \{(a, b, c) : abc = 0\}$$
$$\text{c.) } W = \{(a, b, c) : a + b + c = 0\} \quad \text{d.) } W = \{(a, b, c) : a + 2b = c\}$$
$$\text{e.) } W = \{(a, b, c, d) : 2a + b = c, b + c = d\} \quad \text{f.) } W = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{Z}\}$$

4. Bizonyítsuk be, hogy alsó (felső) háromszögmátrixok szorzata is alsó (felső) háromszögmátrix.

5. Adjuk meg a következő mátrixok LU illetve PLU felbontását.

$$\text{a.) } \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{b.) } \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 8 \\ 2 & 5 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{c.) } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

6. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket LU felbontás segítségével.

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 & x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 5 & x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 8x_1 + 6x_2 + 15x_3 &= 15 & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$