4. A1b Analízis gyakorlat

0. (a) Számítsd ki az $A(1,4,-2)$ pontból a $B(2,2,-3)$ mutató $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinátáit!
   (b) Számítsd ki a $P(1,4,9)$ és $Q(5,-10,3)$ pontok F felező H_P és H_Q harmadoló pontjait!
   (c) Számítsd ki az $R(1,3,-1)$ és $S(2,-2,3)$ pontok $d(R,S)$ távolságát!

1. Az $ABC\triangle$ háromszög csúcsai: $A(3,2,5)$, $B(3,2,-5)$, $C(-5,0,3)$. Számítsd ki a háromszög területét és súlyvonalainak hosszát!

2. Egy tetraéder csúcsai: $A(2,-4,3)$, $B(1,-4,4)$, $C(-3,2,0)$ és $D(2,0,x)$. Hogyan kell megválasztani x-et, hogy a tetraéder térfogata 5 egység legyen?

3. A $P(1,0,u)$, $Q(2,-1,3)$, $R(2,0,v)$ és $S(1,1,-1)$ pontok milyen u és v értékek esetén lesznek egysíkúak?

Tétel: A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő és a $\vec{n}=[A,B,C]$ (nem nulla) vektorra merőleges sík egyenlete:

$$Ax+By+Cz=Ax_0+By_0+Cz_0.$$

4. Írd fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,1,5)$ ponton és merőleges az $\vec{n}=[3,2,-4]$ vektorra!

5. Ha nincsenek egy egyenesen, akkor írd fel a következő pontok által meghatározott sík egyenletét!
   a.) $A(0,-1,2)$, $B(2,-1,1)$, $C(4,3,-2)$ b.) $P(-2,3,1)$, $Q(0,5,2)$, $R(-4,1,0)$

6. Írd fel annak a síknak az egyenletét, amely átmegy a $P(2,3,-1)$ ponton és párhuzamos a $3x-y+3z+4=0$ egyenletű síkkal!

7. Határozd meg a $2x-3y+z+6=0$ egyenletű síknak a tengelyekkel alkotott metszéspontjait!

8. Adj meg a z tengelyen olyan pontot, amelyik egyenlő távolságra van a $P(1,-3,7)$ és $Q(5,7,-5)$ pontoktól!

Tétel: A $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő és a $\vec{v}=[a,b,c]$ (nem nulla) vektorral párhuzamos egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$.

9. Írd fel az alábbi egyenesek paraméteres egyenleteit!
   (a) Átmegy az $A(-3,4,2)$ ponton és párhuzamos a $\vec{v}=[1,-2,4]$ vektorral.
   (b) Átmegy a $P(1,4,3)$ és a $Q(2,6,1)$ pontokon.
   (c) Merőleges az $\vec{a}=[-2,3,1]$ és a $\vec{b}=[2,0,1]$ vektorokra és átmegy az $R(3,-5,2)$ ponton.

Tétel: A $P(x_0,y_0,z_0)$ pont és az $Ax+By+Cz+D=0$ egyenletű S sík, valamint a P pont és az e egyenes illetve e és (az e-vel nem párhuzamos) f egyenesek távolsága a következő:

$$d(P,S)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad d(P,e)=\frac{|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{QR}|}{|\overrightarrow{QR}|},\quad d(e,f)=\frac{|(\vec{e}\times\vec{f})\cdot\vec{c}|}{|\vec{e}\times\vec{f}|}$$

ahol Q és R az e egyenes két tetszőleges (különböző) pontja, illetve $\vec{e}$ az e egyenes egy irányvektora $\vec{f}$ pedig az f egyenes egy irányvektora $\vec{c}$ pedig egy olyan vektor, ami a két egyenes egy-egy pontját köti össze.

10. Számold ki a következő alakzatok egymástól vett távolságát: $S: 3x+4y-z+2=0$, $e: x-2=2y+1=3z+2$, $P(1,-2,3)$.

Tétel: Legyen $\vec{e}$ az e egyenes egy irányvektora, $\vec{f}$ pedig az f egyenes egy irányvektora, $\vec{n}$ az S sík egy normálvektora, ekkor hajlásszögük a következő képletekkel számolhatók:

$$\cos(e\sphericalangle f)=\frac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}||\vec{f}|},\qquad \sin(e\sphericalangle S)=\frac{\vec{e}\cdot\vec{n}}{|\vec{e}||\vec{n}|}.$$

11. Számold ki a következő alakzatok egymással bezárt szögét: $S: 4x+y-2z+2=0$, $e: 2x-3=y+1=z+2$, $f: x-3=y+1=4z+2$.

HF. Írd fel az $4x+3y-z+42=0$ egyenletű S síkra merőleges és a $P(1,3,2)$ ponton átmenő e egyenes egyenletét! Hol metszi az e egyenes a síkot? Mi a P pont S síkra vett tükörképe?