10. A2b Matematika gyakorlat

1. Számoljuk ki a következő függvények deriváltját és Jacobi determinánsát.

$$\text{a.)}\ x(r,\phi) = r\cos\phi, \quad y(r,\phi) = r\sin(\phi)$$

$$\text{b.)}\ x(r,\phi,m) = r\cos\phi, \quad y(r,\phi,m) = r\sin(\phi), \quad z(r,\phi,m) = m$$

$$\text{c.)}\ x(r,\phi,\theta) = r\sin\theta\cos\phi, \quad y(r,\phi,\theta) = r\sin\theta\sin\phi, \quad z(r,\phi,\theta) = r\cos\theta$$

2. Számoljuk ki a következő többváltozós összetett függvények megadott parciális deriváltjait láncszabály segítségével:

$$\text{a.)}\ f(x,y) = x^2 - y^2,\ \ x(r,\varphi) = r\cos\varphi,\ \ y(r,\varphi) = r\sin\varphi; \quad \frac{\partial f}{\partial r},\ \frac{\partial f}{\partial \varphi}$$

$$\text{b.)}\ f(x,y) = xe^y,\ \ x(t) = \sin t,\ \ y(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}; \quad \frac{\partial f}{\partial t}$$

3. Legyen $f(x,y,z)$ függvény deriválható a $(1,0,0)$ pont egy környezetén, ahol $\nabla f(1,0,0) = [1,2,3]$. Tekintsük az $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$ paraméterezésű görbét. Határozzuk meg a $\frac{\partial f}{\partial t}$ deriváltat a $t = 0$ pontban.

4. Számoljuk ki a következő kettős integrálokat:

$$\text{a.)}\ \int_0^2\int_0^3 x^2y\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{b.)}\ \int_{-1}^1\int_0^1\int_0^2 e^y - xz\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\text{c.)}\ \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

5. Számoljuk ki a következő függvények integrálját a megadott tartományokon:

$$\text{a.)}\ \iint_A \sin x\sin y \qquad A = \{\ (x,y)\ :\ 0 \le x \le \pi,\ \ 0 \le y \le \pi\ \}$$

$$\text{b.)}\ \iint_A e^y x \qquad A = \{\ (x,y)\ :\ 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le x\ \}$$

$$\text{c.)}\ \iint_A x^2 \qquad A = \left\{\ (x,y)\ :\ -1 \le x \le 1,\ \ 2x^2 \le y \le x^2+1\ \right\}$$

6. Határozzuk meg az integrálás határait, ha fölcseréljük az integrálás sorrendjét a $\int_{-1}^1\int_{x^2}^4 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ integrálban.