Noen mindre kjente problemer i kombinatorisk tallteori

Paul Erdös
Mathematical Institute of
the Hungarian Academy of Sciences
Budapest
Ungarn

Innledning

Gjennom mitt lange liv har jeg publisert mange arbeider om kombinatorisk tallteori, og i et av dem har jeg faktisk skrevet at dette er det emnet som står mitt hjerte (eller rettere sagt: min hjerne) nærmest. I denne artikkelen vil jeg diskutere en del mindre kjente problemer. Noen av dem har ikke tidligere vært publisert.

La meg innledningsvis bare nevne ett av de bedre kjente problemene innenfor emnet. Den interesserte leser vil kanskje ønske å finne ut mer mer om det.

For mer enn 50 år siden viste van der Waerden at om de positive hele tall deles i to (eller mer generelt r), vil en av dem inneholde aritmetiske følger av vilkårlig stor lengde. (En aritmetisk følge av lengde k består av k tall $a+d$, $a+2d$, $\ldots$, $a+kd$.)

Dette merkverdige resultat kan også formuleres slik: Til hvert naturlig tall n fins et minste naturlig tall $f(n)$ slik at om mengden $\{1,2,\ldots,f(n)\}$ deles i to delmengder, så vil en av dem inneholde en aritmetisk følge av lengde n.

Van der Waerdens estimat for $f(n)$ syntes ikke å være særlig gode. Derfor fremsatte Paul Turán og jeg følgende hypotese for mer enn 45 år siden: Til hvert $\varepsilon>0$ og hvert naturlig tall k fins et tall n_0 slik at om $n\geqq n_0$ og $1\leqq a_1<\ldots<a_l\leqq n$ (hver a_i er et naturlig tall), og $l\geqq\varepsilon n$, så vil mengden $\{a_1,\ldots,a_l\}$ inneholde en aritmetisk følge av lengde k.

Denne hypotese var fremdeles uløst i 1972, og jeg tilbød \$1000 for et bevis eller et motbevis.

Kort etter viste E. Szemerédi at hypotesen var sann. Hans bevis er et mesterlig kombinatorisk resonnement der idéer som tidligere hadde hatt flere anvendelser, ble benyttet. Senere fant H. Fürstenberg et annet bevis som bruker metoder fra ergodeteori.

Et gammelt uløst problem i tallteori er om primtallene inneholder aritmetiske følger av vilkårlig stor lengde.

For å prøve å vise denne hypotese stilte jeg følgende mer generelle problem: Anta gitt hele tall

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots \quad \text{og at} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{-1} = \infty .$$

Vis at $\{a_1, a_2, \ldots\}$ inneholder aritmetiske følger av vilkårlig stor lengde. Dette er et mer generelt problem, siden Euler har vist at

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n^{-1} = \infty ,$$

når p_n betegner det n-te primtall.

Jeg antar hypotesen om $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ er vanskelig, og tilbyr \$3000 for den som kan bevise eller motbevise den.

Jeg har ofte sagt at jeg ikke venter å måtte betale dette beløp og at jeg derfor »should leave some money for it before I leave«. For mer om de ovennevnte problemene, viser jeg til arbeidene [3], [4], [5] og [8].

For at denne artikkelen ikke skal bli for lang, vil jeg i det følgende ofte overlate til leseren å verifisere enkelte detaljer.

§1. Et partisjonsproblem

Følgende spørsmål dukket opp gjennom en samtale mellom avdøde Silverman og meg selv for cirka tre år siden: Kan en dele mengden av de naturlige tall inn i k delmengder (for noen k), slik at summen av to forskjellige tall fra samme delmengde ikke er et kvadrattall?

Her er en grafteoretisk formulering: La G være en graf hvis hjørner består av de naturlige tall. La hjørnene m og l være forbundet hvis og bare hvis $m+l=n^2$. Vis at denne grafen har fargetall uendelig (se [7], side 126-127).

La $1 \leqq a_1 < \ldots\ldots < a_r \leqq n$, slik at $a_i + a_j$ aldri er et kvadrattall når $i \neq j$. La $h(n) = \max r$, dvs. $h(n)$ angir det maksimale antall elementer $a_1, \ldots, a_r$ med ovennevnte egenskap. Prøv å bestemme $h(n)$, eller å finne et verdiområde $h(n)$ må ligge innenfor! Det kan lett vises at $h(n) \geqq \dfrac{n}{3}$. (Velg f.eks. $a_k = 3k-2$.) Vi har ikke funnet noen bedre nedre grense, og har heller ikke kunnet avgjøre om $h(n) < (\frac{1}{3}+\varepsilon)n$. Vi kan ikke engang utelukke at det fins en uendelig følge $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots\ldots$ med tetthet $> \frac{1}{3}$, som er en endelig union av aritmetiske følger og slik at $a_i + a_j$ ikke er et kvadrattall om $i \neq j$. Med tettheten av $\{a_n\}$ menes: La A_k være antall a_i slik at a_i

$\leq k$. Øvre og nedre tetthet av $\{a_n\}$ er da øvre og nedre grensetall for tallfølgen $k^{-1}A_k$. Hvis øvre og nedre tetthet er like, kalles dette tallet for tettheten av $\{a_n\}$. F.eks. vil $\{a_n\}$ ha tetthet $\frac{1}{2}$ dersom $a_n = 2n$.

Det kan tenkes at vi overser en enkel ide. Kvadrattallene kan selvsagt erstattes med andre tallmengder som leder til nye typer problemer.

K. Alladi, V. E. Hoggatt og jeg har vist at de hele tallene kan deles i to mengder på en entydig måte, slik at summen av to forskjellige tall fra samme delmengde aldri er et Fibonaccitall. (Fibonaccitallfølgen $\{t_n\}$ er gitt ved at $t_1 = t_2 = 1$ og $t_n = t_{n-1} + t_{n-2}$ for $n \geqq 3$. Det gir følgen 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Flere andre problemer studeres i samme arbeid [1].

§2. Om summer av påfølgende ledd i en tallfølge

Et velkjent resultat i elementært tallteori sier at antall løsninger u og v i hele positive tall av likningen

$$n = \sum_{t=u+1}^{v} t$$

er lik antall odde divisorer i n. For eksempel hvis $n = 30$, har vi 3 løsninger: $30 = 9 + 10 + 11$ og $30 = 6 + 7 + 8 + 9$ og $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$, og 30 har 3 odde divisorer, nemlig 3, 5 og 15.

La $A = \{a_i\}$ være en følge hele tall der $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots$, og la $f(n, A)$ betegne antall løsninger i u og v av likningen

$$n = \sum(A; u, v) = \sum_{i=u+1}^{v} a_i$$

For flere år siden spurte jeg meg selv: Fins det en følge A slik at $f(n, A) \to \infty$ når $n \to \infty$? Jeg har aldri funnet noen måte å angripe dette problemet på, og kan ikke engang vise at A kan velges slik at $f(n, A) \geqq 2$ fra et visst n av.

L. Moser og jeg har fremsatt følgende hypotese. Anta at $a_i = p_i$ (primtall nr. i). Da vil $f(n, A)$ være ubegrenset og $\{n: f(n, A) > 0\}$ vil ha positiv tetthet. Det vil kanskje ikke overraske leseren at vi ikke har hatt noen suksess med disse problemene. Jeg er sikker på at de er vanskelige.

På den annen side gir et enkelt telleresonnement at hvis $\{n: f(n, A) > 0\}$ har positiv tetthet, så må

$$\text{(1)} \qquad \liminf \frac{a_k}{k \log k} < \infty$$

Leseren kan selv prøve å vise at $f(n, A)n^{-1} \to 0$ når $n \to \infty$, hvis (1) ikke holder.

Nå over til noen spørsmål som dukket opp mens jeg skrev dette avsnittet. Fins det for alle $c > 0$ en følge $A = \{a_k\}$ der $a_k > ck \log k$ og slik at $\{n: f(n, A) > 0\}$ har positiv nedre tetthet? Jeg antar svaret er »ja«, og at beviset ikke vil være svært vanskelig.

La oss nå anta $f(n, A) > 0$ fra et visst n av. Hva kan da sies om tallet $A(x) = \sum_{a_i < x} 1$? (D.v.s. $A(x)$ er antall a_i slik at $a_i < x$.) Det burde være mulig å vise at $\lim\sup A(x)\left(\frac{x}{\log x}\right)^{-1} = \infty$.

Gjennom problemene til G. E. Andrews og P. A. MacMahon som drøftes i neste avsnitt, ble jeg ledet til følgende spørsmål: Fins det en absolutt konstant c slik at om $1 \leqq a_1 < \ldots\ldots < a_l \leqq n$, så vil det eksistere et tall t, der $n < t < cn$, som ikke er på formen

$$\sum(u, v) = \sum_{i=u+1}^{v} a_i \;?$$

Vi kan formulere spørsmålet mer presist som et ekstremal-problem: Bestem det største hele tall $H(n)$ slik at det fins en følge $1 \leqq a_1 < \ldots < a_l \leqq n$ med den egenskap at hvert t, der $n < t \leqq H(n)$, er på formen $t = \sum(u, v)$.

Noen flere ekstremalproblemer. La $A = \{a_i\}_{i=1}^{t}$, x og t være slik at $1 \leqq a_1 < \ldots < a_t \leqq x$, og la $f_x(t, A)$ være antall elementer i $\{1, \ldots\ldots, x\}$ som ikke er på formen $\sum(u, v) = \sum_{i=u+1}^{v} a_i$. Bestem $f_x(t) = \max_A f_x(t, A)$. For små t, vil $f_x(t) = \binom{t+1}{2}$, men for store t kan det være mer vanskelig å bestemme $f_x(t)$ eller finne gode anslagsverdier. For eksempel kunne en prøve å bestemme det minste tall $t = t_0(x)$ slik at $f_x(t) < \binom{t+1}{2}$.

Et beslektet problem lyder slik: Bestem den største mulige verdi for t, slik at det fins en følge $1 \leqq a_1 < \ldots < a_t \leqq x$ slik at alle summene $\sum(u, v)$, $1 \leqq u \leqq v \leqq t$, er forskjellige. La $g(x)$ betegne den maksimale t-verdi. Det er lett å se at $g(x) > c\, x^{\frac{1}{3}}$ for passende konstant c. Det ville være av interesse å oppnå gode øvre og nedre grenser for $g(x)$. Jeg tviler på at $g(x) > c\, x^{\alpha}$ kan holde for alle x hvis α er nær 1, og vil se mer på dette spørsmålet i neste avsnitt.

La nå $g(x, A)$ betegne antall løsninger av ulikheten

$$\sum_{i=u+1}^{v} a_i < x\,.$$

Det er ikke vanskelig å vise at

$$\sum_i \frac{1}{a_i} = \infty\,,$$

hvis $g(x, A) > cx$ holder for uendelig mange x.

Det er tilstrekkelig å vise denne påstanden når A har tetthet 0, siden det er vel kjent at $n\, d_n \to 0$ når $n \to \infty$ dersom

$$\sum_1^\infty d_n < \infty \quad \text{og} \quad d_n \to 0 \text{ monotont} .$$

Betrakt nå summer på formen

$$\sum_{u+1}^{v} a_i < x, \quad \text{der} \quad \frac{x}{2^{k+1}} < a_v < \frac{x}{2^k} . \tag{2}$$

Hvis $a_u \geqq \frac{x}{2^{k+1}}$, fins det høyst 2^{k+1} mulige valg for a_u, når a_v er gitt. Er derimot a_u gitt, og $a_u < \frac{x}{2^{k+1}}$, så fins det høyst 2^{k+1} valg for a_v, dersom ulikheten (2) skal holde. Altså er antall par (u, v) slik at (2) holder begrenset av $2^{k+1} A\left(\frac{x}{2^k}\right)$

Av (2) følger nå

$$g(x, A) < \sum_{2^k \leqq x^{\frac{1}{2}}} 2^{k+1} A\left(\frac{x}{2^k}\right) + (A(x^{\frac{1}{2}}))^2 \tag{3}$$

der siste ledd i (3) kommer fra summer hvor $a_v \leqq x^{\frac{1}{2}}$, og første ledd følger fra (2).

Siden A har tetthet lik 0, vil $(A(x^{\frac{1}{2}}))^2 = o(x)$, og et enkelt argument gir nå at

$$\sum_{2^k \leqq x^{\frac{1}{2}}} 2^{k+1} A\left(\frac{x}{2^k}\right) < 8x \sum_{a_i > x^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{a_i} = o(x) \quad \text{hvis} \quad \sum_i \frac{1}{a_i} < \infty .$$

Altså måtte $g(x, A) = o(x)$ som strider mot at $g(x, A) > cx$ for uendelig mange x. Motsigelsen viser at

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} = \infty .$$

(Uttrykket $F(x) = O(x)$ betyr at $F(x) \leqq cx$ for alle x, der c er en konstant som avhenger av F. Skrives derimot at $F(x) = o(x)$, skal det bety at $x^{-1}F(x) \to 0$ når $x \to \infty$).

Et noe mer komplisert argument enn ovenstående gir at hvis $g(x, A) > cx$ holder for alle x, så vil

$$\sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i} > c \log \log x .$$

Eksemplet $a_k = [k \log k]$ viser at dette resultatet er best mulig.

§3. MacMahons tallfølge og en hypotese av Andrews

P. A. MacMahon definerer en følge av hele tall $m_1 < m_2 < \ldots$ ved at $m_1 = 1$ og for $n > 1$ er m_n det minste positive tall som ikke er på formen

$$\sum_{i=1}^{l} m_i, \quad \text{der} \quad 1 \leqq i < l \leqq n-1 \, .$$

MacMahon var interessert i å vite hvilken størrelsesorden m_n har for store verdier av n.

G. E. Andrews fremsatte som hypotese at

$$m_n = (1+o(1)) \frac{n \log n}{\log \log n} \tag{4}$$

Hypotesen (4) synes å være vanskelig å avgjøre. Andrews stiller opp tre gjetninger i tillegg til (4):

i) $\lim\limits_{n\to\infty} m_n n^{-\Delta} = 0$ for et $\Delta < 2$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} m_n n^{-1} = \infty$

iii) $m_n < p_n$ for alle n, hvor p_n er det n-te primtall

La nå A betegne en følge av hele tall $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots$ slik at $a_k > k^{1+t}$ holder for uendelig mange k og hvor $t > 0$. Mengden av tall som kan skrives på formen $\sum(A, u, v) = \sum\limits_{k=u+1}^{v} a_k$ for ulike verdier av u og v, vil sannsynligvis ha nedre tetthet lik 0 og øvre tetthet ekte mindre enn 1. Selv om denne formodning skulle være feil (hvilket jeg betviler), er jeg likevel overbevist om at det må finnes uendelig mange naturlige tall som ikke er på formen $\sum(A, u, v)$, men jeg har ikke kunnet vise dette resultatet. Et positivt svar ville skjerpe Andrews hypotese i) nevnt ovenfor. En annen delvis skjerping av Andrews hypotese ville være å vise følgende: La $1 \leqq m_1 < m_2 \ldots$ være en følge av hele tall slik at $m_n \neq \sum\limits_{k=u+1}^{v} m_k$ for alle n, u og v. Vil følgen $\{m_1, m_2, \ldots\}$ ha nedre tetthet lik 0? Det er ikke vanskelig å vise at den øvre tettheten kan være $\frac{1}{2}$. (Det er en god øvelse for den interesserte leser å konstruere en slik følge.) Det kan likevel tenkes at den logaritmiske tettheten vil være lik 0, d.v.s. at

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{\log x}\right) \sum_{m_n < x} \frac{1}{m_n} = 0 \tag{5}$$

La igjen A være en følge av positive hele tall slik at alle summer på formen $\sum(A, u, v)$ er forskjellige. Jeg kan ikke engang vise at denne følgen har tetthet null.

Følgende resultat er imidlertid riktig for $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$:

TEOREM: Anta alle summer på formen $\sum(A, u, v)$ er forskjellige. Da fins konstanter c og C slik at $a_n > cn \log n$ for uendelig mange n, og

(6) $$\sum_{u<a_n<u^2} \frac{1}{a_n} < C$$

uansett hvilken verdi u har.

Bevis: Anta $a_n = o(n \log n)$. Ved enkel regning som overlates til leseren, kan det vises at

(7) $$\lim_{x\to\infty} \frac{g(A,x)}{x} = \infty$$

der $g(A,x)$ er antall løsninger av ulikheten $\sum(A,u,v)<x$. Men (7) er selvmotsigende siden vi antok at alle summene på formen $\sum(A,u,v)$ er innbyrdes forskjellige, og første del av teoremet er dermed vist.

Det gjenstår å vise (6). La a-ene mellom u og u^2 være gitt ved $u<a_i<\ldots<a_j<u^2$. Sett $\sum_{r,s}=a_r+\ldots+a_s$ når $i\leqq r\leqq s\leqq j$. Observer først at

(9) $$\sum_{\substack{r,s=i\\ r\leqq s}}^{j} \left(\frac{1}{\sum_{r,s}}\right) < 3 \log u$$

som følge av at tallene $\sum_{r,s}$ er innbyrdes forskjellige og $u<\sum_{r,s}<\frac{1}{2}u^4$. Observer videre at

(10) $$\sum_{r=i}^{j-k} \frac{1}{\sum_{r,r+k}} > \sum_{r=i+k}^{j} \frac{1}{ka_r} > \sum_{r=i}^{j} \frac{1}{ka_r} - \frac{1}{u}$$

Hvis derfor (6) ikke holder, får vi fra (10) at

(11) $$\sum_{r,s} \frac{1}{\sum_{r,s}} > C \sum_{k=1}^{u} \frac{1}{k} - 1 > 3 \log u$$

for $C\geqq 4$. Motsigelsen viser at (6) holder for $C=4$. (Observer at ulikheten

$$\sum_{r=i}^{j} \frac{1}{a_r} \geqq C\,,$$

gir at $j-i>u$ hvis C er tilstrekkelig stor.)

Jeg kan ikke på det nåværende tidspunkt vise at

$$\sum \frac{1}{a_i} < \infty$$

hvis $\sum(A,u,v)$ er forskjellig for ulike verdier av (u,v).

Kanskje (6) holder for enhver $C>0$ når bare $u=u(C)$ er tilstrekkelig stor.

§4. En »dødfødt« hypotese.

La meg gi dere en av mine dødfødte hypoteser. La A betegne en følge av hele tall slik at $1 \leqq a_1 < a_2 \ldots$ og $a_i + a_j \neq a_l$ for alle i, j og l. La $A(x)$ være antall a_k slik at $a_k \leqq x$. Det er lett å se at $A(x) \leqq \left[\frac{x+1}{2}\right]$.

Hvis α er et irrasjonalt tall, betrakt følgen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ av hele tall slik at $\frac{1}{3} < \alpha_i\alpha - [\alpha_i\alpha] < \frac{2}{3}$. Tettheten til $\{\alpha_1 \alpha_2, \ldots\}$ vil være $\frac{1}{3}$ i enhver aritmetisk følge og $\alpha_i + \alpha_j \neq \alpha_l$.

Jeg fremsatte den hypotese at hvis A har tetthet større enn $\frac{1}{3}$ i enhver aritmetisk følge, så må $a_i + a_j = a_l$ holde for ulike valg av i, j og l. Hypotesen virket interessant, men Ruzsa påviste at den er en umidelbar konsekvens av et merkverdig og dypt teorem av R. Kneser. Mitt problem var likevel ikke helt dødfødt, idet Ruzsa stile noen beslektede problemer som kanskje er virkelig dype. Hvis f.eks. A har øvre tetthet større enn $\frac{1}{3}$, og A inneholder et multiplum av k for ethvert heltall k, vil da $a_i + a_j = a_l$ holde for passende valg av i, j og l?

For detaljer om Knesers teorem og mange andre interessante tallteoretiske problemer, se boka [6] av H. Halberstam og K. F. Roth.

§5. Litt om primtall.

La meg avslutte denne artikkelen med noen mindre kjente resultater og problemer om primtall. E. G. Straus og jeg stilte følgende problem:
Vis at for n tilstrekkelig stor, fins et k slik at

$$p_n^2 < p_{n-k}p_{n+k} \tag{12}$$

der p_n som før betegner primtall nr. n.

Selfridge var sikker på at (12) var gal og gav et overbevisende heuristisk argument. Pomerance viste at Selfridge hadde rett. Hans bevis hadde virkelig ingenting med primtall å gjøre. Han viser faktisk at hvis $a_1 < a_2 < \ldots$ er en følge positive tall slik at

$$(a_n)^{\frac{1}{n}} \to 1 \quad \text{og} \quad \frac{a_n}{n} \to \infty, \quad \text{da vil} \quad a_n^2 > a_{n-k}a_{n+k}$$

for uendelig mange verdier av n, uansett hvilken verdi k har.

Dette fenomenet dukker ofte opp – i stedet for å vise et resultat om primtall, viser man det for mer generelle følger som har noen av primtallenes egenskaper. Pomerance og jeg prøvde å vise at (12) holder for alle n bortsett fra en mengde med tetthet null, men uten å få noe positivt resultat.

P. Turán og jeg fremsatte hypotesen:

La $d_k = p_{k+1} - p_k$. Da vil tallfølgen $(-1)^{l+k}(d_{k+1} - d_k)$, $k = 1, 2, \ldots$ (l vilkårlig), skifte tegn uendelig mange ganger. Det er nok å vise resultatet for $l = 0$ og $l = 1$. Det er mulig vi overser en enkel idé her.

Er det sant at antall løsninger av

$$T = p_{n+i} + p_{n-i} \quad 1 \leqq i \leqq n \tag{13}$$

er ubegrenset som funksjon av T og n?

Er det sant at antall forskjellige T på formen (13) er større enn $cn(\log n)^{-1}$ (c = konstant)?

Kanskje svaret er »ja« på første spørgsmål og »nei« på siste.

For 40 år siden viste jeg at

$$\liminf \left(\frac{p_{n+1} - p_n}{\log n} \right) < 1 \tag{14}$$

Det svakere resultat en får ved å erstatte »$<$« med »$\leqq$« i (14), er en umiddelbar konsekvens av primtallsatsen. For å vise (14), brukte jeg V. Bruns metode. E. Bombieri og H. Davenport har skjerpet (14) betydelig. Det er ingen tvil om at grensen i (14) er 0, men å vise dette synes å være utenfor vår rekkevidde foreløpig. Et klassisk problem er å vise at $p_{n+1} - p_n = 2$ har uendelig mange løsninger.

Bruns metode gir lett at

$$\liminf \frac{p_{n+r} - p_n}{r \log n} < 1 \tag{15}$$

for hver r. Dessverre kan jeg ikke vise at man i (15) kan erstatte 1 med $1 - c$, der c er en positiv konstant uavhengig av r.

Westzynthius viste at

$$\limsup \frac{p_{n+1} - p}{\log n} = \infty . \tag{16}$$

R. A. Rankin og jeg har forbedret (16) betraktelig. Den gjeldende rekord ble satt av Rankin i 1938 og sier at ulikheten

$$p_{n+1} - p_n > c \log n \, (\log \log n)(\log \log \log \log n)(\log \log \log n)^{-2} \tag{17}$$

holder for uendelig mange n.

I mer enn 40 år har det eneste fremskritt vært å øke konstanten c. Jeg tilbyr \$10.000 for et bevis for at c kan velges vilkårlig stor i (17).

Riui og jeg viste at opphopningspunktene til tallfølgen $\dfrac{p_{n+1} - p_n}{\log n}$ har positivt mål. Det illustrerer vår uvitenhet at vi på tross av dette ikke er i stand til å finne et eneste endelig opphopningspunkt.

Det er naturligvis innlysende for enhver klart-tenkende person at ethvert ikke-negativt tall er et grensetall for $\frac{p_{n+1}-p_n}{\log n}$, men et bevis synes å ligge helt utenfor vår rekkevidde.

La $d(n)$ betegne antall divisorer i n. Det er ikke vanskelig å vise ved hjelp av Bruns metode, at mengden av opphopningspunkter for $\frac{d(n+1)}{d(n)}$ inneholder intervaller. Det er ikke vanskelig å se at 0 og ∞ hører med til mengden, men jeg kan ikke angi noe annet positivt opphopningspunkt. Igjen er det »klart« at ethvert tall $\alpha \geqq 0$ er et grensetall for $\frac{d(n+1)}{d(n)}$ og at $d(n)=d(n+1)$ har uendelig mange løsninger. Men ingen av disse påstandene er bevist.

For flere problemer og litteraturhenvisninger, se [3].

Litteratur

[1] Alladi, K. Erdös, P. and Hoggatt, jr., V. E.: *On additive partitions of integers.* Discrete Math. 22 (1978), 201-211.

[2] Andrews, G. E.: *MacMahon's prime numbers of measurement*. Amer. Math. Monthly 82 (1975), 922-923.

[3] Erdös, P.: *Some recent advances and current problems in number theory.* Lectures on modern mathematics vol. III, Wiley, New York (1965), 196-244.

[4] Fürstenberg, H.: *Ergodic behaviour of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions.* J. d'Analyse Math. 31 (1977), 204-257.

[5] Fürstenberg, H. and Katznelson, Y.: *An ergodic Szemerédi theorem for commuting transformations.* J. d'Analyse Math. 34 (1978), 275-291.

[6] Halberstam, H. and Roth, K. F.: *Sequences.* Oxford, Clarendon Press 1966.

[7] Harary, F.: *Graph Theory.* Addison-Wesley 1977.

[8] Szemerédi, E.: *On sets of integers containing no k elements in ratithmetic progressions.* Acta Arith. 27 (1975), 199-245.

Oversatt fra engelsk av Arne Stray.