A $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ és $\nu(n)$ FÜGGVÉNYEK NÉHÁNY ÚJ TULAJDONSÁGÁRÓL

ERDŐS PÁL, GYŐRY KÁLMÁN ÉS PAPP ZOLTÁN

Legyenek $f_1(n), \ldots, f_k(n)$ számelméleti függvények. Nevezzük őket függetlennek, ha akárhogy is írjuk elő az $1, 2, \ldots, r$ számoknak k permutációját $\{i_1^{(j)}, \ldots, i_r^{(j)}\}$ $j=1, \ldots, k$, akkor mindig van végtelen sok n, melyre

$$f_j(n+i_1^{(j)}) > f_j(n+i_2^{(j)}) > \ldots > f_j(n+i_r^{(j)}), \quad j = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

A független elnevezés talán nem a legszerencsésebb, mert a valószínűségszámításban ez egy elfogadott terminológia és sokkal többet mond, mint a mi feltételünk.

Nehéznek látszik már $k=2$-re is szükséges és elégséges feltételt találni, hogy mikor független k függvény — még akkor is, ha feltesszük, hogy az f_j függvények additívak vagy multiplikatívak. Így e cikkben csak speciális függvényeket, a $d(n)$, $\nu(n)$, $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ függvényeket vizsgáljuk. $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ $r=4$-re még függetlenek, de $r=5$-re már nem. $d(n)$ és $\nu(n)$ viszont függetlenek minden r-re és $d(n)$, $\nu(n)$ és $\sigma(n)$, valamint $d(n)$, $\nu(n)$ és $\varphi(n)$ is függetlenek.

1. Tétel. Legyen $\{i_1^{(j)}, \ldots, i_r^{(j)}\}$, $j=1, 2$, az $1, \ldots, r$ számok két tetszés szerinti permutációja. Akkor végtelen sok n-re

$$d(n+i_1^{(1)}) > \ldots > d(n+i_r^{(1)}); \quad \nu(n+i_1^{(2)}) > \ldots > \nu(n+i_r^{(2)}). \tag{2}$$

Az 1. Tétel bizonyítása az elemi analitikus számelmélet módszereit használja. A bizonyítás alapjában véve egyszerű, de az analitikus számelméletben járatlan olvasónak talán némi nehézséget fog okozni. Hogy a formalizmust egyszerűsítsük, (2) helyett csak azt fogjuk bizonyítani, hogy végtelen sok n-re fennáll

$$d(n+1) > \ldots > d(n+r); \quad \nu(n+r) > \ldots > \nu(n+1). \tag{2'}$$

A bizonyításból látható lesz, hogy ez nem megy az általánosság rovására. Először néhány jelölést vezetünk be. Legyen x elegendően nagy,

$$u = [(\log\log x)^3], \quad v = [(\log\log x)^2].$$

$r < q_1 < q_2 < \ldots$ legyenek az r-nél nagyobb egymásután következő prímszámok, továbbá $(j=1, \ldots, r)$

$$A_j = \prod_i q_i, \quad (j-1)u+1 \leqq i \leqq ju-(j-1)v$$

azaz

$$\nu(A_j) = u-(j-1)v. \tag{3}$$

Elégítse ki mármost n a következő kongruenciarendszert:

$$(4) \qquad n+j \equiv A_{r+1-j}^{r+1-j} \pmod{A_{r+1-j}^{r+1}}, \quad (j=1, \ldots, r),$$

(4) miatt n mod B egyértelműen van meghatározva, ahol $B = \prod_{j=1}^{r} A_j^{r+1}$ és

$$(5) \qquad n+j = A_{r+1-j}^{r+1-j} l_j + tB = A_{r+1-j}^{r+1-j}\left(l_j + t\frac{B}{A_{r+1-j}^{r+1-j}}\right)$$

alakba írható, ahol $(B, l_j)=1$, $A_{r+1-j}^{r+1-j} l_j < B$. (3)-ból azonnal következik, hogy

$$(6) \qquad d(A_r^r) > d(A_{r-1}^{r-1}) > \ldots > d(A_1); \quad v(A_1) > \ldots > v(A_r).$$

Tekintsük mármost a (4) kongruenciarendszer megoldásait az $(1, x)$ intervallumban, ekkor (5)-ben $0 \leqq t < \frac{x}{B}$. Egy egyszerű átlagolással most bebizonyítjuk, hogy majdnem minden t-re $\left(\text{azaz } o\left(\frac{x}{B}\right) t \text{ érték kivételével}\right)$ fennáll (2′).

Könnyű belátni, hogy

$$(7) \qquad \sum_{0<t<\frac{x}{B}} d\left(l_j + t\frac{B}{A_{r+1-j}^{r+1-j}}\right) \leqq 2 \sum_{1 \leqq s \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{Bs}+1\right) < \frac{2x \log x}{B}$$

(7) azonnal következik, ha meggondoljuk, hogy egy m szám osztóinak száma legfeljebb kétszerese m azon osztói számának, melyek $m^{1/2}$-nél nem nagyobbak.

(7)-ből rögtön következik, hogy ha $o\left(\frac{x}{B}\right)$ t értéktől eltekintünk, akkor $d\left(l_j + t\frac{B}{A_{r+1-j}^{r+1-j}}\right) < (\log x)^2$, azaz $o\left(\frac{x}{B}\right)$ t értéktől eltekintve

$$(8) \qquad d(A_{r+1-j}^{r+1-j}) = (r+2-j)^{u-(r-j)v} \leqq d(n+j) < (r+2-j)^{u-(r-j)v} (\log x)^2.$$

(8)-ból egyszerű számolással azonnal belátható, hogy a $(\log x)^2$ szorzó a (6) egyenlőtlenséget nem tudja megváltoztatni, ugyanis

$$(9) \qquad (r+2-j)^{u-(r-j)v} > (\log x)^2 (r+2-j-1)^{u-(r-j-1)v}$$

bőségesen teljesül (u és v definíciója miatt). (2′) v-re vonatkozó egyenlőtlenségét még könnyebb bebizonyítani. Ezzel az 1. Tétel bizonyítását befejeztük.

Ezenkívül bebizonyítható, hogy ha $P_1 = \{i_1^{(1)}, \ldots, i_r^{(1)}\}$ és $P_2 = \{i_1^{(2)}, \ldots, i_r^{(2)}\}$ az $1, \ldots, r$ számok két permutációja, akkor azon n számok $d_r(P_1, P_2)$ sűrűsége, melyekre (2) teljesül, létezik. Továbbá $\max d_r(P_1, P_2) = d_r(P_1, P_1)$. $d_r(P_1, P_1)$ természetesen nem függ P_1-től. Bizonyára $d_r(P_1, P_2)$ minimuma akkor éretik el, ha $P_1 = \{1, \ldots, r\}$ és $P_2 = \{r, \ldots, 1\}$, de a bizonyítást nem gondoltuk át pontosan. Végül könnyű belátni, hogy dacára annak, hogy $d_r(P_1, P_1)$ maximális, mégis $\lim_{r\to\infty} r!\, d_r(P_1, P_1) = 0$.

Erdős Pál egy régebbi cikkében [1] bebizonyította, hogy ha $r_n = c(\log n)^{1/2}/ /\log\log n$, valamint $\{i_1, i_2, \ldots i_{r_n}\}$ az $1, 2, \ldots, r_n$ számok egy tetszés szerinti permutációja, akkor, a $d(m+i_1) > d(m+i_2) > \ldots > d(m+i_{r_n})$ egyenlőtlenségeknek van n-nél kisebb megoldása. Hasonló módon élesíthetnénk az 1. Tételt, de itt se gondoltuk végig a részleteket.

$d(n)$, $v(n)$ és $\varphi(n)$, illetve $d(n)$, $v(n)$ és $\sigma(n)$ függetlensége ugyanúgy bizonyítható be, mint az 1. Tétel, de a bizonyítás kissé komplikáltabb.

A $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ függvényekre hasonló állítás nem igaz. Nevezetesen bebizonyítható a következő

2. Tétel. Nem létezik olyan n természetes szám, melyre

(10) $$\varphi(n+1) \geqq \varphi(n+2) \geqq \varphi(n+3) \geqq \varphi(n+4) \geqq \varphi(n+5)$$

és

(11) $$\sigma(n+1) \geqq \sigma(n+2) \geqq \sigma(n+3) \geqq \sigma(n+4) \geqq \sigma(n+5)$$

egyszerre teljesül.

Bizonyítás. Legyen $h(n)=\varphi(n)\sigma(n)$. Ekkor (10)-ből és (11)-ből

(12) $$h(n+1) \geqq h(n+2) \geqq h(n+3) \geqq h(n+4) \geqq h(n+5).$$

Tegyük fel, hogy (12) n-re teljesül. Ha $m=p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ egy m szám prímtényezős alakja, akkor

$$h(m) = m^2\left(1-\frac{1}{p_1^{\alpha_1+1}}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r^{\alpha_r+1}}\right).$$

Ha $2\nmid m$, úgy $\frac{h(m)}{m^2} \geqq \left(1-\frac{1}{p_1^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r^2}\right) \geqq \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right) > \frac{3}{4}$.

Ha pedig $2\|m$ $(p_1=2)$, úgy $\frac{h(m)}{m^2} = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_r^{\alpha_r+1}}\right) \leqq \frac{3}{4}$. Mivel van olyan i $(1\leqq i\leqq 4)$, hogy $n+i\equiv 2 \pmod 4$, ezért egyrészt $h(n+i)\leqq\frac{3}{4}(n+i)^2$, másrészt $h(n+i+1)>\frac{3}{4}(n+i+1)^2$, ami ellentmond (12)-nek.

Megjegyzés. A 2. Tételben nem $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)=(j_1, j_2, j_3, j_4, j_5)=(1, 2, 3, 4, 5)$ az egyetlen olyan permutáció, melyre (10) és (11) nem teljesülhet. Ugyanezt lehet bizonyítani akkor is, ha például $i_4=j_4=4$, $i_5=j_5=5$ és $i_1=j_1$, $i_2=j_2$, $i_3=j_3$ az 1, 2, 3 számok tetszőleges permutációja.

$r=4$ esetén az 1. Tétel $f_1=\varphi(n)$-re és $f_2=\sigma(n)$-re is érvényben marad. Ez közvetlenül is bizonyítható. Azonban a következő állítás (melyből ezt majd levezetjük) önmagában is érdekesnek látszik.

3. Tétel. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_k, \eta_1, \dots, \eta_k$ pozitív számok. Akkor és csak akkor létezik olyan természetes számokból álló végtelen n_l $(l=1, 2, \dots)$ sorozat, melyre

(13) $$\lim_{l\to\infty} \frac{\varphi(n_l+i)}{\varphi(n_l+i+1)} = \xi_i,$$

(14) $$\lim_{l\to\infty} \frac{\sigma(n_l+i)}{\sigma(n_l+i+1)} = \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, k),$$

ha van olyan (nem szükségképpen különböző) természetes számokból álló n_l' $(l=1, 2, \ldots)$ sorozat, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l'+i)}{h^*(n_l'+i+1)} = \xi_i \eta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, k), \tag{15}$$

ahol $h^*(n)=\varphi(n)\sigma(n)/n^2$.

Ez a tétel A. Schinzel egy tételének [2] általánosítását jelenti.

Bizonyítás. A tételnek a „csak akkor” része triviális.

A fordított állításhoz elegendő belátni olyan n_l $(l=1, 2, \ldots)$ sorozat létezését, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\varphi^*(n_l+i)}{\varphi^*(n_l+i+1)} = \xi_i \tag{16}$$

és

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l+i)}{h^*(n_l+i+1)} = \xi_i \eta_i = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{17}$$

ha valamely n_l' $(l=1, 2, \ldots)$ sorozatra

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n_l'+i)}{h^*(n_l'+i+1)} = \zeta_i \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{18}$$

ahol $\varphi^*(n)=\varphi(n)/n$.

Legyen $\varepsilon>0$ tetszőleges és $\varepsilon>\varepsilon'>0$. Ekkor van olyan n' természetes szám, melyre

$$\left|\frac{h^*(n'+i)}{h^*(n'+i+1)} - \zeta_i\right| < \varepsilon' \quad (i = 1, \ldots, k). \tag{19}$$

Jelölje $p_1, p_2, \ldots$ az egymást követő prímszámok sorozatát. Legyen $m_0=(p_1 \ldots p_{s_0})^T$, míg $i=1, 2, \ldots, k+1$ esetén $m_i=p_{s_{i-1}+1} \ldots p_{s_i}$ $(s_0<s_1<\ldots<s_k)$.

Tekintsük az

$$\begin{aligned} x &\equiv n' \quad (\mathrm{mod}\ m_0^2) \\ x &\equiv m_i - i\ (\mathrm{mod}\ m_i^2) \quad (i = 1, \ldots, k+1) \end{aligned} \tag{20}$$

kongruenciarendszert. Könnyen belátható, hogy ez megoldható és van olyan megoldása, amelyre $-k-1 \leqq x < (m_0 \ldots m_{k+1})^2 - k - 1$ teljesül. Legyen n egy ilyen megoldás. Akkor $0<n$ és $n+i<(m_0 \ldots m_{k+1})^2$ $(i=1, \ldots, k+1)$. Megmutatjuk, hogy $T, s_0, s_1, \ldots, s_{k+1}$ értékeinek alkalmas megválasztása mellett

$$\left|\frac{h^*(n+i)}{h^*(n+i+1)} - \zeta_i\right| < \varepsilon \tag{21}$$

és

$$\left|\frac{\varphi^*(n+i)}{\varphi^*(n+i+1)} - \xi_i\right| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, k) \tag{22}$$

teljesül, ebből pedig a bizonyítandó állítás már következik.

Ha s_0-t és T-t elég nagyra választjuk, akkor m_0 osztható $n'+i$-vel $(i=1, \dots, k+1)$. Ezért $n+i=(n'+i)u_i$ írható, ahol már $(u_i, n'+i)=1$, sőt, az is könnyen belátható, hogy u_i minden prímosztója nagyobb p_{s_0}-nál $(i=1, \dots, k+1)$. Ezek alapján

$$h^*(n'+i) \geqq h^*(n+i) = h^*(n'+i)h^*(u_i) > h^*(n'+i)\left(1-\frac{1}{p_{s_0}}\right) \quad (i = 1, \dots, k+1).$$

Tehát, ha s_0 elég nagy, akkor $s_1, \dots, s_{k+1}$-től függetlenül $h^*(n+i)/h^*(n+i+1)$ tetszőlegesen közel kerül $h^*(n'+i)/h^*(n'+i+1)$-hez, így (19) figyelembevételével (21) adódik. A továbbiakban s_0-t és T-t rögzítettnek tekintjük, méghozzá úgy, hogy (21) teljesüljön.

Mivel $n+i=(n'+i)u_i$ osztható m_i-vel és $(m_i, n'+i)=1$, ezért $u_i=m_iv_i$, és (20) miatt $(v_i, m_i)=1$ $(i=1, \dots, k+1)$. Továbbá $(v_i, m_j)=(n+i, m_j)=$ $=(n+i-(n+j), m_j)=1$ ha $i\neq j$; $i, j=1, \dots, k+1$. Ezenkívül $(v_i, m_0)=1$ is teljesül $(i=1, \dots, k+1)$. Ha tehát v_i prímtényezős felbontása $v_i=q_{i1}^{\alpha_{i1}} \dots q_{it_i}^{\alpha_{it_i}}$ $(i=1, \dots, k+1)$ alakú, akkor $q_{ij}>p_{s_{k+1}}$ $(j=1, \dots, t_i;\ i=1, \dots, k+1)$ és

$$p_{s_{k+1}}^{t_i} < v_i < n+i < (m_0 \dots m_{k+1})^2 < p_{s_{k+1}}^{2(s_{k+1}+(T-1)s_0)}.$$

Ezért $s_{k+1}>(T-1)s_0$ esetén $t_i<4s_{k+1}$ $(i=1, \dots, k+1)$, s így

$$1 > \varphi^*(v_i) = \left(1-\frac{1}{q_{i1}}\right) \dots \left(1-\frac{1}{q_{it_i}}\right) \geqq \left(1-\frac{1}{p_{s_{k+1}}+1}\right) \dots \left(1-\frac{1}{p_{s_{k+1}}+4s_{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{p_{s_{k+1}}}{p_{s_{k+1}}+4s_{k+1}},$$

ami 1-hez tetszőlegesen közel van, ha s_{k+1} elegendően nagy. Ha tehát

$$\left|\frac{\varphi^*((n'+i)m_i)}{\varphi^*((n'+i+1)m_{i+1})} - \xi_i\right| < \varepsilon/2 \quad (i = 1, \dots, k) \tag{23}$$

teljesül és s_1 (aminek következtében s_{k+1} is) elég nagy, akkor (22) is teljesül.

Azonban nem nehéz megmutatni, hogy $s_1, \dots, s_{k+1}$ megválasztható úgy, hogy s_1 tetszőlegesen nagy legyen és $\varphi^*(m_i)/\varphi^*(m_{i+1})$ tetszőlegesen közel kerüljön egy bármilyen előre megadott pozitív értékhez, esetünkben $\xi_i\varphi^*(n'+i+1)/\varphi^*(n'+i)$-hez $(i=1, \dots, k)$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

4. Tétel. Legyen i_1, i_2, i_3, i_4 és j_1, j_2, j_3, j_4 az 1, 2, 3, 4 számok két tetszőleges permutációja. Létezik végtelen sok olyan n természetes szám, melyekre

$$\varphi(n+i_1) > \varphi(n+i_2) > \varphi(n+i_3) > \varphi(n+i_4) \tag{24}$$

és

$$\sigma(n+j_1) > \sigma(n+j_2) > \sigma(n+j_3) > \sigma(n+j_4) \tag{25}$$

egyszerre teljesül.

Bizonyítás. A 3. Tétel (és bizonyítása) jelöléseit megtartva, legyen a az 1, 2, 3, 4 számok egy tetszőleges permutációja és

$$\xi_i\eta_i = \zeta_i = \frac{h^*(p_{2a^{-1}(i)-1})}{h^*(p_{2a^{-1}(i+1)-1})} \quad (i = 1, 2, 3),$$

ahol p_t a t-edik prímszám és ξ_i, η_i később meghatározott pozitív konstansok (természetesen a fenti feltétel mellett).

Megmutatjuk, hogy van olyan n'_l sorozat, melyre

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n'_l+i)}{h^*(n'_l+i+1)} = \zeta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Legyen $l>9$ rögzített egész szám és $c_i = p_{2a^{-1}(i)-1} e_i f_i$ $(i=1, \dots, 4)$, ahol

$$e_i = \begin{cases} 2^l & \text{ha} \quad |i-a(1)| = 2 \\ 1 & \text{különben} \end{cases} \qquad f_i = \begin{cases} (p_2 p_4 p_6 p_8)^l (p_9 p_{10} \dots p_l)^l & \text{ha} \quad i = 2 \\ 1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy az

$$x+i \equiv c_i \pmod{c_i^2} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

kongruenciarendszer megoldható, egy megoldását jelölje $n' = n'_l$. Ekkor $n'+i = c_i d_i$ írható, ahol $(c_i, d_i) = 1$ $(i=1, \dots, 4)$, sőt, könnyű belátni, hogy d_i nem osztható sem 2-vel, sem 3-mal. Továbbá

$$(c_j, d_i) \leqq (n'+j, d_i) = \big((n'+j)-(n'+i), d_i\big) = 1 \quad (i \neq j; \quad i, j = 1, \dots, 4).$$

Tehát d_i minden prímtényezője nagyobb p_l-nél, ezért

$$1 \geqq h^*(d_i) > 1 - \frac{1}{p_l},$$

azaz

$$\lim_{l\to\infty} h^*(d_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Hasonlóan

$$1 \geqq h^*(e_i) \geqq 1 - 1/2^{l+1}$$

és

$$1 \geqq h^*(f_i) \geqq (1-1/3^{l+1})^l > 1 - l/3^{l+1} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

miatt

$$\lim_{l\to\infty} h^*(e_i) = \lim_{l\to\infty} h^*(f_i) = 1 \quad (i = 1, \dots, 4).$$

Tehát valóban

$$\lim_{l\to\infty} \frac{h^*(n'_l+i)}{h^*(n'_l+i+1)} =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \frac{h^*(p_{2a^{-1}(i)-1})}{h^*(p_{2a^{-1}(i+1)-1})} \frac{h^*(e_i)}{h^*(e_{i+1})} \frac{h^*(f_i)}{h^*(f_{i+1})} \frac{h^*(d_i)}{h^*(d_{i+1})} = \zeta_i.$$

Ekkor pedig a 3. Tétel szerint van olyan n_l természetes számokból álló sorozat, hogy

$$\lim_{l\to\infty} \frac{\varphi(n_l+i)}{\varphi(n_l+i+1)} = \xi_i, \quad \lim_{l\to\infty} \frac{\sigma(n_l+i)}{\sigma(n_l+i+1)} = \eta_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Most választjuk meg a ξ_i, η_i értékeket. Legyen $a(k) = i_k, b(k) = j_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ és $\eta_i = 2^{(b^{-1}(i) - b^{-1}(i+1))\delta/4}$ $(i=1, 2, 3)$, $(\delta>0)$. Ekkor, ha l elegendően nagy, a $\sigma(n+i)$-k nagyság szerinti sorrendje ugyanaz lesz, mint a $b^{-1}(i)$-k sorrendje, azaz $n=n_l$-re teljesül (25). Másrészt $2^{-\delta} < \eta_i < 2^{\delta}$ miatt δ-t elegendően kicsire választva

$\xi_i = \zeta_i/\eta_i$ értéke tetszőlegesen megközelíti ζ_i értékét. Ha tehát δ-t megfelelő kicsire, l-et nagyra választjuk, akkor a $\varphi(n_l+i)$ számok nagyság szerinti sorrendje megegyezik a $h^*(p_{2a^{-1}(i)-1})$ számok sorrendjével, ami pedig ugyanaz, mint az $a^{-1}(i)$-k sorrendje. Vagyis $n=n_l$-re fennáll (24). Ezzel a bizonyítást befejeztük.

IRODALOM

[1] ERDŐS PÁL, Megjegyzések a Matematikai Lapok két problémájához, Mat. Lapok 11 (1960), 26—31.
[2] A. SCHINZEL, On functions $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 3 (1955), 415—419.

О НЕКОТОРЫХ НОВЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$, $v(n)$

ЕРДЁШ ПАЛ, ДЬЁРИ КАЛМАН и ПАПП ЗОЛТАН

ON SOME NEW PROPERTIES OF FUNCTIONS $\sigma(n)$, $\varphi(n)$, $d(n)$ AND $v(n)$

P. ERDŐS, K. GYŐRY, Z. PAPP

Let $i_1, \ldots, i_r; j_1, \ldots, j_r$ be two permutations of 1, 2, ..., r. The authors prove that the inequalities

$$d(n+i_1) > \ldots > d(n+i_r); \quad v(n+j_1) > \ldots > v(n+j_r)$$

have always infinitely many solutions.

If $d(n)$ and $v(n)$ are replaced by $\varphi(n)$ and $\sigma(n)$ the same result holds for $r=4$ but fails for $r \geqq 5$. Several related problems are discussed.