Über die in Graphen enthaltenen saturierten planaren Graphen

Herrn HERBERT GRÖTZSCH zum 65. Geburtstag am 21. Mai 1967 gewidmet

Von P. ERDŐS in Budapest

(Eingegangen am 19. 4. 1967)

In dieser Arbeit bezeichnet $G(n; l)$ stets einen Graphen mit n Knotenpunkten und l Kanten (Schlingen und mehrfache Kanten sind ausgeschlossen). Bekanntlich hat ein planarer Graph mit n Knotenpunkten höchstens $3n - 6$ Kanten und ein planarer $G(n; 3n - 6)$ gibt immer eine Triangulation der Ebene (Kugelfläche).

Nach einem bekannten TURÁNschen Satz [7] enthält ein $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1\right)$ immer ein Dreieck, also einen saturierten planaren Graph mit drei Knotenpunkten, aber ein $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right]\right)$ muß kein Dreieck, also auch keinen saturierten planaren Graphen enthalten. In einem Gespräch stellte mir einmal DIRAC folgende Frage: Muß ein $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + l\right)$ für große Werte von l einen saturierten planaren Graphen mit vielen Knotenpunkten enthalten? Folgender Satz gibt eine partielle Antwort auf diese Frage ($c_1, \ldots$ sind absolute positive Konstanten):

Satz 1. *Sei $f(n) > 0$ eine beliebige Funktion. Jeder $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + f(n)\right)$ enthält einen saturierten planaren Graph mit mehr als $\frac{c_1 f(n)}{n}$ Knotenpunkten. Abgesehen von dem Werte von c_1 ist diese Schranke scharf.*

Unser Satz ist nur dann nicht trivial, wenn $f(n) \geqq \frac{n}{c_1}$ ist.

Bevor wir unseren Satz beweisen, wollen wir einige Bezeichnungen einführen. Knotenpunkte werden mit $x_1, \ldots, y_1, \ldots$, Kanten mit $(x_i, x_j) \ldots$ oder $e_1, \ldots$ bezeichnet. C_m sei ein Kreis mit m Knotenpunkten, $C_m^{(k)}$ sei eine k-fache Pyramide, deren Basis ein C_m ist, das heißt, $x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_k$ sind die Knotenpunkte (x_i, x_{i+1}), $1 \leqq i \leqq m - 1$, (x_1, x_m) und (x_i, y_j),

$1 \leqq i \leqq m$; $1 \leqq j \leqq k$ sind die Kanten von $C_m^{(k)}$. $C_m^{(2)}$ ist offenbar ein saturierter planarer Graph mit $m + 2$ Knotenpunkten. P_m soll immer einen saturierten planaren Graphen mit m Knotenpunkten bezeichnen.

Anstatt Satz 1 wollen wir einen allgemeineren Satz beweisen:

Satz 2. *Jeder* $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + f(n)\right)$ *enthält ein* $C_m^{(k)}$ *mit* $m > \frac{c_k' f(n)}{n}$. *Abgesehen von dem Werte von* c_k' *ist der Satz scharf.*

Lemma 1. *Jeder* $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1\right)$ *hat eine Kante* (x_1, x_2) *und* $m > c_2 n$ *weitere Knotenpunkte* $y_1, \ldots, y_m$, *so daß alle Kanten* (x_i, y_j), $i = 1, 2$; $j = 1, \ldots, m$ *zu* G *gehören.*

Das Lemma ist bekannt [1]. Die Menge der Knotenpunkte, die mit der Kante e ein Dreieck in G bilden, wollen wir mit $S(e)$ bezeichnen. Unser Lemma 1 besagt, daß in einem $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1\right)$ immer eine Kante e mit $|S(e)| > c_2 n$ existiert.

Wegen Lemma 1 enthält unser $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + f(n)\right)$ mindestens $f(n)$ Kanten $e_1, \ldots, e_{f(n)}$ mit $S(e_i) > c_2 n$. Bilden wir nun alle k-Tupel von Knotenpunkten von $S(e_i)$, $i = 1, \ldots, f(n)$. Offenbar gilt

$$\sum_{i=1}^{f(n)} \binom{S(e_i)}{k} \geqq f(n) \binom{[c_2 n]}{k} > \left(\frac{c_2}{2}\right)^k f(n) \binom{n}{k}. \tag{1}$$

Da die Anzahl aller aus den Knotenpunkten von G gebildeten k-Tupel $\binom{n}{k}$ ist, folgt aus (1), daß mindestens ein k-Tupel, z. B. $(y_1, \ldots, y_k)$, in mindestens $\left(\frac{c_2}{2}\right)^k f(n)$ der $S(e_i)$ vorkommt. Es seien diese Kanten (von G) $e_1, \ldots, e_u$, $u > \left(\frac{c_2}{2}\right)^k f(n)$. Diese Kanten bestimmen einen Teilgraphen $G(n; u)$ von G, und nach einem Satz von Gallai und mir [2] enthält aber $G(n; u)$ einen Kreis mit mehr als $\frac{2u}{n}$ Knotenpunkten.

Dieser Kreis und $y_1, \ldots, y_k$ bilden unser $C_m^{(k)}$, damit sind die Sätze 2 und 1 bewiesen.

Es ist leicht einzusehen, daß Satz 2 (mit Ausnahme des Wertes von c_k') scharf ist. Um dies einzusehen, definieren wir einen Graphen G wie folgt: Die Knotenpunkte sind $x_1, \ldots, x_{\left[\frac{n}{2}\right]}$, $y_1, \ldots, y_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. Die Kanten sind (x_i, y_j), $1 \leqq i \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$; $1 \leqq j \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, (y_{i_1}, y_{i_2}) ist dann und nur dann

Kante unseres Graphen, wenn für ein ganzes t

$$\frac{t\,f(n)}{n} < i_1 < i_2 < \frac{(t+1)\,f(n)}{n}$$

ist. Offenbar hat unser Graph mindestens $\frac{n^2}{4} + c_3 f(n)$ Kanten, aber er enthält kein $C_m^{(1)}$ mit $m > \frac{f(n)}{n}$.

Es ist etwas schwerer einzusehen, daß unser Graph auch kein P_m mit $m > \frac{c_4 f(n)}{n}$ enthält. Sei P_m in G enthalten. Zunächst zeigen wir, daß P_m keine zwei Knotenpunkte y_u und y_v enthalten kann, mit

$$\frac{t\,f(n)}{n} < u < \frac{(t+1)\,f(n)}{n} < v. \tag{2}$$

Der folgende einfache Beweis stammt von T. Gallai. Jeder Knotenpunkt von P_m muß in einem Dreieck von P_m enthalten sein, es gibt aber offenbar kein Dreieck, welches die Knotenpunkte y_u und y_v enthält. Betrachten wir eine durch P_m bestimmte Triangulation der Ebene. Nehmen wir an, daß P_m zwei Knotenpunkte, die (2) befriedigen, enthält. Dann kann man die Dreiecke der Triangulation in zwei Klassen einteilen. In der ersten Klasse sind die Dreiecke, die mindestens einen Knotenpunkt

$$y_u,\quad \frac{t\,f(n)}{n} < u < \frac{(t+1)\,f(n)}{n},$$

enthalten. Diese Dreiecke enthalten dann mindestens zwei solche Knotenpunkte. In der zweiten Klasse sind die Dreiecke, die keinen solchen Knotenpunkt enthalten. Zwei Dreiecke, die in verschiedenen Klassen sind, können aber, wie leicht ersichtlich, keine gemeinsame Kante enthalten. Es ist aber unmittelbar klar, daß man die Dreiecke einer Triangulation nicht in zwei solche Klassen einteilen kann. Daher kann P_m keine zwei Knotenpunkte, die (2) befriedigen, enthalten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir nun annehmen, daß die Knotenpunkte von P_m

$$x_1, \ldots, x_u \quad \text{und} \quad y_1, \ldots, y_v, \quad v \leqq \frac{f(n)}{n}$$

sind. Betrachten wir wieder eine durch P_m bestimmte Triangulation der Ebene und die in P_m vorkommenden Kanten (y_i, y_j), $1 \leqq i < j \leqq v$. Nach dem Eulerschen Polyedersatz bestimmen diese Kanten höchstens $2v - 4$ Gebiete, und es ist leicht ersichtlich, daß in jedem dieser Gebiete höchstens ein x_i liegen kann. Daher gilt $u \leqq 2v - 4 < \frac{2f(n)}{n}$. Daher ist $m < \frac{3f(n)}{n}$, also ist Satz 1 scharf.

Satz 3. *Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, daß jeder $G\left(n; \frac{n^2}{4}(1+\varepsilon)\right)$ für jedes $m < \delta n$ $m \neq 4$, $m \neq 5$ und $m \neq 7$ ein P_m enthält.*

Für gerades m ist der Beweis von Satz 3 sehr ähnlich dem Beweis von Satz 1 und 2. Anstatt des Satzes von Gallai und mir muß man aber folgenden Satz anwenden [4]: Jedes $G(n; [t\,n^{3/2}])$ enthält ein C_{2l} für alle $2 \leqq l < c_5 t^2$.

Für ungerades m ist der Beweis von Satz 3 etwas komplizierter. Ich zeige, daß jeder $G\left(n; \frac{n^2}{4}(1+\varepsilon)\right)$ für alle $6 \leqq 2m < \delta n$ ein $C_m^{(4)}$ mit den Knotenpunkten $x_1, \ldots, x_{2m}; y_1, y_2, y_3, y_4$ und einen weiteren Knotenpunkt z der mit y_1, y_2, y_3 und mindestens drei der $x_i, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$, $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \pmod 2$ verbunden ist. Der Beweis ist nicht ganz einfach, und wir unterdrücken ihn. Wie mir Herr Bollobás zeigte, enthält dieser Graph ein P_{2m+5} mit den folgenden Kanten: z ist mit $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, y_1, y_2, y_3$ verbunden, y_4 ist mit allen x_i' s verbunden, y_1 mit den x_j, $i_1 \leqq j \leqq i_2$, y_2 mit den x_j, $i_2 \leqq j \leqq i_3$ und y_3 mit den x_j, $i_3 \leqq j \leqq i_1$, unser P_{2m+5} enthält noch das $C_{2m}(x_1, \ldots, x_{2m})$.

Es bleibt noch der Fall $m = 9$. Wir erhalten offenbar ein dreikromatisches P_9, indem wir zwei Oktaeder auf einer Seitenfläche zusammenkleben. Es folgt unschwer aus [4], daß unser $G\left(n; \frac{n^2}{4}(1+\varepsilon)\right)$ dieses P_9 enthält.

Es ist leicht ersichtlich, daß für $m = 4$, 5 und 7 kein drei-kromatischer P_m existiert, daher enthält der dreikromatische Turánsche Graph [7] $G\left(n; \left[\frac{n^2}{3}\right]\right)$ kein solches; es ist also leicht ersichtlich [6], daß jeder $G\left(n; \left[\frac{n^2}{3}\right] + 1\right)$ für alle $3 \leqq m \leqq \delta n$ ein P_m enthält.

Satz 4. *Für jedes k und $n > n_0(k)$ enthält jeder $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4} + n(1+\varepsilon)\right]\right)$ für irgendein m ein $C_m^{(k)}$.*

Der Beweis ist recht kompliziert, und wir werden ihn bei einer anderen Gelegenheit publizieren. Vielleicht gilt Satz 4 schon für alle

$$G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + f(k)\right).$$

Der folgende $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$ enthält kein P_m mit $m > 3$.

$x_1, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, y_1, \ldots, y_{\left[\frac{n}{2}\right]}$ sind die Knotenpunkte. Die Kanten sind (x_i, y_j), $1 \leqq i \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$; $1 \leqq j \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$, weiter ist x_1 auch mit jedem x_i verbunden. Vielleicht aber enthält jeder $G\left(n; \left[\frac{n^2}{4}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ ein P_m mit $m > 3$.

Zunächst wollen wir noch ohne Beweis folgenden Satz aussprechen.

Satz 5. *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* m *existiert ein* $\delta = \delta(\varepsilon, m)$, *so daß jeder* $G\left(n; \frac{n^2}{4}(1 + \varepsilon)\right)$ *ein* $C_m^{[\delta n]}$ *enthält.*

Der Satz ist scharf in dem Sinne, daß, wenn m gegen unendlich strebt, dann für jedes $\varepsilon < \frac{1}{4}$ $\delta(\varepsilon, m)$ gegen 0 strebt.

Es ist von Interesse, Satz 5 und Satz 2 zu vergleichen. Beide Sätze garantieren, daß unser $G\left(n; \frac{n^2}{4}(1 + \varepsilon)\right)$ ein $C_m^{(k)}$ enthält, aber in Satz 2 kann m und in Satz 5 k von der Größenordnung n werden, und beide Sätze sind in gewissem Sinne scharf.

Der Beweis von Satz 5 kann mit den Methoden von [5] geführt werden.

Literatur

[1] P. ERDŐS, On a theorem of RADEMACHER-TURÁN. Illinois J. of Math. **6**, 122–127 (1962) (siehe Lemma 2, S. 124).

[2] P. ERDŐS and T. GALLAI, On maximal paths and circuits of graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **10**, 337–356 (1959) (siehe S. 337).

[3] P. ERDŐS, On the structure of linear graphs. Israel J. of Math. **1**, 156–160 (1963) (Satz 3).

[4] P. ERDŐS and A. STONE, On the structure of linear graphs. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1087–1091 (1946), see also P. ERDŐS and M. SIMONOVITS, A limit theorem in graph theory. Studia Sci. Math. Hungar. **1**, 51–57 (1966).

[5] P. ERDŐS, On extremal problems of graphs and generalised graphs. Israel J. of Math. **2**, 183–190 (1964).

[6] M. SIMONOVITS, A method on solving extremal problems in graph theory, Stability problems. Theory of Graphs, Proc. Coll. Held at Tihany Hungary 1966 Akad Kiadó and Academie Press 279–320.

[7] P. TURÁN, Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie (in ungarischer Sprache). Mat. és Fiz. Lapok **48**, 436–452 (1941); see also P. TURÁN, On the theory of graphs. Coll. Math **3**, 19–30 (1954).