Über eine geometrische Frage von FEJES-TÓTH

FEJES-TÓTH bewies folgenden Satz (vgl. [1]).

Es sei S eine abgeschlossene Menge der Ebene mit der Eigenschaft, dass für jedes S_t, das zu S kongruent ist, die Menge $S - S \cap S_t$ zusammenhängend sei. Dann ist S eine Kreisscheibe (Halbebene) oder das Komplement einer offenen Kreisscheibe oder die ganze Ebene, oder leer.

FEJES-TÓTH fragte uns, was aus diesem Satz würde, wenn die Bedingungen der Abgeschlossenheit oder der Zweidimensionalität fallen gelassen würden. Um die Antwort einfacher auszudrücken, gebrauchen wir folgenden Begriff:

Definition. Eine Menge S hat die *F-Eigenschaft für die Transformationsmenge* T, wenn $S - S \cap S_t$ zusammenhängend ist für jedes S_t das aus S durch eine Transformation aus T entsteht.

Satz 1. Es sei S eine Teilmenge von E^3 mit der F-Eigenschaft für Spiegelungen an Ebenen. Dann ist der Rand, ∂S, von S eine Kugelfläche (möglicherweise degeneriert zu einer Ebene, einem Punkt, der Nullmenge). Der Teil $\partial S \cap S$ des Randes, der zu S gehört, besteht aus einer Kugelkappe (im ebenen Falle zur Kreisscheibe degeneriert) deren Anteil an ihrem Randkreise aus einem (möglicherweise leeren) Kreisbogen besteht.

Diese Satz lässt sich offenbar auf beliebige Hilbertsche Räume und sphärische Räume verallgemeinern, aber da dadurch die vollständige Beschreibung von S kompliziert würde, beschränken wir uns hier auf den dreidimensionalen Fall. In unserem Satz genügt es, Spiegelungen zu gebrauchen. FEJES-TÓTH teilt uns mit, dass in seinem Beweis nur orientationserhaltende Kongruenzen verwendet werden. Wenn wir uns auf diese Kongruenzen beschränken, so wird selbst in der Ebene FEJES-TÓTHS Resultat ohne die Annahme der Abgeschlossenheit völlig ungültig. Mit Hilfe transfiniter Induktion beweisen wir

Satz 2. Es gibt in der Ebene (auch in jedem höherdimensionalen Raum) eine Menge S, die zugleich mit ihrem Komplement überall dicht ist und die F-Eigenschaft für orientationserhaltende Kongruenzen hat.

Es wäre von Interesse, zu entscheiden, ob solche Mengen auch ohne transfinite Induktion konstruiert werden könnten, zum Beispiel ob es Borelsche oder analytische Mengen dieser Art gibt.

Beweis von Satz 1. Definition: Eine Menge heisse *kreiskonvex*, wenn sie jeden Kreis in einer zusammenhängenden Menge und jede gerade Linie in einer zusammenhängenden Menge oder deren Komplement schneidet.

Lemma 1. Eine Menge ist kreiskonvex dann und nur dann, wenn ihr Komplement kreiskonvex ist.

Lemma 2. Es sei S eine ebene kreiskonvexe Menge mit Rand ∂S. Dann ist ∂S ein Kreis (möglicherweise zu einer Geraden, einem Punkt oder der Nullmenge degeneriert) und $\partial S \cap S$ ist daher ein Kreisbogen (eine Strecke, das Komplement einer Strecke, ein Punkt, leer).

Beweis. Nach unserer Definition ist eine kreiskonvexe Menge auch projektiv konvex. Nach H. Kneser [2] enthält entweder die Menge oder ihr Komplement eine gerade Linie und ist daher mit einer konvexen Menge oder deren Komplement projektiv äquivalent, oder sie ist durch zwei gerade Linien begrenzt. Im letzteren Fall ist die Menge offensichtlich nicht kreiskonvex. Wenn im ersten Fall der Rand, ∂S, aus zwei konvexen Kurven besteht, so muss es einen Kreis geben, der die beiden Kurven berührt, und S ist daher nicht kreiskonvex. Wenn nun ∂S eine unendliche konvexe Kurve, aber nicht eine gerade Linie ist, dann gibt es auf ihr Punkte, p, an denen die Krümmung, $\varkappa$, existiert und positiv (oder ∞) ist. Ein Kreis mit Krümmung $< \varkappa$, der ∂S in p tangiert und in der gleichen Richtung gekrümmt ist, schneidet dann ∂S in dem isolierten Punkt p und anderen Punkten so, dass S nicht kreiskonvex ist. Es sei endlich ∂S eine geschlossene konvexe Kurve, so sei p ein Punkt, an dem die Krümmung $\varkappa$ existiert (oder $\varkappa = \infty$). Nach dem obigen Argument muss jeder Kreis K mit Krümmung $< \varkappa$, der ∂S in p tangiert und in der gleichen Richtung gekrümmt ist, die ganze Kurve ∂S enthalten, während jeder Kreis k mit Krümmung $> \varkappa$, der ∂S in p tangiert und in der gleichen Richtung gekrümmt ist, in ∂S enthalten sein muss. Das ist nur möglich, wenn ∂S selbst ein Kreis ist.

Lemma 3. Die kreiskonvexen Mengen des dreidimensionalen Raumes sind genau die in Satz 1 beschriebenen Mengen.

Beweis. Es sei S eine kreiskonvexe Menge in E^3. Nach Lemma 2 schneidet ∂S jede Ebene in einem Kreis (gerade Linie, Punkt, Nullmenge). Das ist bekanntlich nur möglich, wenn ∂S selbst eine Kugel (Ebene, Punkt, Nullmenge) ist. Die Forderungen für $\partial S \cap S$ folgen unmittelbar aus Lemma 2.

Lemma 4. Eine Untermenge, S, eines Kreises oder einer Geraden mit der F-Eigenschaft für die Spiegelungen des Kreises (der Geraden) auf sich selbst ist ein Kreisbogen (der ganze Kreis, ein Punkt, leer), eine Strecke (ganze Gerade, Halbgerade, Punkt, leer) oder deren Komplement.

Beweis. Die Spiegelung an der Geraden g lässt die Punkte $S \cap g$ fest. Das Spiegelbild S_1 von S muss daher alle Punkte von S auf einer Seite von g enthalten, da sonst $S - S \cap S_1$ Punkte auf beiden Seiten von g aber keine g-Punkte enthielte, also nicht zusammenhängend wäre. Es ist daher nicht möglich, zwei getrennte gleichgerichtet kongruente Kreisbögen (s, t) und (s_1, t_1) zu finden, für die $s, s_1 \in S$ und $t, t_1 \notin S$, da es sonst eine Spiegelung $s \longleftrightarrow t_1$ und $t \longleftrightarrow s_1$ gäbe.

Betrachten wir zuerst den Fall, in dem S auf einem echten Kreis – sagen wir dem Einheitskreis – liegt. Wenn S weder der ganze Kreis noch leer ist, so gibt es zwei Punkte $t = e^{i\tau} \notin S$, $s = e^{i\sigma} \in S$ mit beliebig kleinem Abstand; wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\sigma = 0$, $0 < \tau$ und dass es Punkte $e^{i\tau'} \notin S$ mit beliebig kleinem $\tau' > 0$ gibt. Nach der obigen Bemerkung ist also für jedes $s_1 = e^{i\sigma_1} \in S$ mit $\tau < \sigma_1 < 2\pi - \tau$ auch $s_2 = e^{i(\sigma_1 + \tau)} \in S$ und für jedes $t_1 = e^{i\tau_1} \notin S$ mit $2\tau < \tau_1 < 2\pi$ auch $t_2 = e^{i(\tau_1 - \tau)} \notin S$.

Wenn es nun $s_0 = e^{i\sigma_0} \in S$ und $t_0 = e^{i\tau_0} \notin S$ gäbe, so dass $2\tau < \sigma_0 < \tau_0 < 2\pi - 2\tau$, dann hätten wir die Punkte

$$s_k = e^{i(\sigma_0 + k\tau)} \in S \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, \left[\frac{2\pi - \sigma_0}{\tau}\right]$$

und

$$t_l = e^{i(\tau_0 - l\tau)} \notin S \quad \text{für} \quad l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{2\pi - \tau_0}{\tau}\right].$$

Im Besonderen könnten wir also

$$\tau < \sigma_0 + k\tau < \tau_0 - l\tau < \sigma_0 + (k+1)\tau < \tau_0 - (l-1)\tau < 2\pi$$

oder

$$\tau < \tau_0 - l\tau < \sigma_0 + k\tau < \tau_0 - (l-1)\tau < \sigma_0 + (k+1)\tau < 2\pi$$

finden. In beiden Fällen gäbe das zwei getrennte gleichgerichtet kongruente Kreisbögen der Länge $|(\tau_0 - \sigma_0) - (l+k)\tau|$ mit einem Endpunkt in S und dem anderen im Komplement von S. Wie oben bemerkt widerspricht dies der F-Eigenschaft. Da τ beliebig klein gewählt werden kann, folgt nun, dass überhaupt die Bedingung $0 < \sigma_0 < \tau_0 < 2\pi$ mit $e^{i\sigma_0} \in S$, $e^{i\tau_0} \notin S$ nicht erfüllbar ist. Mit anderen Worten: S ist ein Kreisbogen $\{e^{i\sigma} \mid 0 < \alpha \leq \sigma \leq 2\pi\}$.

Im Fall dass S auf einer Geraden liegt, zeigt man auf ganz analoge Weise, dass vier Punkte $s < t < s_1 < t_1$ mit $s, s_1 \in S$; $t, t_1 \notin S$ der F-Eigenschaft widersprechen würden. Es muss also S aus einer Strecke (Gerade, Halbgerade, Punkt, Nullmenge) oder deren Komplement bestehen.

Satz 1 folgt nun, da eine Menge der F-Eigenschaft für Spiegelungen an Ebenen nach Lemma 4 kreiskonvex ist und daher nach Lemma 3 die angegebenen Eigenschaften besitzt.

Der Begriff der F-Eigenschaft wirft viele interessante Fragen auf. Zum Beispiel hat jede projektivkonvexe Menge die F-Eigenschaft für Translationen, das führt zu folgender Frage:

Problem. Ist jede abgeschlossene Menge eines reellen Vektorraumes mit der F-Eigenschaft für Translationen projektivkonvex? In der Ebene lässt sich dieses Problem leicht positiv beantworten. In höheren Dimensionen scheint die Antwort komplizierter.

Beweis von Satz 2. Wir konstruieren eine ebene Menge S, die gleichzeitig mit ihrem Komplement überall dicht ist und die Eigenschaft besitzt, dass für jede Menge S_1, die aus S durch nichtidentische orientationserhaltende Kongruenz entsteht, die Menge $S - S \cap S_1$ jede die Ebene trennende Menge trifft. Diese Konstruktion geschieht durch transfinite Induktion. Wir wohlordnen die Punkte $\{X_\alpha\}$ der Ebene, die nichtidentischen orientationserhaltenden Kongruenzen $\{T_\alpha\}$ der Ebene und die abgeschlossenen Mengen $\{M_\alpha\}$ der Ebene, die die Ebene trennen, nach dem initiellen Ordnungstyp der Mächtigkeit C. Es seien nun für die Ordnungstypen $\beta < \alpha$, $(|\alpha| < C)$, die Mengen S_β und S'_β so definiert, dass

$$(S_\beta - T_\gamma(S_\beta) \cap S_\beta) \cap M_\delta \neq O \quad \text{und} \quad (S'_\beta - T_\gamma(S'_\beta) \cap S'_\beta) \cap M_\delta \neq O \quad \text{für alle } \gamma, \delta \leqslant \beta$$

und

$$|S_\beta| < C, \quad |S'_\beta| < C, \quad S_\beta \cap S'_\beta = \emptyset.$$

Dann setzen wir $S_\alpha = U_\alpha \cup V_\alpha$ und $S'_\alpha = U'_\alpha \cup V'_\alpha$, wo $U_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} S_\beta$ und $U'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} S'_\beta$. Die Mengen V_α und V'_α werden selbst induktiv definiert durch $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V_{\alpha\beta}$ und $V'_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} V'_{\alpha\beta}$, wo $V_{\alpha\beta}$ aus dem ersten Element X_γ von M_β besteht, das nicht Fixpunkt einer der Transformationen T_δ, $\delta \leqslant \alpha$ ist und für das

$$X_\gamma \notin U'_\alpha \cup \bigcup_{\varepsilon<\beta} V'_{\alpha\varepsilon} \quad \text{und} \quad T_\delta^{-1}(X_\gamma) \notin U_\alpha \cup \bigcup_{\varepsilon<\beta} V_{\alpha\varepsilon} \quad \text{für alle } \delta \leqslant \alpha .$$

Da $|M_\beta| = C$ und die rechtsgeschriebenen Mengen von einer Mächtigkeit $< C$ muss so ein X_γ existieren. Wir definieren nun

$$V'_{\alpha\beta} = \bigcup_{\delta \leq \alpha} T_\delta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \cup \{X'_\varepsilon\},$$

wo X'_ε das erste Element von M_β ist, das nicht zu $U_\alpha \cup \bigcup_{\delta<\beta} V_{\alpha\delta}$ gehört.

Wenn nun $S = \bigcup S_\alpha$, dann enthält für jedes Paar von Ordinalzahlen β, γ ($|\beta|, |\gamma| < C$) die Menge $(S - T_\beta(S)) \cap M_\gamma$ die Punkte von $V_{\alpha\gamma}$ für jedes $\alpha \geqslant \max\{\beta, \gamma\}$. Die Menge $S - T_\beta(S)$ ist also zusammenhängend und S ist überall dicht. Andererseits trifft die Komplementärmenge $S' = \bigcup S'_\alpha$ nach Konstruktion auch jedes M_γ, ist also sicher überall dicht.

Mit derselben Methode könnte man folgende Verallgemeinerung von Satz 2 beweisen:

Satz 2'. Es sei T eine Menge von eineindeutigen Abbildungen eines reellen Vektorraumes V der Dimension $\leqslant \aleph_0$ in sich, so dass $|T| \leqslant C$ und die Fixpunkte von weniger als C Abbildungen aus T den Raum nicht trennen. Dann gibt es eine Menge $S \subset V$, die zugleich mit ihrem Komplement überall dicht ist und die die F-Eigenschaft für T hat.

Paul Erdös, Mathematisches Institut, Budapest und
E. G. Straus*), University of California, Los Angeles

LITERATUR

[1] L. Fejes-Tóth, *Eine Kennzeichnung des Kreises*, El. Math. *21*, 25–27 (1967).
[2] H. Kneser, *Eine Erweiterung des Begriffes «konvexer Körper»*, Math. Ann. *82*, 287–296 (1921).

*) The work of the second author was supported in part by a grant from the National Science Foundation.

Ungelöste Probleme

Nr. 49. Es bezeichne R den dreidimensionalen euklidischen Raum, $Z \in R$ einen fest gewählten Ursprung und $A \subset R$ einen eigentlichen Eikörper, der den Ursprung enthält, so dass fortab stets $Z \in A$ vorausgesetzt ist. Bedeutet V das Volumen, so gilt offenbar $V(A) > 0$. Ferner bezeichne $E_u \subset R$ die durch Z hindurchgehende Ebene, deren Normalenrichtung durch den Einheitsvektor u gegeben ist. Schliesslich soll f den ebenen Flächeninhalt anzeigen, so dass $f(A \cap E_u)$ die Schnittfläche darstellt, welche die Ebene E_u aus dem Eikörper A ausschneidet.

Unser Interesse gilt den beiden durch die Ansätze

$$p = \sup_A \inf_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \tag{1}$$

$$q = \inf_A \sup_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \tag{2}$$

definierten Zahlwerten. Die Existenz von q ist trivial, diejenige von p ergibt sich weiter unten.

Das mit (1) angesetzte Problem in etwas anderer gleichwertiger Weise formuliert, lautet wie folgt: