Ramsey és Van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről

Erdős Pál

Ramsey[1] egy ismert tétele szerint minden $i \leqq k$ és $i \leqq l$ egész számokhoz létezik egy legkisebb $f(i, k, l)$ szám, melyre ha egy $n \geqq f(i, k, l)$ elemű halmaz i-ed osztályú kombinációit két osztályba osztjuk, akkor vagy van k elem, melynek összes i-ed osztályú kombinációja az első osztályban van, vagy van l elem, melynek összes i-ed osztályú kombinációja a második osztályban van. E cikkben csak az $i=2$ esettel fogunk foglalkozni, s $f(2, k, l)$ helyett $f(k, l)$-et fogunk írni. $i=2$ esetre Ramsey tétele így is fogalmazható: $f(k, l)$ az a legkisebb szám, melyre ha egy $f(k, l)$ szögpontú teljes gráf éleit két osztályba soroljuk vagy az első osztály tartalmaz egy k szögpontú teljes részgráfot vagy a második osztály egy l szögpontú teljes részgráfot. Triviális, hogy $f(2, l)=l$, $f(k, 2)=k$. Fennáll továbbá [1, 2] ($c_1, c_2, \ldots$ pozitív konstansok)

$$l\binom{k+l-2}{k-1}^{c_1} < f(k, l) < \binom{k+l-2}{k-1} \qquad (0 < c_1 < 1).$$

A legérdekesebb esetek $k=l$ és $l=3$. Ha $k=l$, akkor[3]

$$2^{k/2} < f(k, k) \leqq \binom{2k-2}{k-1} \tag{1}$$

$f(k, k)$ pontos értékét nagyon nehéz lesz meghatározni, még azt se sikerült bebizonyítani, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f(k, k)^{1/k}$ létezik.

Ha $l=3$, akkor[4]

$$\frac{c_2 k^2}{\log k} < f(k, 3) \leqq \binom{k+1}{c}.$$

Nem sikerült eldöntenem vajon $f(k, 3) > c_3 k^2$ igaz-e?

Célszerű lesz Ramsey tételét a következőképpen átfogalmazni: Jelentse $g(n)$ azt a legnagyobb egész számot, melyre ha egy n szögpontú gráf éleit két osztályba osztjuk mindig van egy $G^{g(n)}$ ($G^{(r)}$ egy r szögpontú teljes részgráfot fog jelölni), melynek élei ugyanabban az osztályban vannak. (1)-ből azonnal nyerjük, hogy

$$(2)\qquad \frac{\log n}{2\log 2} < g(n) < \frac{2\log n}{\log 2}.$$

Nem tudom bebizonyítani, hogy

$$\lim_{n=\infty} g(n)/\log n$$

létezik (könnyű belátni, hogy ez equivalens $\lim\limits_{k\to\infty} f(k,k)^{1/k}$ létezésével).

Vizsgáljuk ármost a következő kérdést: Egy n szögpontú teljes gráf éleit két osztályba osztjuk. Létezik-e egy $k=k(n)$ szögpontú részgráf ($k=k(n)$ csak n-től függ, s nem függ a beosztástól), melyre vagy az első osztály élei, vagy a második osztály élei túlsúlyban vannak? (hogy mit jelent „túlsúlyban vannak" azt persze még precizírozni kell). Ily tétel persze csak akkor érdekes, ha $k(n)$-re jobb alsó becslést kapunk, mint amit (2) ad.

Jelöljön $G(n)$ egy n szögpontú teljes gráfot, $x_1, \ldots, x_n$ legyenek szögpontjai s $e(i,j)$ jelölje az x_i és x_j pontokat összekötő élet. Legyen $h(i,j) = +1$, ha az $e(i,j)$ él az első osztályban van, s $h(i,j) = -1$ ha a másodikban van. $G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ jelölje az $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ pontok által feszített teljes részgráfot s

$$H(G^{(r)}) = H(x_1, \ldots, x_{i_r}) = \Sigma h(i_{j_1}, i_{j_2}),$$

ahol az összegezés $G(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ összes élére ki van terjesztve.

Legyen $0<\varepsilon<1$, jelölje $g(\varepsilon, n)$ azt a legnagyobb számot, melyre ha egy n szögpontú gráf éleit két osztályba osztom, akkor mindig van egy $G^{(r)}$, $r \geqq g(\varepsilon, n)$, melyre

$$(3)\qquad |H(G(r))| > \varepsilon\tbinom{r}{2}.$$

I. Tétel.

$$(4)\qquad \frac{\log n}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}100\log 2} < g(\varepsilon, n) < \frac{10\,000\log n}{\varepsilon^2}.$$

Látjuk, hogy (4) $g(\varepsilon, n)$-re a helyes nagyságrendet adja. (4)-et könnyű lenne élesíteni. Valószínűleg igaz, hogy

$$(5)\qquad \lim_{n=\infty} g(\varepsilon, n)/\log n = F(\varepsilon)$$

ahol $F(\varepsilon)$ a $(0,1)$ intervallumban monoton csökkenő függvény. (5) bizonyítása nem látszik könnyűnek. A tétel csak ε kis értékeire érdekes s érdemes lenne (4) alsó és felső becslését ε-tól függően javítani. Ez eddig nem sikerült nekem.

Legyen

$$H(n) = \min \max_{1 \leqq r \leqq n} |H(G^{(r)})|$$

ahol a maximumot $G^{(n)}$ összes r szögpontú teljes részgráfjaira kell venni, s a minimumot az élek összes két részre való osztályozására kell venni. Ekkor fennáll a

II. Tétel.

$$\frac{n}{4} \leqq H(n) < C_4 n^{3/2}.$$

Valószínűnek látszik, hogy a felső becslés igen rossz, talán az alsó becslés sincs túlságosan messze $H(n)$ valódi nagyságrendjétől, de $\frac{1}{4}$ biztosan helyettesíthető lesz nagyobb értékkel.

Az I. és II. tételeknél a felső becslés bizonyításához egyszerű valószínűségszámítási módszereket fogunk használni.

Általánosabban jelentse $g(i, \varepsilon, n)$ azt a legnagyobb számot, melyre ha egy n elemű halmaz összes i elemű részhalmazait két osztályba osztjuk, akkor mindig van egy $r \geqq g(i, \varepsilon, n)$ elemű halmaz $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$, melyre

$$|H_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})| < \varepsilon \binom{r}{i}$$

($H_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ a következőképpen van definiálva: $h_i(x_{u_1}, \ldots, x_{u_i}) = 1$ ha $x_{u_1}, \ldots, x_{u_i}$ az első osztályban van, különben h_i értéke -1. $H_i(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = \Sigma h_i$ ahol az összegezés az ösres i elemű részhalmazokra van kiterjesztve.) Egyszerű valószínűségszámítási módszerekkel be tudom bizonyítani, hogy

(6) $$g(i, \varepsilon, n) < C_5^{(i)}(\varepsilon)(\log n)^{1/i-1}$$

(6) bizonyítását nem részletezem, mert hasonló az I. és II. tételek bizonyításához, (lásd még a [3] alatt idézett cikk módszerét). Könnyű lenne $C_5^{(i)}(\varepsilon)$-ra i és ε-tól függő explicit becslést adni.

Lehetséges, hogy

(7) $$g(i, \varepsilon, n) > C_6^{(i)}(\varepsilon)(\log n)^{1/i-1}$$

(7) ha igaz, főleg azért lenne érdekes, mert mint ismeretes[5] $f(i, k, l)$ $i > 3$-ra sokkal gyorsabban tart a végtelenhez, mint $f(2, k, l) = f(k, l)$ (ez valószínűleg $i = 3$-ra is igaz) s érdekes lenne, ha $g(i, \varepsilon, n)$ minden i-re nagyjából egyformán viselkedne. (7)-et azonban nem tudom bebizonyítani.

Van der Waerden egy ismert tétele szerint létezik egy legkisebb $A(k)$, melyre ha az $1 \leqq t \leqq A(k)$ intervallumban az egész számokat két osztályba osztjuk, akkor legalább az egyik rész tartalmaz k tagú számtani sort. $A(k)$-ra csak nagyon gyenge felső becslés ismeretes. RADÓ s a szerző bebizonyították, hogy

$$A(k) > 2^{k/2}(k-1)^{1/2}. \tag{8}$$

SCHMIDT e becslést javította, kimutatta, hogy

$$A(k) > 2^{k - c_6 (k \log k)^{1/2}}.$$

Jelentse $B(n)$ azt a legnagyobb egész számot, melyre ha az $1 \leqq t \leqq n$ intervallum számait két osztályba osztom, legalább az egyik osztály tartalmaz $B(n)$ tagú számtani sort. Van der Waerden tétele miatt $\lim\limits_{n \to \infty} B(n) = \infty$ és Schmidt eredménye miatt

$$B(n) < (1-\eta) \frac{\log n}{\log 2}$$

minden $\eta > 0$-ra ha $n > n_0(\eta)$.

Legyen $h(m) = +1$ ha m az első osztályban van, s $h(m) = -1$ ha m a második osztályban van. Legyen $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$. $B(\varepsilon, n)$ jelentse azt a legnagyobb számot, melyre ha az $1 \leqq t \leqq n$ intervallum számait két részre osztom, akkor mindig van egy $l \geqq B(\varepsilon, n)$ tagú számtani sor $0 < a < a+d < \ldots < a+(l-1)d \leqq n$, melyre

$$\left| \sum_{u=0}^{l-1} h(a+ud) \right| \geqq \varepsilon l.$$

Nyilván $B(1, n) = B(n)$.

III. Tétel.

$$B(\varepsilon, n) < \frac{100\,000 \log n}{\varepsilon^2}. \tag{9}$$

A III. Tétel bizonyítását csak vázolni fogjuk, mert nagyon hasonlít az I. és II. tételek, valamint (8) bizonyításához. Lehetséges, hogy (9) $B(\varepsilon, n)$-re már helyes nagyságrendet adja, sőt talán $B(\varepsilon, n)/\log n$ minden ε-ra létezik. Talán $\varepsilon = 1$-re e limes 0.

Az $\varepsilon = 0$ esetre vonatkozik a következő kérdés: Legyen $D(k)$ az a legkisebb szám, melyre, ha az $1 \leqq t \leqq D(k)$ intervallum számait két részre osztjuk, akkor mindig van egy $2k$ tagú számtani sor $a, a+d, \ldots$ $\ldots, a+(2k-1)d$, $0 < a$, $a+(2k-1)d \leqq D(k)$, melyre

$$\sum_{u=0}^{2k-1} h(a+ud) \neq 0.$$

Könnyű belátni, hogy $D(k) < C_7 k^2$, de talán $D(k) < C_8 k$. Az analog kérdés gráfokra nem érdekes. Könnyű ugyanis belátni, hogy minden $G^{(n)}$ tartalmaz egy $G^{(n-1)}$-et, melyre $H(G^{(n-1)}) \neq 0$.

I. Tétel bizonyítása. Először (9)-ben alsó becslést igazoljuk. (2) miatt nyilván az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $G^{(n)}$-nek van oly $2k$ szögpontú részgráfja $G^{(2k)}$, melyre $k = \left[\frac{\log n}{4 \log 2}\right]$ és melynek minden éle az első osztályban van. Legyenek $G^{(2k)}$ szögpontjai $x_1, \ldots, x_{2k}$ és legyen $y_1, \ldots, y_t$

$$t = \left[\frac{k}{20\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right] \tag{10}$$

$G^{(n)}$ t tetszőleges az x-ektől különböző pontja. Ha tételünk nem lenne igaz, akkor nyilván

$$|H(y_1, \ldots, y_t)| \leqq \varepsilon \binom{t}{2}. \tag{11}$$

Továbbá

$$\begin{gathered} |H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_t)| = \\ = \left| \binom{k}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq k \\ 1 \leqq j \leqq t}} h(x_i, y_j) + H(y_1, \ldots, y_t) \right| \leqq \varepsilon \binom{k+t}{2} \end{gathered} \tag{12}$$

és hasonlóképpen

$$\begin{gathered} |H(x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t)| = \\ = \left| \binom{k}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq k \\ 1 \leqq j \leqq t}} h(x_i, y_j) H(y_1, \ldots, y_t) \right| \leqq \varepsilon \binom{k+t}{2} \end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered} |H(x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t)| = \\ = \left| \binom{2k}{2} + \sum_{\substack{1 \leqq i \leqq 2k \\ 1 \leqq j \leqq i}} h(x_i, y_j) + H(y_1, \ldots, y_t) \right| \leqq \varepsilon \binom{k+2t}{2} \end{gathered} \tag{14}$$

(11), (12), (13) és (14)-ből nyerjük, hogy

$$\left\{ \begin{aligned} & H(x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t) - H(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_t) - \\ & - H(x_{k+1}, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_t) + H(y_1, \ldots, y_t = \\ & = \binom{2k}{2} - 2\binom{k}{2} = k^2 \leqq 4\varepsilon \binom{k+2t}{2} < 2\varepsilon (k+2t)^2. \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Ha $0<\varepsilon\leqq\frac{1}{4}$, akkor azonban (15) (10)-nek ellentmond, s ezzel ha $\varepsilon<\frac{1}{4}$ (4)-ben az alsó becslés igazolva van. Ha $\varepsilon\geqq\frac{1}{4}$, akkor $H(x_1, \ldots, x_{2k})=\binom{2k}{2}$ igazolja állításunkat. A 100 constanst könnyű lenne egy kisebb konstanssal helyettesíteni.

Most rátérünk (4) felső becslésének bebizonyítására. A $G^{(n)}$ gráf élein definiált különböző $h(i,j)$, $1\leqq i\leqq j\leqq n$ függvények száma nyilván $2^{\binom{n}{2}}$, ugyanis minden (i,j) élpárra $h(i,j)$ értékét $+1$-nek vagy -1-nek választhatjuk. Legyen $G^{(r)}$ egy fix r szögpontú teljes részgráfja. Meghatározzuk, hogy hány olyan $h(i,j)$, $1\leqq i\leqq j\leqq n$ függvény van, melyre

$$|H(G^{(r)})|<\varepsilon\binom{r}{2} \tag{16}$$

$G^{(n)}$ azon $\binom{n}{2}-\binom{r}{2}$ élei, melyek nincsenek $G^{(r)}$-ben nyilván $2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}$ ily függvényt adnak. $G^{(r)}$ élein viszont (16) miatt mint könnyű belátni

$$\sum\nolimits_1\binom{\binom{r}{2}}{u}+\sum\nolimits_2\binom{\binom{r}{2}}{u}$$

ily függvény van, ahol Σ_1-ben $0\leqq u\leqq\binom{r}{2}\frac{1-\varepsilon}{2}$ és Σ_2-ben $\binom{r}{2}\frac{1+\varepsilon}{2}\leqq u\leqq\binom{r}{2}$. Azon $G^{(r)}$ élein definiált $h(i,j)$ függvények száma ugyanis, melyekre pontosan u él van, melyre $h(i,j)=1$ nyilván $\binom{\binom{r}{2}}{u}$. (16) miatt viszont vagy $0\leqq u\leqq\frac{1-\varepsilon}{2}\binom{r}{2}$ vagy $\frac{1+\varepsilon}{2}\binom{r}{2}\geqq u\geqq$ $\geqq\binom{r}{2}$.

Keresett függvényeink száma tehát

$$2^{\binom{n}{2}-\binom{r}{2}}\left(\sum\nolimits_1\binom{\binom{r}{2}}{u}+\sum\nolimits_2\binom{\binom{r}{2}}{u}\right) \tag{17}$$

Egyszerű számolással nyerjük, hogy (a részleteket itt az olvasóra bízzuk)

$$\sum\nolimits_1\binom{\binom{r}{2}}{u}+\sum\nolimits_2\binom{\binom{r}{2}}{u}<2^{\binom{r}{2}}e^{-\frac{\varepsilon^2r^2}{10\,000}} \tag{18}$$

$G^{(n)}$ $G^{(r)}$ típusú részgráfjainak száma nyilván $\binom{n}{r}$. (17) és (18)-ból tehát nyerjük, hogy $G^{(n)}$ élein definiált azon $h(i,j)$ függvények száma, melyekhez van egy $G^{(r)}$, melyre (16) teljesül kisebb mint

$$2^{\binom{n}{2}}\binom{n}{r}e^{-\varepsilon^2 r^2/10\,000} < 2^{\binom{n}{2}} n^r e^{-\varepsilon^2 r^2/10\,000} \leqq 2^{\binom{n}{2}}$$

ha

$$r \geqq \frac{10\,000 \log n}{\varepsilon^2}. \tag{19}$$

Tehát ha (19) fennáll van oly $h(i,j)$ függvény, melyre (16) $G^{(n)}$ egyetlen r szögpontú részgráfra se áll fenn. Ekkor azonban minden $l \geqq r$ esetén is fennáll, hogy

$$|H(G^{(l)})| \leqq \varepsilon \binom{l}{2} \tag{20}$$

Fennáll ugyanis (az összegezést $G^{(l)}$ összes r szögpontú részgráfjára kell kiterjeszteni)

$$H(G^{(l)}) = \sum H(G^{(r)}) \Big/ \binom{l-2}{r-2} \tag{21}$$

$G^{(l)}$ minden éle ugyanis $\binom{l-2}{r-2}$ $G^{(r)}$-ben fordul elő. (21)-ből $|H(G^{(r)})| \leqq \varepsilon \binom{r}{2}$ miatt

$$|H(G^{(l)})| \leqq \binom{l}{r} \varepsilon \binom{r}{2} \left(\binom{l-2}{r-2}\right)^{-1} = \varepsilon \binom{l}{2},$$

azaz (21) be van bizonyítva.

(4) $G(\varepsilon, n)$ valódi nagyságrendjét megadva, de $G(\varepsilon, n)$-nek ε-tól való pontos függését nem adja meg. A tétel ezen hiányosságán egyelőre nem tudok segíteni. 10 000 helyett persze könnyű lenne kisebb constanst találni, de $\frac{1}{\varepsilon^{1/2}}$ és $\frac{1}{\varepsilon^2}$ tényezőket nem tudom gyorsabban, illetve lassabban a végtelenhez tartó függvényekkel helyettesíteni.

II. Tétel bizonyítása. Először az alsó becslést bizonyítjuk. Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $h(1,i)=1$ i-nek legalább $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ értékére s hogy ezek $i=2, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Ha $H\left(x_2, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) \leqq$ $\leqq -\frac{n}{4}$, akkor készen vagyunk. Ha $H\left(x_2, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) > -\frac{n}{4}$, akkor viszont $H\left(x_1, \ldots, x_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right) \geqq \frac{n}{4}$, s ezzel állításunk igazolva van.

$H(n$-re vonatkozó felső becslés bizonyítását nem részletezzük, mert hasonlít az I. Tétel bizonyításához. Ugyanúgy, mint (17) és (18)-ban egyszerű számolással adódik hogy ha $G^{(r)}$ $G^{(n)}$ egy tetszőleges r szögpontú teljes részgráfja, akkor azon $h(i,j)$ függvények száma, melyekre $|H(G^{(r)})| \geqq C_4 n^{3/2}$ kisebb, mint $2^{\binom{n}{2}-n}$ (ha C_4 egy elég nagy abszolút constanst). Minthogy $G^{(n)}$-nek 2^n teljes részgráfja van, van oly h függvény, melyre minden $G^{(r)}$-re $|H(G^{(r)})| \leqq C_4 n^{3/2}$ s ezzel a II. Tétel igazolva van.

III. Tétel bizonyítása. Legyen $a, a+d, \ldots, a+(l-1)d$, $0<a$, $a+(l-1)d \leqq n$ egy fix l tagú számtani sor. Azon h függvények száma melyekre

$$\left|\sum_{u=0}^{l-1} h(a+ud)\right| \geqq \varepsilon_1 l \tag{22}$$

nem nagyobb mint

$$2^{n-l}\left(\sum\nolimits_1 \binom{l}{r} + \sum\nolimits_2 \binom{l}{r}\right) < 2^n e^{-\varepsilon^2 l/10\,000} \tag{23}$$

ahol Σ_1-ben $0 \leqq r \leqq \frac{l(1-\varepsilon)}{2}$ és Σ_2-ben $\frac{l(1+\varepsilon)}{2} \leqq r \leqq l$, (23) bizonyítása ugyanúgy történik, mint (17) és (18) bizonyítása. Az $1 \leqq t \leqq n$ intervallum l tagú számtani sorainak száma nyilván $<n^2$. Tehát (23) miatt azon h függvények száma, melyekhez van legalább egy $l \geqq \frac{100\,000 \log n}{\varepsilon^2}$ tagú számtani sor, melyre (22) teljesül, kisebb mint

$$2^n n^2 \sum_l{}' e^{-\varepsilon^2 l/10\,000} > 2^n \tag{24}$$

Σ'-ben $l > \frac{100000 \log n}{\varepsilon^2}$. (24) miatt van legalább egy h fü ggvény melyre (23) egyetlen $l \geqq \frac{100\,000 \log n}{e^2}$ tagú számtani sorra se teljesül, s ezzel (9) azaz a III. Tétel igazolva van.

IRODALOM

[1] P. Erdős and G. Szekeres, A combinatorial problem in geometry, Compositio Math. 2 (1935), 463–470.

[2] P. Erdős, Graph theory and probability, Canad. Journal of Math. 11 (1959), 34–38.

[3] P. Erdős, Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 292–299.

[4] P. Erdős, Graph theory and probability II. Canad. Journal of Math. 13 (1961), 346–352.
[5] P. Erdős and R. Rado, Combinatorial theorems on classifications of subset of a given set, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952), 438–939 és Hajnal András előadása Dobogókői gráfelméleti kollokviumon „A particiokalkulus egy véges halmazokra vonatkozó tételéről", Mat. Lapok XI. (1960), 209–210.
[6] W. M. Schmidt, Two combinatorial theorems on arithmetic progressions, Duke Math. Journal, 29 (1962), 129–140.

О КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧАХ СВЯЗАННЫХ С ТЕОРЕМОЙ РАМСЕЙЯ — ВАН ДЕР ВАРДЕНА

П. Эрдёш

ON COMBINATORIAL PROBLEMS CONCERNING A THEOREM OF RAMSEY AND VAN DER WAERDEN

P. Erdős

Denote by $G^{(n)}$ the complete graph of n vertices $x_1, \ldots, x_n$. The edge connecting x_i and x_j is denoted by (i, j). Let $h(i, j)$, $1 \leqq i \leqq j \leqq n$ be an arbitrary function which takes on the values ± 1. $H(G^{(r)}) = \Sigma h(i, j)$ where the summation is extended over all the edges of the subgraph $G^{(r)}$ of $G^{(n)}$ and

$$H(n) = \min \max_{1 \leqq r \leqq n} |H(G^{(r)})|$$

where the maximum is to be taken over all subgraphs of $G^{(n)}$ and the minimum over all functions $h(i, j)$.

Let $0 < \varepsilon < 1$. Denote by $g(\varepsilon, n)$ the largest integer for which there exists for every function h a subgraphs $G^{(r)}$ or $G^{(n)}$ satisfying $r \geqq g(\varepsilon, n)$ and $H(G^{(r)}) \geqq \varepsilon \binom{r}{2}$.

The author proves that

$$\frac{\log n}{100\varepsilon^{\frac{1}{2}} \log 2} < g(\varepsilon, n) < \frac{10\,000 \log n}{\varepsilon^2} \tag{1}$$

and

$$\frac{n}{4} < H(n) < cn^{3/2}. \tag{2}$$

It would be interesting to improve the inequalities (1) and (2).

Let $h_1(m)$ be an arbitrary function defined on the integers which takes on the values ± 1. Let $B(\varepsilon, n)$ be the largest integer for which for every function h there always exists an arithmetic progression $0 < a < a + d < \ldots < a + (l-1)d < n$ of $l \geqq B(\varepsilon, n)$ terms for which $\left| \sum_{u=0}^{l-1} h(a + ud) \right| \geqq \varepsilon l$.

I proved

$$B(\varepsilon, n) < \frac{100\,000 \log n}{\varepsilon^2}. \tag{3}$$

No satisfactory lower estimation is known for $B(\varepsilon, n)$. The proof of the upper bounds in the inequalities (1), (2) and (3) use simple probabilistic arguments.