# QUELQUES PROBLÈMES DE THÉORIE DES NOMBRES

par Paul ERDÖS

## INTRODUCTION

Dans ce travail, nous nous proposons d'exposer quelques problèmes peu connus de Théorie des Nombres. Ces problèmes sont d'importances très diverses; quelques uns sont de simples exercices, d'autres par contre (par exemple les problèmes n$^{os}$ 7, 8, 9, 15, 20, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 37, 38, 42, 44, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61 et 71), sont des problèmes difficiles, peut-être pas sans importance, où il reste beaucoup de questions, sinon presque tout, à résoudre. La plupart de ces problèmes sont de nature combinatoire et, à vrai dire, nous pourrions parler de problèmes de la théorie combinatoire des nombres.

Pour limiter le sujet, nous n'envisagerons, à une exception près (problème 20), que des *entiers* naturels.

Bien entendu, je n'ai pas la prétention d'être complet et je me suis, dans une trop grande mesure peut-être, confiné dans des problèmes particuliers; mon excuse est que ce sont ceux que je connais le mieux. Les problèmes classiques seront laissés de côté.

Nous ne donnerons les solutions, ou des résumés de démonstrations, que lorsque celles-ci seront ou bien courtes, ou bien difficilement accessibles.

Cette monographie a été écrite en 1957-58. Depuis cette époque, j'ai publié un autre ouvrage: Some unsolved problems, *Publ. Inst. Hung. Acad. Sci.* 6 (1961), 221-259; voir aussi: Problèmes extrémaux en théorie des nombres (en hongrois), *Mat. Lapok*, **13** (1962), 228-255 [1])

---

[1]) Les références bibliographiques ont été indiquées avec les abréviations habituelles utilisées par les *Mathematical Reviews*.

## I. Problèmes de divisibilité dans les suites finies

### *Problème 1.*

Si $n+1$ nombres entiers sont $\leqq 2n$, l'un au moins d'entre eux est divisible par un des autres.

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 42 (1935), p. 396, problème 3739; solution par Martha Wachsberger et E. Weiszfeld dans *Am. math. Monthly*, 44 (1937), p. 120.

*Démonstration :*

Soient:

$$1 \leqq a_1 < a_2 \dots < a_{n+1} \leqq 2n$$

$n+1$ entiers $\leqq 2n$. On peut écrire:

$$a_i = 2^{\alpha_i} . \beta_i (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

où les $\beta_i$ sont des entiers impairs.

Comme il n'existe que $n$ entiers impairs inférieurs à $2n$ et qu'il y a $n+1$ facteurs $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1}$, on doit avoir

$$\beta_{i_1} = \beta_{i_2},$$

pour au moins deux indices $i_1$, $i_2$ différents. Donc:

$$a_{i_1} = 2^{\alpha_{i_1}} . \beta, \qquad a_{i_2} = 2^{\alpha_{i_2}} . \beta$$

avec $\beta = \beta_{i_1} = \beta_{i_2}$ ; ce qui démontre la proposition.

### *Problème 2.*

Soient $n$ entiers tels que

$$1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n \leqq 2n,$$

et tels qu'aucun d'entre eux ne soit divisible par un des autres. Quelle est la plus petite valeur de $a_1$ ?

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 44 (1937), p. 179, problème 3820; solution par Emma Lehmer dans *Am. math. Monthly*, 49 (1939), p. 240.

La solution est $a_1 = 2^k$, avec

$$k = \left[\frac{\log 2n}{\log 3}\right]$$

*Problème 3.*

Dans une suite d'entiers bornés:

$$1 < a_1 < a_2 \dots a_k \leqslant x ,$$

telle qu'aucun d'entre eux ne divise le produit de tous les autres, montrer que:

$$k \leqq \pi(x) ;$$

où $\pi(x)$ désigne le nombre des entiers premiers inférieurs ou égaux à $x$.

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 50 (1943), p. 330, problème 4083; solution par W. Scobert, *Am. math. Monthly*, 51 (1944), p. 479.

*Démonstration:*

La décomposition en produit de puissances de facteurs premiers de chacun des entiers $a_i$ contient au moins un nombre premier $p_i$ avec un exposant supérieur (strictement) à l'exposant ($\geqq 0$) de $p_i$ dans la décomposition du produit de tous les autres $a_j$. Donc:

$$k \leqq \pi(x) .$$

*Problème 4.*

S. Pillai et G. Szekeres ont montré qu'il existe toujours, dans un ensemble de $k \leqq 16$ entiers consécutifs, un d'entre eux qui est premier avec chacun des autres.

Ultérieurement, A. Brauer et S. Pillai ont montré que la propriété précédente n'est plus vraie pour les ensembles de $k > 16$ entiers.

A. Brauer: On the Property of $k$ consecutive integers, *Bull. Am. math. Soc.*, 47 (1941), pp. 328-331; S. Pillai: On $m$ consecutive integers I, II, III, *Proc. Indian Acad. Sci.*, Sect. A, 11 (1940), pp. 6-12 et 73-80, 13 (1941), pp. 530-533.

Il est facile de voir que si, parmi $k$ entiers consécutifs, on trouve un nombre premier, on trouve aussi un nombre qui est premier à tous les autres. P. Erdös a montré (mais non publié) que cette propriété est aussi vraie pour une infinité de nombres non premiers.

Cette question se rattache au problème ancien, mais non encore résolu, qui consiste à montrer qu'un produit d'entiers consécutifs ne peut être une puissance exacte.

Voir par exemple: P. Erdös: On the product of consecutive integers, *Indigationes Math.*, 17 (1955), pp. 85-90.

*Problème 5.*

Soit une suite d'entiers bornés:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_k < x ;$$

tels que, pour tout indice $i$ différent des indices $j$ et $l$, l'entier $a_i$ ne divise pas le produit $a_j\, a_l$.

Quelle est la plus grande valeur possible de $k$ ?

Les meilleures approximations actuellement connues sont:

$$\pi(x) + c_1\, x^{2/3}/\log^2 x < k < \pi(x) + c_2\, x^{2/3}/(\log x)^2 ,$$

où $c_2 > c_1 > 0$.

P. Erdös: On sequence of integers no one of which divides the product of two others and related problem. *Mitt. Forsch. Inst. Math. Mec. Tomsk*, 2 (1938), pp. 74-82.

Pour établir la borne supérieure de $k$, on utilise le lemme suivant:

*Lemme:* Tout entier $m$ $(1 \leq m \leq n)$ peut être représenté sous la forme d'un produit $m = ab$, où $b \leq n^{3/5}$ et où $a$ vérifie une des quatre conditions:

ou bien $a \leq n^{3/5}$,
ou bien $a = pq$, $p \leq n^{1/3}$ et $q \leq n^{1/3}$,
ou bien $a = pr$, $p > n^{1/3}$ et $r < n/p^2$,
ou bien $a$ *premier*

avec $p$, $q$, $r$ premiers.

*Problème 6.*

Soit une suite d'entiers bornés:

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_k < x ,$$

telle que tous les produits deux à deux $a_i\, a_j$ soient différents.

Quelle est la valeur maximum de $k$ ?

P. Erdös a montré que:

$$\pi(x) + c_1\, x^{3/4}/\log^{3/2} x < k < \pi(x) + c_2\, x^{3/4}/\log^{3/4} x ,$$

avec $c_2 > c_1 > 0$.

Le meilleur résultat actuellement publié est:

$$k < \pi(x) + cx^{3/4} .$$

P. Erdös: On sequence of integers no one of which divides the product of two others and some related problem. *Mitt. Forsch. Inst. Math. Mec. Tomsk*, 2 (1938), pp. 74-82.

*Problème 7.*

Soit une suite d'entiers bornés:

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leqq x ,$$

telle que les produits $a_{i_1}.a_{i_2} \dots a_{i_r}$, où tous les indices $i$ sont différents, soient eux-mêmes différents.

Quelle est la valeur maximum de $k$ ?

En choisissant pour $a_i$ les entiers $p^{2^i}$ $(i = 0, 1, \dots)$ on voit que:

$$k \geqq \pi(x) + \pi(x^{1/2}) + \dots \qquad (1)$$

Mais Posa et Erdös ont remarqué que la somme (1) ne donne pas la valeur maximum de $k$. Il est probable que:

$$k < \pi(x) + cx^{1/2}/\log x .$$

On peut seulement déduire du lemme utilisé dans le problème 5 que:

$$k < \pi(x) + cx^{2/3}/(\log x)^2 .$$

*Problème 8.*

Plus généralement, soit une suite d'entiers bornés:

$$1 \leqq a_1 < \ldots < a_{k_r} \leqq x ,$$

telle que chaque terme $a_i$ ne divise aucun des produits de $r$ autres termes

$$a_{j_1} \cdot a_{j_2} \ldots a_{j_r} (a_i \neq a_{j_s} , \ 1 \leqq s \leqq r) .$$

Quelle est la valeur maximum du nombre de termes $k_r$ ?

On peut montrer que:

$$\pi(x) + c_1 x^{2/r+1}/(\log x)^2 < k_r < \pi(x) + c_2 x^{2/r+1}/(\log x)^2 .$$

Si on suppose en outre que tous les produits $a_{j_1} \ldots a_{j_s}$, $1 \leqq s \leqq r$ sont différents, quelle est la valeur maximum de $k_r$ ?

Pour $r \geqq 3$, on peut montrer que:

$$k_r < \pi(x) + 0 (x^{2/3+\varepsilon}) ,$$

où la notation $0(y)$ de BACHMANN représente un nombre dont le quotient par $y$ reste fini lorsque $y$ tend vers $\infty$.

*Problème 9.*

Soient deux suites d'entiers bornés:

$$1 \leqq a_1 < \ldots < a_x \leqq n ,$$

et

$$1 \leqq b_1 < \ldots < b_y \leqq n ,$$

telles que tous les produits $a_i b_j$ soient différents.

Est-il vrai que:

$$xy < c_1 n^2/\log n \ ?$$

*Remarque I:* On voit facilement qu'il existe de telles suites qui vérifient:

$$xy > c_2 n^2/\log n .$$

On peut par exemple choisir pour les $a_i$ des entiers $\leqq \frac{n}{2}$ et pour les $b_j$ des nombres premiers de l'intervalle $\left(\frac{n}{2}, n\right)$.

*Remarque II:* Je démontre que le nombre $A(n)$ des nombres $m \leqq n^2$ de la forme $xy$, $x \leqq n$, $y \leqq n$, satisfait à l'inégalité:

$$(\log n)^{-\varepsilon} \frac{n^2}{\log n} (e \log 2)^{\log\log n/\log 2} < A(n) < (\log n)^{\varepsilon} \frac{n^2}{\log n} (e \log 2)^{\log\log n/\log 2} .$$

P. Erdös: « Об одном ацимптотическом неравенстве в теори ичисеп », Вестник Пенинграпского Университета, 3 (1960), pp. 41-49; pour un résultat plus faible, voir P. Erdös: Some remarks on number theory, *Riveon Lematematika*, 9 (1955), pp. 45-48 (en hébreu).

*Problème 10.*

Pour une suite d'entiers:

$$1 \leqq a_1 < \ldots < a_k \leqq n ,$$

on désigne par $B(x)$ le nombre des entiers $\leqq x$ qui sont divisibles par au moins un des entiers $a_i$.

Est-il vrai que, pour tous les $x \geqq n$, on ait:

$$\frac{B(x)}{x} < 2 \frac{B(n)}{n} ?$$

Il est facile de voir que le coefficient 2 ne peut être amélioré, en choisissant par exemple $n = 2a_1 - 1$, $x = 2a_1$ $(a_2 > x)$. On sait qu'il existe, pour chaque $\varepsilon > 0$, une suite qui ne vérifie pas l'inégalité:

$$\frac{B(x)}{x} > \varepsilon \frac{B(n)}{n} .$$

A. S. Besicovitch: On the density of certain sequences: *Math. Annalen*, 110 (1934), pp. 336-341, et P. Erdös: Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other. *London Math. Soc. Journal*, 10 (1935), pp. 126-128.

*Problème 11.*

On désigne par

$$f(n; a_1, \ldots, a_k)$$

le nombre des entiers positifs $m$, $1 \leqq m \leqq n$ qui sont soit diviseurs, soit multiples des entiers $a_i$, $1 \leqq i \leqq k$.

En supposant que $1 \leq a_i \leq n$, montrer que:

$$f(n;\, a_1, \ldots, a_k) \leq f(n;\, 2, 3, \ldots, p_k)\,,$$

où $2, \ldots, p_k$ sont les $k$ premiers nombres premiers.

Problème posé par P. Erdös dans *Am. Math. Monthly*, 56 (1949), p. 479, problème 4352; solution par G. Szekeres, *Am. Math. Monthly*, 60 (1953), p. 717.

*Problème 12.*

Quel est le nombre maximum $k$ des entiers $a_i$ d'une suite:

$$1 \leq a_1 < \ldots < a_k \leq n\,,$$

telle que les plus petits communs multiples

$$[a_i,\, a_j],\ 1 \leq i < j \leq k$$

soient tous $\leq n^2$.

On peut voir que: $k \geq \dfrac{3}{2\sqrt{2}} \sqrt{n}$, en choisissant pour les $a$ tous les entiers $\leq \sqrt{\dfrac{n}{2}}$ et les entiers pairs jusqu'à $\sqrt{2n}$. On sait que $k \leq 2\sqrt{n}$ (*Mat. Lapok*, **2** (1951), p. 233).

*Problème 13.*

Dans une suite d'entiers:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n\,,$$

telle que les plus petits communs multiples $[a_i,\, a_j]$ soient $> n$, montrer que:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \leq \frac{3}{2}\,.$$

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 56 (1949), p. 637, problème 4365; solution par R. S. Lehman, *Am. math. Monthly*, 58 (1951), pp. 345-346.

*Démonstration :*

Un raisonnement analogue à celui du problème 1 montre que:

$$k \leq \left[\frac{n+1}{2}\right] \tag{1}$$

où $[x]$ désigne la partie entière du nombre $x$.

D'autre part, si l'entier $a_i$ figure dans la suite, aucun des entiers $b$ tels que $a_i b \leq n$ ne peut y figurer et ces entiers de la forme $a_i b$ sont tous différents; ces entiers $b$ sont au nombre de $\left[\frac{n}{a_i}\right]$ Donc:

$$\sum_{i=1}^{k} \left[\frac{n}{a_i}\right] \leq n-1\,,$$

donc encore:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n}{a_i} \leq n-1+k\,,$$

et, en comparant avec l'inégalité (1):

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n}{a_i} \leq n + \left[\frac{n}{2}\right] \leq \frac{3}{2}\,n\,.$$

D'où:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \leq \frac{3}{2}\,.$$

Schinzel et Szekeres ont démontré que

$$\sum \frac{1}{a_i} \leq \frac{31}{30}$$

l'égalité ayant lieu pour $n = 5$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$. Ils ont aussi démontré qu'à tout $\varepsilon > 0$ correspond un entier $n_0$, tel que, pour $n > n_0$, il existe une suite d'entiers vérifiant les conditions précédentes et

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} > 1-\varepsilon\,.$$

Il est probable que si les entiers $a_i$ vérifient les inégalités

$$a_1 < \ldots < a_k \leq n\,,$$

leurs plus petits communs multiples vérifient:

$$[a_i,\, a_j] > n\,,$$

pour tous $1 \leq i < j \leq k$. Si cela est vrai, il en résulte pour $n > n_0(\varepsilon)$:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < 1+\varepsilon\,.$$

A. SCHINZEL et G. SZEKERES: Sur un problème de M. Paul ERDÖS, *Acta Szegel*, 20 (1959), pp. 221-229.

*Problème 14.*

Dans une suite d'entiers bornés:

$$1 < a_1 < \ldots < a_k \leqq n ,$$

tels que $[a_i, a_j] > n$, on désigne par $A(n; a_1, \ldots, a_k)$ le nombre des entiers $\leqq n$, qui sont divisibles par un, au moins, des $a$.

Quel est le maximum de

$$k + A(n; a_1, \ldots, a_k) \ ?$$

Même question en remplaçant l'hypothèse $[a_i, a_j] > n$ par l'hypothèse qu'aucun des $a$ ne divise un autre.

Dans les deux cas, déterminer au moins la limite de

$$\max \left[k + A(n; a_1, \ldots, a_k)\right]/n .$$

*Problème 15.*

Soit $f(n)$ le plus petit entier positif tel qu'au moins un des entiers

$$n, n+1, \ldots, n+f(n) ,$$

divise le produit des autres. Il est facile de voir que:

$$f(k!) = k ,$$

et que pour $n > k!$:

$$f(n) > k .$$

On peut aussi montrer que, pour une infinité de valeurs de $n$:

$$f(n) > \exp\left((\log n)^{1/2-\varepsilon}\right) .$$

Mais il est difficile de trouver, pour $f(n)$, une borne supérieure qui soit bonne.

*Problème 16.*

Il est connu que quatre termes successifs d'une progression arithmétique ne peuvent tous être des carrés.

Il est aussi connu que la relation:

$$a(a+d)(a+2d)(a+3\mathrm{d}) = k^2 ,$$

est impossible en entiers $a$, $k$.

P. Erdös a émis l'hypothèse qu'à chaque $\varepsilon > 0$ correspond un entier $t_\varepsilon$ tel que, pour tout entier $t > t_\varepsilon$, le nombre de carrés dans une progression de $t+1$ termes:

$$a, a+d, \ldots, a+td ,$$

est $< \varepsilon t$.

Rudin a émis l'hypothèse que le nombre de carrés dans la progression:

$$a, a+d, \ldots, a+td ,$$

est inférieur à $c\sqrt{t}$, où $c$ est une constante absolue.

## II. Problèmes de divisibilité dans les suites infinies

*Problème 17.*

D'une suite infinie d'entiers:

$$a_1, a_2, \ldots$$

on peut toujours extraire une sous-suite telle que:

1) ou bien aucun de ses termes ne soit multiple d'un autre,
2) ou bien chacun de ses termes est le multiple d'un terme précédent.

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 56 (1949), p. 40, problème 4330; solution par R. S. Lehmer et G. A. Hedlund et R. C. Buck, *Am. math. Monthly*, 57 (1950), pp. 493-494.

On peut même montrer que, dans une suite de $(k-1)(l-1)+1$

entiers, il existe:

soit une sous-suite contenant $k$ entiers, telle qu'aucun d'entre eux ne soit le multiple d'un autre,

soit une sous-suite, contenant $l$ entiers, telle que chacun d'entre eux soit multiple d'un des précédents.

P. ERDÖS: Some remarks on the theory of graphs. *Bull. Amer. math. Soc.*, 53 (1947), pp. 292-294.

Pour des résultats combinatoires plus généraux, voir R. P. DILWORTH: A decomposition theorem for partially ordered sets. *Ann. of math.* (2), 51 (1950), pp. 161-166.

*Problème 18.*

Dans une suite infinie d'entiers:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_k < \dots$$

telle que

$$\lim_{k=\infty} \inf \frac{a_k}{k} < \infty$$

il existe toujours une sous-suite infinie dont chaque élément ne divise aucun autre. Il existe même une telle sous-suite $a_{i_k}$ qui vérifie en outre la relation

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_{i_k}} = \infty .$$

Problème posé par P. ERDÖS dans *Am. math. Monthly*, 56 (1949), p. 557, problème 4363; solution par P. ERDÖS dans *Am. math. Monthly*, 58 (1951), pp. 496-497.

*Problème 19.*

Etant donné une suite infinie d'entiers

$$a_1, a_2, \dots$$

telle qu'il n'existe pas de sous-suite infinie dont chaque élément ne divise aucun autre, la suite des éléments de la forme

$$\Pi\, a_i^{\alpha_i} ,$$

où les $\alpha_i$ sont des entiers arbitraires, vérifie la même propriété.

Problème posé par P. Erdös dans *Am. math. Monthly*, 56 (1949), p. 480, problème 4358; solution par P. Erdös et R. Rado, *Am. math. Monthly*, 59 (1952), pp. 255-257.

Ce résultat a aussi été démontré par Dickson dans le cas où les décompositions en facteurs premiers des entiers $a_i$ ne contiennent qu'un nombre fini de nombres premiers.

Pour un résultat plus général et plus difficile, voir G. Higmann : Ordering by divisibility in abstract algebras. *Proc. London math. Soc.* (3), 2 (1952), pp. 326-336.

*Problème 20.*

Etant donné une suite infinie d'entiers

$$a_1 < a_2 < \dots$$

telle qu'aucun de ses termes n'en divise un autre, Behrend a montré que:

$$\sum_{a_i < n} \frac{1}{a_i} < c \log n/(\log \log n)^{1/2} . \qquad (1)$$

F. Behrend : On sequence of numbers not divisible one by another. *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), pp. 42-44.

Soit maintenant une suite de nombres réels:

$$1 < a_1 < a_2 \dots$$

vérifiant, pour tous les entiers $i$, $j$ et $k$, la relation:

$$| k a_i - a_j | \geqq 1 .$$

1) La relation (1) est-elle encore vraie ?

2) A-t-on, au moins, la relation:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{a_i < n} \frac{1}{a_i} = 0 \ ?$$

Est-il vrai que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i \log a_i} < \infty \ ?$$

*Problème 21.*

Dans une suite infinie d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \dots$$

telle qu'aucun de ses termes n'en divise un autre, montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k \log a_k} < \infty . \tag{1}$$

P. Erdös: Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other. *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), pp. 126-128.

*Démonstration :*

On montre d'abord que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{p \leq a_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{a_k} \leq 1 \tag{2}$$

où les $p$ sont des nombres premiers; la relation (1) résulte ensuite de l'inégalité:

$$\prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{c}{\log x} \cdot$$

Pour démontrer (2), on considère les entiers de la forme:

$$a_k t\,, \quad \text{avec} \quad t < N/a_k\,,$$

tous les facteurs de $t$ étant $> a_k$. Tous ces nombres sont distincts et la densité de leur ensemble est égale à:

$$\prod_{p \leq a_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right) / a_k\,.$$

D'où résulte l'inégalité (2).

En répondant à une question de Turan, P. Erdös a démontré que, si $f(x) \to \infty$ est une fonction arbitraire, il existe une suite d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \dots$$

telle qu'aucun de ses termes n'en divise un autre et que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{a_k \log k} = \infty .$$

A. S. Besicovitch: On the density of certain sequences of integers. *Math. Ann.*, 110 (1934), pp. 336-341, donne un exemple de suite infinie d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

telle qu'aucun de ses termes n'en divise un autre et telle que la densité supérieure soit positive. Si $A(x)$ désigne le nombre des entiers $a_i \leq x$, la densité supérieure est définie par:

$$\overline{\lim}\, A(x)/x .$$

Sur ce genre de problème, on peut consulter: F. Behrend: On sequence of numbers not divisible on by another. *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), pp. 42-45. — P. Erdös: Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other. *J. London Math. Soc.*, 10 (1935), pp. 126-128, et 11 (1936), pp. 92-98. On the density of some sequences of integers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), pp. 683-692. — H. Davenport et P. Erdös: On sequences of positive integers. *J. Indian Math. Soc.*, 15 (1951), pp. 19-24, et *Acta Arithmetica*, 2 (1937), pp. 147-151.

*Problème 22.*

Peut-on trouver une condition nécessaire et suffisante, pour qu'à une suite d'entiers

$$b_1 < b_2 < \ldots$$

on puisse adjoindre une autre suite:

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

telle que $a_k \leq b_k$, pour $k > k_0$, et qu'aucun de ses termes n'en divise un autre ?

On doit peut-être poser ce problème pour les seules suites qui vérifient

$$\overline{\lim} \frac{a_k}{b_k} < \infty .$$

*Problème 23.*

H. Davenport et P. Erdös (voir problème 21) ont montré que, si on adjoint à une suite d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

la suite des entiers:

$$b_1 < b_2 < \ldots$$

qui ne sont divisibles par aucun des $a_i$, la densité logarithmique des $b_i$, c'est-à-dire,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{b_i < n} \frac{1}{b_i}$$

existe.

Soit maintenant une suite arbitraire d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

A chaque terme $a_i$, on associe $k_i$ congruences ($0 \leqq k_i \leqq a_i$):

$$x \equiv c_j^{(i)} \quad (\text{mod. } a_i). \tag{1}$$

Soit

$$b_1 < b_2 < \ldots$$

la suite des entiers qui ne vérifient aucune de ces congruences (1) avec $b \geqq a_i$; existe-t-il encore une densité logarithmique:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{b_i < n} \frac{1}{b_i} \cdot$$

*Problème 24.*

Davenport et P. Erdös ont montré que si la suite:

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

vérifie

$$A(x) > cx\,,$$

où $A(x)$ désigne le nombre d'entiers de la suite inférieurs ou égaux à $x$, il existe toujours une suite partielle $a_{i_k}$ pour laquelle le terme $a_{i_k}$ divise $a_{i_{k+1}}$. Dans la démonstration, on a besoin de l'inégalité:

$$\sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i} > c \log x \qquad (1)$$

au lieu de $A(x) > cx$.

H. Davenport et P. Erdös: On sequence of positive integers. *Acta arithmetica*, 2 (1937), pp. 147-151.

Est-il vrai que, si l'inégalité (1) est vérifiée, les égalités:

$$(a_i, a_j) = a_1\,, \qquad [a_r, a_s] = a_t\,,$$

avec:

$$a_i \neq a_1, a_j \neq a_1\,; \quad a_r \neq a_t, a_s \neq a_t\,,$$

ont chacune une infinité de solutions ?

Ce qui résulterait de la propriété purement combinatoire suivante: soit $A$ un ensemble de $n$ éléments et soient $A_1$, $A_2$, ..., $A_N$, $N$ sous-ensembles de l'ensemble $A$; il existe une constante absolue $c$, telle que, si $n > n_0$ et $N \geqq c.2^n$, on peut trouver trois sous-ensembles distincts $A_i$, $A_j$, $A_l$ où $A_l$ est formé par la réunion de $A_i$ et $A_j$.

Comparer avec E. Sperner: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. *Math. Z.*, 27 (1927), pp. 544-548.

Il me semble probable que, si, pour une suite illimitée, $A(x) > cx$ pour tous les $x$, le nombre des paires $a_i < a_j < y$, $a_i \,|\, a_j$, est plus grand que $By$ pour toute constante $B$ si $y$ est suffisamment grand.

*Problème 25.*

Soit

$$a_1 < a_2 < \ldots$$

une suite infinie d'entiers telle que, pour $n$ suffisamment grand, le nombre $f(n)$ de solutions de la relation

$$n = a_i a_j\,,$$

ne soit pas nul. Ce nombre $f(n)$ vérifie la relation:

$$\overline{\lim} f(n) = \infty . \tag{1}$$

La démonstration est assez difficile et n'a pas été publiée.

Un résultat plus fort serait le suivant:

Soient $t_1$ un entier et

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq x ,$$

une suite d'entiers telle que le nombre de solutions de la relation:

$$n = a_i a_j ,$$

soit $\leqq t_1$; le nombre $k$ des entiers de la suite vérifie l'inégalité:

$$k < \frac{c_1 x}{\log x} (\log \log x)^{t_2} ,$$

où $t_2$ est une fonction de $t_1$ seulement.

## III. Problèmes sur les sommes et les différences des termes d'une ou plusieurs suites

### *Problème 26.*

Montrer que les sommes

$$a_i + a_j, \ 1 \leqq i \leqq j \leqq k ,$$

de termes d'une suite d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k ,$$

où $k > 3.2^{l-1}$, ont au moins $l+1$ facteurs premiers distincts.

Paul Erdös et Paul Turán: On a problem in the elementary theory of numbers. *Amer. Math. Monthly*, 41 (1934), pp. 608-611.

Est-il possible d'améliorer l'estimation proposée pour $k$ ?

M. Surányi a donné l'estimation $k \geqslant 2^l+1$.

Un problème similaire, non résolu, est le suivant:

Existe-t-il une fonction $f(k)$, dépendant seulement de l'entier $k$, telle que si

$$a_1 , \ a_2 , \ \ldots , \ a_{f(k)} ,$$

et

$$b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{f(k)},$$

sont deux suites contenant chacune $f(k)$ nombres entiers, les sommes

$$a_i + b_j, \qquad 1 \leqq i \leqq f(k), \qquad 1 \leqq j \leqq f(k),$$

contiennent au moins $k$ facteurs premiers distincts ?

*Problème 27.*

Montrer qu'il est possible d'extraire de la suite des sommes

$$a_i + a_j,$$

des termes d'une suite infinie d'entiers:

$$a_1, a_2, \dots,$$

une sous-suite infinie dont aucun terme n'est divisible par un autre.

Problème posé par P. Erdös dans *Amer. Math. Monthly*, 54 (1947), p. 479, problème 4268; solution par P. Erdös, *Amer. Math. Monthly*, 57 (1950), pp. 567-568.

Un problème analogue est le suivant:

Montrer qu'il est possible de former une sous-suite infinie, formée par des sommes

$$a_i + b_j,$$

d'éléments de deux suites d'entiers

$$a_1 < a_2 < \dots$$

et

$$b_1 < b_2 < \dots$$

telle qu'aucun de ses termes ne soit divisible par un autre.

J. B. Trostrum a montré récemment que cette propriété est inexacte.

*Problème 28.*

Soit $(p, q) = 1$ deux nombres quelconques. J'ai émis l'hypothèse qu'on peut représenter tous les entiers $n$ suffisamment grands par une somme d'entiers distincts de la forme $p^\alpha q^\beta$. BIRCH a récemment démontré cette hypothèse.

Un résultat plus général est démontré par CASSELS. Soit $a_1 < a_2 < \ldots$ une suite illimitée satisfaisant à

$$\lim_{x=\infty} \frac{A(2x)-A(x)}{\log\log x} = \infty \qquad (1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \alpha\}^2 = \infty\,, \qquad (2)$$

pour tout $0 < \alpha < 1$, où $\{a_k \alpha\}$ est le minimum des différences des entiers et de $a_k \alpha$. Dans ce cas, tout entier suffisamment grand est égal à une somme d'entiers $a$ différents.

Il est possible qu'on puisse remplacer les conditions (1) et (2) par

$$\lim_{x=\infty}\bigl(A(2x)-A(x)\bigr) = \infty\,,$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \alpha\} = \infty\,,$$

pour tout $0 < \alpha < 1$.

B. J. BIRCH: Note on a problem of Erdös, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 55 (1959), pp. 370-373. — J. W. S. CASSELS: On the representation of integers as the sum of distinct summands taken from a fixed set, *Acta Szeged*, 21 (1960), pp. 111-124.

Voir aussi pour d'autres résultats et problèmes de ce genre: P. ERDÖS, On the representation of integers as the sum of distinct summands taken from a fixed set. *Acta Arithmetica*, à paraître.

*Problème 29.*

Pour une suite infinie d'entiers:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots,$$

on désigne par $f(n)$ le nombre de solutions de la relation:

$$n = a_i + a_j\,,$$

où $a_i$ et $a_j$ sont des termes de la suite. Montrer que, si $f(n) > 0$ pour $n$ assez grand,

$$\overline{\lim} f(n) = \infty .$$

P. Erdös et P. Turan: On a problem of Sidon in additive number theory and some related problem. *J. London Math. Soc.*, 16 (1941), pp. 212-215.

Une hypothèse plus forte est que, si $a_k < ck^2$, on a:

$$\overline{\lim} f(n) = \infty .$$

Il a été seulement montré que:

$$\overline{\lim} f(n) \geqq 2 .$$

Pour un grand nombre de problèmes analogues, voir A. Stöhr: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. *J. reine ang. Math.*, 194 (1955), pp. 40-65 et 111-140, et H. Ostmann: *Additive Zahlentheorie*, Springer 1956.

Turán s'est demandé plus généralement s'il est possible de trouver des conditions « convenables » pour qu'à une fonction $f(n)$, on puisse faire correspondre une suite $a_k$, telle que, à un nombre fini d'exceptions près, le nombre de solutions de la relation:

$$n = a_i + a_j ,$$

soit exactement $f(n)$.

### *Problème 30.*

Est-il possible de trouver, pour $n$ suffisamment grand, $n+2$ entiers:

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_{n+2} \leqq 2^n ,$$

tels que les sommes de la forme:

$$\sum_{k=1}^{n+2} \varepsilon_k a_k \qquad (\varepsilon_k = 0 \text{ ou } 1) ,$$

soient toutes différentes ?

Récemment, Guy et Connay ont démontré indépendamment que la réponse est affirmative; leur démonstration n'est pas publiée.

*Remarque:* L'exemple de la suite 1, 2, ..., $2^n$ montre qu'il est possible de trouver une suite de $n+1$ termes vérifiant la propriété précédente. Plus généralement, soit $h(x)$ le nombre maximum de termes d'une suite finie:

$$1 \leqq a_1 < \ldots < a_k \leqq x ,$$

telle que toutes les sommes de la forme:

$$\sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j a_j \qquad (\varepsilon_j = 0 \textit{ ou } 1),$$

soient différentes. Il est facile de voir que:

$$h(x) \quad < \frac{\log x}{\log 2} + \frac{(1+\varepsilon) \log \log x}{\log 2} .$$

Erdös et Moser ont montré que:

$$h(x) \quad < \frac{\log x}{\log 2} + \frac{(1+\varepsilon) \log \log x}{2 \log 2} .$$

Il est possible que pour tout $x$

$$h(x) = \frac{\log x}{\log 2} + 0(1) .$$

P. Erdös: Problems and results in additive number theory. *Colloque sur la théorie des nombres.* Bruxelles (1955), pp. 127-137. G. Thone, Liège.

*Problème 31.*

Les travaux de Sidon sur les séries trigonométriques lacunaires l'ont conduit au problème suivant:

Construire une suite d'entiers

$$a_1 < a_2 < \ldots ,$$

aussi dense que possible, telle que toutes les sommes de deux termes

$$a_i + a_j\,,$$

soient distinctes.

Autre problème: construire une suite telle que le nombre de solutions de chaque relation de la forme:

$$n = a_i + a_j\,,$$

soit limité.

Soit $f(x)$ le nombre maximum de termes d'une suite d'entiers limités:

$$1 \leqq a_1 < a_2 < \dots < a_k \leqq x\,,$$

telle que toutes les sommes $a_i + a_j$ soient distinctes.

Turán et Erdös ont montré que:

$$f(x) \leqq x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}\,.$$

P. Turán et P. Erdös: On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems. *J. London Math. Soc.*, 16 (1941), pp. 212-215.

Singer a montré que:

$$f(p^2 + p + 1) \geqq p + 1\,.$$

Singer: *Trans. Amer. math. soc.*, 43 (1938), pp. 377-385.

Est-il vrai que, pour tout $x$,

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} + 0(1)\ ?$$

Peut-on construire une suite illimitée d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \dots\,,$$

telle que toutes les sommes $a_i + a_j$ soient distinctes et telle que:

$$f(x) > x^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$$

pour les valeurs de $x$ suffisamment grandes ?

Rényi et Erdös ont construit une suite illimitée $a_1 < a_2 < \ldots$ avec $f(x) > x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ telle que le nombre des solutions de $n = a_i + a_j$ est borné.

P. Erdös et A. Renyi: Additive properties of random sequences of integers, *Acta Arithmetica*, 6 (1960), pp. 89-110.

Pour ce problème, voir A. Stöhr: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe. *J. reine ang. Math.*, 194 (1955), pp. 40-65 et 111-140.

Singer montre que, lorsque $n = p^\alpha$, $p$ premier, il est possible de construire $n+1$ classes de restes: $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, mod. $n^2+n+1$, telles que toutes les différences $r_i - r_j$ $(i \neq j)$ soient incongrues.

Un problème célèbre, mais non résolu, de la théorie combinatoire des nombres est que cette propriété n'est possible que pour les puissances $n = p^\alpha$ de nombres premiers.

Voir par exemple M. Hall: A survey of difference sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 7 (1956), pp. 975-986.

## *Problème 32.*

J. B. Kelly a démontré le théorème suivant:

Soit:

$$a_1, a_2, \ldots .$$

une suite illimitée d'entiers telle que tout entier suffisamment grand puisse être représenté comme somme de deux termes $a_i + a_j$. Tout entier suffisamment grand peut aussi être représenté par une somme de quatre ou moins de termes $a_i$ différents.

J. B. Kelly: Restricted bases. *Amer. J. Math.*, 79 (1957), pp. 258-264.

Kelly demande si on peut remplacer quatre par trois dans cet énoncé.

## *Problème 33.*

Straus et Erdös ont émis l'hypothèse que:

A toute suite illimitée d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \ldots ,$$

on peut associer une suite illimitée d'entiers:

$$b_1 < b_2 < \dots ,$$

telle que $B(x) = o(x)$ et tout entier suffisamment grand peut être représenté par une somme $a_i + b_j$ d'un terme de la première et d'un terme de la seconde. LORENTZ a démontré cette propriété en précisant qu'il est possible de choisir la suite $b_i$ telle que:

$$B(x) < c \sum_{k=1}^{x} \frac{\log A(k)}{A(k)} \qquad (1)$$

G. G. LORENTZ: On a problem of additive number theory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), pp. 838-841.

L'inégalité (1) montre que, si les $a_i$ sont les nombres premiers successifs, il est possible de choisir les $b_i$ tels que:

$$B(x) < c(\log x)^3 .$$

P. ERDÖS a montré qu'on peut remplacer cette borne supérieure par

$$c(\log x)^2 .$$

P. ERDÖS: Some results on additive number theory. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5 (1954), pp. 847-853.

Peut-on aussi la remplacer par $c \log x$ ou même par

$$(1 + o(1)) \log x \ ?$$

Si $a_k = 2^k$, il résulte de (1) qu'il existe une suite $b_j$ telle que:

$$B(x) < \frac{cx \log \log x}{\log x} .$$

Peut-on remplacer cette borne supérieure par

$$cx/\log x \ ?$$

P. ERDÖS: Problems and results in additive number theory: *Colloque sur la théorie des nombres*. Bruxelles (1955), pp. 127-137. G. Thone, Liège.

*Problème 34.*

Soient

$$a_1 < a_2 < \ldots,$$

et

$$b_1 < b_2 < \ldots,$$

deux suites illimitées d'entiers telles que tout nombre suffisamment grand puisse être représenté sous forme d'une somme $a_i + b_j$.

Hanani a émis l'hypothèse que:

$$\overline{\lim} \frac{A(x) B(x)}{x} > 1 . \tag{1}$$

Il est trivial que l'inégalité (1) peut ne pas être vérifiée par deux suites dont l'une est finie; par exemple, la suite 0, 1 et la suite 0, 2, 4, 6, ... des nombres pairs.

L'inégalité (1) devient triviale en remplaçant le signe $>$ par $\geqslant$. Il est un peu moins trivial que cette inégalité devient inexacte si on remplace $\overline{\lim}$ par $\underline{\lim}$.

W. Narkienciz: Remarks on a conjecture of Hanani in number theory. *Coll. Math.*, 7 (1960), pp. 161-165.

*Problème 35.*

Pour une suite infinie d'entiers:

$$1 < a_1 < a_2 < \ldots,$$

on appelle densité asymptotique la limite:

$$\underline{\lim} \frac{A(x)}{x} \cdot$$

On appelle densité de Schnirelmann la borne inférieure de $A(x)/x$ $(1 \leqslant x < \infty)$. On désignera cette densité par $d_A$ pour la suite $A = \{a_i\}$.

La somme de deux suites $A$ et $B$ est l'ensemble

$$\{a_i \cup b_j \cup (a_i + b_j)\}.$$

Schnirelmann a émis l'hypothèse et Mann a démontré que:

$$d_{A+B} \geqq \min(1, d_A + d_B).$$

Voir par exemple Khintchine: *Trois perles de la théorie des nombres.* Graylock Press, Rochester, 1952, ou Ostmann: *Additive Zahlentheorie.* Springer, 1956.

Khintchine dit qu'une suite $B$ est composante « essentielle » (wesentliche Komponente), lorsque, pour toute suite $A$ telle que $0 < d_A < 1$, on a:

$$d_{A+B} > d_A.$$

Schnirelmann a montré que toute suite $B$ dont la densité $d_B$ est positive, est une composante essentielle.

Khintchine a donné le premier exemple d'une composante essentielle $B$ dont la densité $d_B$ est nulle; par exemple la suite des carrés des entiers.

P. Erdös a montré que si une suite $B$ est une base d'ordre $k$ (c'est-à-dire une suite telle que tous les entiers puissent être représentés par des sommes d'au plus $k$ termes $b_i$ de la suite), on a:

$$d_{A+B} > d_A + \frac{d_A(1-d_A)}{2k}. \qquad (1)$$

Il en résulte que toute base est une composante essentielle.

P. Erdös a émis l'hypothèse que:

$$d_{A+B} \geqq d_A + \frac{d_A(1-d_A)}{k}. \qquad (2)$$

L'inégalité (1) a été améliorée par divers auteurs, mais l'inégalité (2) est fausse (Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie, Journal reine u. angew. Math. (1961), 61-66).

Linnik a donné le premier exemple d'une composante essentielle qui n'est pas une base. Son exemple vérifie l'inégalité:

$$B(x) = o(x^{\varepsilon}), \text{ pour tout } \varepsilon \text{ positif.} \qquad (3)$$

Stöhr et Wirsing ont démontré de façon très simple l'existence de composantes essentielles qui ne sont pas des bases, mais leurs exemples ne vérifient pas l'inégalité (3).

U. V. Linnik: On Erdös's theorem on the addition of numerical sequences. *Mat. Sbornik*, 10 (1942), pp. 67-78. — A. Stöhr et E. Wirsing: Beispiele von wesentlichen Komponenten. *J. reine ang. Math.* (1956), pp. 96-98.

P. Erdös pense qu'une suite $b_k$ telle que $b_{k+1}/b_k = c > 1$, ne peut être une composante essentielle. Il est facile de voir que la suite $2^k$, $1 \leqslant k < \infty$, n'est pas une composante essentielle.

On peut poser la question suivante:

Existe-t-il une composante essentielle $B$, telle qu'il n'existe pas d'inégalité de la forme,

$$d_{A+B} \geqslant \quad d_A + f(d_A),$$

bien que $d_{A+B} > d_A$ ?

Dans sa thèse, Wirsing a démontré qu'une telle composante essentielle n'existe pas. La thèse de Wirsing n'est pas publiée.

*Problème 36.*

Soient:

$$1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leq 2n,$$

$n$ entiers et soient

$$b_1 < \ldots < b_n,$$

les autres entiers de l'intervalle $(1, 2n)$.

P. Erdös a émis l'hypothèse qu'il existe toujours un entier $x_0$ tel que le nombre des solutions de l'équation

$$a_i + x_0 = b_j,$$

est au moins égal à $\frac{n}{2}\cdot$ Mais Motzkin, Ralston et Selfridge ont montré que cette propriété est inexacte pour $n = 15\,k$ et ils ont démontré que le nombre des solutions de

$$a_i + x_0 = b_j,$$

est inférieur à $(0.4).n$ pour tous les $x_0$.

Le nombre de solutions des équations

$$a_i + x = b_j\,,$$

est $n^2$; mais $x$ ne peut prendre au plus que $4n$ valeurs. Il existe donc un $x_0$, tel que l'équation

$$a_i + x_0 = b_j\,,$$

ait au moins $\frac{n}{4}$ solutions.

Cette borne inférieure a été améliorée par SCHERK qui a donné la valeur $(2 - \sqrt{2})\,\frac{n}{2}$, par SWIERCZKOWSKI et par MOSER qui a donné la valeur $\frac{n}{2\sqrt{2}}$.

La borne exacte n'est pas encore connue.

P. ERDÖS: Some results in number theory (en hébreu), *Riveon Lematematika*, 9 (1955), p. 48. — S. S. SWIERCZKOWSKI: On the intersection of a linear set with the translation of its component. *Coll. Math.*, 5 (1957), pp. 185-197. — L. MOSER: On the minimal overlap problem of Erdös. *Acta Aritmetica*, 5 (1959), pp. 117-119.

*Problème 37.*

OSTMANN a émis l'hypothèse qu'il n'existe pas deux suites $a_1 < \ldots$ et $b_1 < \ldots$, contenant chacune plus d'un élément, telles que chaque nombre premier, sauf un nombre fini d'exceptions, puisse être représenté par une somme $a_i + b_j$ et que les sommes $a_i + b_j$ ne représentent qu'un nombre fini d'entiers composés. Cette hypothèse me semble très profonde.

*Problème 38.*

La question suivante est due à ROTH:

Existe-t-il une constante absolue $c$ telle que, si on partage 'ensemble de tous les entiers en $k$ parties, $a_i^{(l)}$, $1 \leq l \leq k$, la densité inférieure des nombres qu'on peut représenter sous la forme

$$a_i^{(l)}+a_j^{(l)} \quad , \quad 1 \leqq l \leqq k ,$$

soit supérieure à $c$ ? ($c$ doit être indépendant de $k$).

*Problème 39.*

Si une suite infinie d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \dots ,$$

vérifie l'inégalité:

$$\varlimsup_{x=\infty} \frac{A(x)}{x} > \frac{1}{k}$$

l'équation:

$$a_t = a_{i_1}+a_{i_2}+\dots+a_{i_r} , \qquad 1 < r \leqq k ,$$

est possible pour une infinité de valeurs de $t$.

Problème posé par P. Erdös dans *Amer. Math. Monthly*, 54 (1947), p. 479, problème 4268; solution par P. Erdös, *Amer. Math. Monthly*, 56 (1949), p. 192.

Pour autres résultats et problèmes de ce genre, voir P. Erdös: Remarks on number theory III (en hongrois). *Mat. Lapok*, XIII (1962), pp. 28-38.

*Problème 40.*

Peut-on trouver, pour chaque entier positif $k$, $k$ entiers

$$a_1 , a_2 , \dots , a_k ,$$

tels que toutes les sommes $a_i+a_j$ soient des carrés ?

Pour $k \leqq 4$, cela est possible.

## IV. Problèmes sur les congruences, les diviseurs d'un entier, les progressions arithmétiques

### *Problème 41.*

Un entier composé $n$ est dit *pseudo-premier* si

$$2^n \equiv 2 \pmod{n},$$

et il est dit absolument *pseudo-premier* (ou nombre de Carmichaël) si $a^n \equiv a \pmod{n}$, pour tout $a$ tel que $(a, n) = 1$.

Désignons par $P(x)$ le nombre des entiers pseudo-premiers ne dépassant pas $x$ et par $C(x)$ le nombre des nombres de Carmichaël ne dépassant pas $x$. $P(x)$ vérifie les inégalités:

$$c_1 \log x < P(x) < x \exp(-c_2 (\log x \log \log x)^{\frac{1}{2}}),$$

où $\exp. z = e^z$. La borne inférieure est due à Lehmer et la borne supérieure à P. Erdös.

D. H. Lehmer: On the converse of Fermat's theorem. *Am. math. Monthly*, 56 (1949), pp. 300-309. — P. Erdös: On almost primes. *Am. math. Monthly*, 57 (1950), pp. 404-407.

Mais on ne sait pas si

$$C(x) \to \infty, \text{ lorsque } x \to \infty,$$

c'est-à-dire s'il existe une infinité de nombres de Carmichaël.

En améliorant un résultat de Knödel, on peut montrer que:

$$C(x) < x \exp(-c_2 \log x \log \log x / \log \log x).$$

Knödel, *Archiv der Math.*, 4 (1953), pp. 282-284.

P. Erdös: On pseudo primes and Carmichaël numbers. *Publ. math. Debrecen*, 4 (1956), pp. 201-206.

Il est probable que:

$$C(x) > x^{1-\varepsilon},$$

pour tout $x$, si $x$ est suffisamment grand.

Lehmer a trouvé un entier pair pseudo-premier:

$$n = 2.73.1103 = 161\,038,$$

et Beeger a montré qu'il existe une infinité de tels entiers.

D. H. LEHMER: On the converse of Fermat's theorem, *Am. math. Monthly*, 43 (1936), pp. 347-354. — H. BEEGER: On even numbers $m$ dividing $2^m - 2$, *Am. math. Monthly*, 58 (1951), pp. 553-555. — P. ERDÖS: On the converse of Fermat's theorem, *Am. math. Monthly*, 56 (1949), pp. 623-624.

DUPARC a récemment posé la question: Existe-t-il une infinité d'entiers composés $n$ tels que:

$$2^n \equiv 2 \quad \textit{et} \quad 3^n \equiv 3 \pmod{n}\ ?$$

On ne sait pas répondre à cette question.

*Problème 42.*

Il est aisé de voir que chaque entier vérifie au moins une des congruences suivantes:

$$x \equiv 0 \ (\text{mod. } 2),\quad 0 \ (\text{mod. } 3),\quad 1 \ (\text{mod.} 4),$$
$$5 \ (\text{mod. } 6),\quad 7 \ (\text{mod. } 12).$$

Existe-t-il pour chaque entier $n_1$, un système de congruences:

$$x \equiv a_i \quad (\text{mod.}\, n_i)\,, \quad 1 \leqq i \leqq k\,, \tag{1}$$

où $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, tel que chaque entier vérifie au moins une de ces congruences ?

Problème posé par P. ERDÖS: On a problem concerning congruence systems, *Mat. Lapok*, 3 (1952), pp. 122-128 (en hongrois).

Pour $n_1 = 3$, DAVENPORT et ERDÖS ont donné un tel système et FRIED a donné un système plus simple.

Pour $n_1 = 4$ ou 6, DEAN SWIFT, pour $n_1 = 8$, SELFRIDGE ont donné de tels systèmes.

Mais le problème n'est pas résolu de façon générale.

ERDÖS a émis l'hypothèse que, pour un système (1) quelconque, on a:

$$\sum \frac{1}{n_i} > 1\,. \tag{2}$$

Mirsky et Newman ont démontré cette propriété. Rado, Davenport et Stein ont retrouvé cette démonstration.

Si (2) est faux, chaque entier vérifie une et une seule des congruences (1); donc:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{x^{a_i}}{1-x^i} = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}.$$

Si $x = r\, e^{2\pi i/nk}$, avec $r \to 1$, le membre de gauche tend vers l'infini puisque:

$$\frac{x^{ak}}{1-x^{nk}} \to \infty,$$

et que les autres $(k-1)$ termes restent bornés; mais le membre de droite reste borné. Cette contradiction établit la propriété (2).

## *Problème 43.*

Quel est le nombre maximum $f(x)$ de congruences

$$z \equiv a_i \ (\text{mod. } n_i) \text{ avec } n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqq x, \qquad (1)$$

telles qu'il n'existe aucun entier satisfaisant à deux de ces congruences ?

Stein et P. Erdös ont montré que:

$$f(x) > x^{1-\varepsilon},$$

et il est probable que:

$$f(x) = o(x).$$

P. Erdös: Les problèmes extrémaux en théorie des nombres (en hongrois). *Mat. Lapok*, **13** (1962), 242-243. Voir aussi le livre de Halbentam et Roth sur les suites de nombres (à paraître).

## *Problème 44.*

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_k$ des entiers tels que les congruences:

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i \equiv 0 \quad (\text{mod. } n),$$

sont impossibles, pour tout système de coefficients $\varepsilon_i = 0$ ou 1. Quelle est la plus grande valeur possible de $k$ ?

P. Erdös a émis l'hypothèse que:

$$k(k+1) \leq 2n,$$

mais De Bruijn a montré que cela est inexact, notamment pour l'exemple:

$$r_1 \equiv 1, \; r_2 \equiv 2, \; r_3 \equiv 5, \; r_4 \equiv 6 \,(mod.\ 10).$$

Il est probable que $k < c\sqrt{n}$. Je peux seulement montrer que $k < n^{1-\alpha}$. (note de 1963 II 20. Heilbronn et Erdös ont démontré que si $n$ est premier, $k < cr^{\frac{1}{2}}$).

*Problème 45.*

Est-il vrai que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n!}.$$

est un nombre irrationnel, si $\sigma_k(n)$ désigne la somme des puissances $k^{\text{ièmes}}$ des diviseurs de $n$ ?

Cette propriété a été démontrée pour $k = 1$ ou 2.

*Amer. Math. Monthly*, 91 (1954), pp. 264-265, problème de Erdös et Kac (solution de R. Breusch).

*Problème 46.*

Un entier $n$ est dit *parfait* si:

$$\sigma(n) = 2n,$$

où $\sigma$ désigne la somme des diviseurs de $n$.

Tout nombre parfait pair est de la forme

$$2^{p-1}(2^p - 1),$$

où $p$ et $2^p - 1$ sont tous deux premiers.

Le plus grand nombre parfait connu est

$$2^{4422}(2^{4423} - 1).$$

(A. Hurwitz, *Notices Amer. Math. Soc.* (1961), p. 601.)

On ne sait pas s'il existe des nombres parfaits impairs.

Hornfeck et Wirsing ont démontré que le nombre des nombres $n \leqq x$ avec $\sigma(n) \equiv 0 \pmod{n}$ est $o(x^{\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon < 0$.

B. Hornfeck et E. Wirsing: Ueber die Häufigkeit der vollkommenen Zahlen, *Math. Annalen*, 133 (1957), pp. 431-438; pour un résultat plus précis, voir E. Wirsing: Bemerkungen zu der Arbeit über vollkommene Zahlen in *Math. Anna.*, Bd. 133, S. 431-438. *Math. Annalen*, 137 (1959), pp. 316-318.

*Problème 47.*

Deux entiers $a$ et $b$ sont *amiables* si

$$\sigma(a) = \sigma(b) = a+b.$$

La paire de nombres amiables 220 et 284 était connue de Pythagore.

On ne sait pas s'il existe une infinité de nombres amiables. Il semble probable que le nombre des entiers amiables inférieurs à $x$ est plus grand que $x^{1-\varepsilon}$. En améliorant un résultat de Kanold, P. Erdös a montré que la densité des nombres amiables est nulle.

H. J. Kanold: Ueber die Dichten der Mengen der vollkommenen und befreundeten Zahlen. *Math. Z.*, 61 (1954), pp. 180-185. — P. Erdös: On amicable numbers. *Publ. Math. Debrecen*, 4 (1954), pp. 108-111.

Posons

$$\sigma_1(n) = \sigma(n)-n, \quad \sigma_k(n) = \sigma_1(\sigma_{k-1}(n)).$$

Si $\sigma_2(n) = n$, $n$ et $\sigma_1(n)$ forment une paire de nombres amiables.

La démonstration mentionnée ci-dessus montre aussi que, pour chaque valeur de $k$, la densité des entiers qui vérifient la relation:

$$\sigma_k(n) = n,$$

est nulle.

Catalan a émis l'hypothèse que la suite $\sigma_k(n)$, $k = 1, 2, \ldots$ est bornée pour tout $n$, donc périodique. Cette hypothèse a été vérifiée par Dickson et Lehmer pour les cent premières valeurs de $n$. $\sigma_k(138)$ n'est égal à 1 que pour $k > 100$ et le maximum de $\sigma_k(138)$ est supérieur à $10^q$.

On ne sait pas si la densité des entiers $n$ tels qu'il existe une valeur de $k$ avec $\sigma_k(n) = 1$ est positive.

### *Problème 48.*

CARMICHAËL a émis l'hypothèse que l'équation

$$\varphi(x) = n,$$

où $(n)$ est la fonction d'EULER, n'a jamais une solution unique.

Ceci n'a pas été démontré et paraît très difficile. P. ERDÖS a montré que, s'il existe un entier $n$, tel que $\varphi(x) = n$ a exactement $k$ solutions, il existe une infinité d'entiers ayant la même propriété.

P. ERDÖS: Some remarks on Euler's function. *Acta Arithmetica*, 4 (1958), pp. 10-19.

L'équation

$$\sigma(x) = n,$$

vérifie une propriété analogue.

L'ensemble des entiers $n$, pour lesquels l'équation $\varphi(x) = n$ est résoluble, a une densité nulle (S. PILLAI) Pour des résultats plus forts, voir P. ERDÖS: On the normal number of prime factors of $p - 1$, *Quart. Jour. of Math.*, 6 (1935), pp. 205-213, et Some remarks on Euler's $\varphi$ function and some related problems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 5 (1945), pp. 540-544.

SIERPINSKI et ERDÖS ont cherché à démontrer qu'il existe une infinité d'entiers qui ne sont pas de la forme $n - \varphi(n)$, mais ils n'ont pas réussi.

LEHMER a émis l'hypothèse que, si

$$n - 1 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \varphi(n)),$$

l'entier $n$ est premier.

D. H. LEHMER: On Euler's Totient Function, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 38 (1932), pp. 745-757.

L'hypothèse suivante a été émise au centre mathématique d'Amsterdam: si $a$ et $b$ sont des entiers arbitraires, on peut trouver des valeurs convenables de $k$ et de $l$ telles que

$$\sigma^{(k)}(a) = \sigma^{(l)}(b)$$

Les suites $\sigma^{(k)}(a)$ et $\sigma^{(l)}(b)$, $1 \leq k$, $l < \infty$, coïncident alors, à l'exception d'un nombre fini de termes.

$$\left(\sigma^{(1)}(a) = \sigma(a),\ \sigma^{(k+1)}(a) = \sigma^{1}(\sigma^{k}(a))\right)$$

On ne sait pas si la relation

$$\varphi(n) = \varphi(n+1),$$

a un nombre infini de solutions entières; on ne sait même pas si l'inégalité:

$$|\varphi(n+1) - \varphi(n)| < n^{\varepsilon},$$

a un nombre infini de solutions, pour toutes les valeurs de $\varepsilon > 0$. On sait que:

$$\varphi(5186) = \varphi(5187) = \varphi(5188),$$

mais on ne sait pas s'il existe d'autres valeurs de $n$ qui vérifient:

$$\varphi(n) = \varphi(n+1) = \varphi(n+2).$$

## *Problème 49.*

Van der Waerden a démontré l'hypothèse suivante de Baudet: il existe une fonction $f(k)$, des entiers positifs $k$, telle que; lorsqu'on partage, d'une manière quelconque, les entiers $n \leq f(k)$ en deux parties, une au moins de ces parties est contenue dans une progression arithmétique de $k$ termes.

Voir R. Rado: Studien zur Kombinatorik, *Math. Zeit.* (1933), pp. 424-480. — Khintchine: *Trois perles de la théorie des nombres.* Graylock Press, Rochester, 1952.

Il serait désirable de trouver une bonne approximation de $f(k)$. Rado et Erdös ont montré que

$$f(k) > 2^{k/2}(k-1)^{\frac{1}{2}},$$

et W. Schmidt a démontré que:

$$f(k) > 2^{k - c\,(k \log k)^{\frac{1}{2}}}.$$

W. M. Schmidt: Two combinatorial theorems on arithmetic progressions, *Duke Math. Journal*, 29 (1962), pp. 129-140. — R. Rado et P. Erdös: Combinatorial theorems on classification of subsets of a given set. *Proc. London Math. Soc.* (3), 2 (1952), pp. 417-439.

Un problème analogue, non encore résolu, est le suivant:

Existe-t-il une fonction $A(k)$, des entiers positifs $k$, telle que, si on définit arbitrairement une fonction $g(t)$ qui ne prend que les valeurs $\pm 1$ pour tous les entiers, $1 \leq t < A(k)$, il existe toujours deux entiers $m$ et $d$, avec $md \leq A(k)$, qui vérifient l'inégalité:

$$\left| \sum_{l=1}^{m} g(ld) \right| \geq k \ ?$$

Un cas particulier est celui où la fonction $g(t)$ est multiplicative, c'est-à-dire où $g(ab) = g(a)\, g(b)$, pour tous les entiers $a$, $b$ premiers entre eux; mais ce cas aussi n'est pas résolu.

Tchudakoff: Theory of the characters of numbers semigroups. *J. Indian Math. Soc.*, 20 (1956), pp. 11-15.

*Problème 50.*

Soit $f(n)$ une fonction multiplicative, c'est-à-dire vérifiant

$$f(ab) = f(a) f(b) ,$$

pour tous les entiers $a$, $b$, premiers entre eux, et ne prenant que les valeurs $\pm 1$. Est-il exact que:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k) , \qquad (1)$$

existe ?

Il semble que la condition nécessaire et suffisante pour que la limite (1) soit nulle est que:

$$\sum_{f(p)=-1} \frac{1}{p} = \infty .$$

En tout cas, il est aisé de montrer que si:

$$\sum_{f(p)=-1} \frac{1}{p} < \infty ,$$

la limite existe et est positive.

*Problème 51.*

Soit $r_k(n)$ le nombre maximum d'entiers:

$$1 \leqq a_1 < \dots < a_{r_k(n)} < n ,$$

qui ne contiennent aucune progression arithmétique de $k$ termes. Quelle serait une bonne évaluation de $r_k(n)$ ?

S'il est vrai que:

$$r_k(n) \leqq n/2 ,$$

la fonction $f(k)$ définie au problème 49 vérifie

$$f(k) \leqq n .$$

P. Erdös et P. Turan: On a problem of Sidon in additive number theory and some related problems. *J. London Math. Soc.*, 16 (1941), pp. 212-215.

Salem et Spencer ont montré que:

$$r_3(n) > n^{1 - c/\log \log n}.$$

R. Salem et D. C. Spencer: On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progressions. *Proc. Nat. Aca. Sc. U.S.A.*, 28 (1942), pp. 561-563.

Behrend a montré que

$$r_3(n) > n^{1 - c/\sqrt{\log n}} .$$

Behrend F. A.: On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. *Proc. Nat. acad. sci. U.S.A.*, 32 (1946), pp. 331-332.

Enfin ROTH a établi que:

$$r_3(n) < cn/\log\log n\,.$$

K. F. ROTH: On certain sets of integers. *J. London Math. Soc.*, 28 (1953), pp. 104-109.

On ne sait pas si $r_k(n)/n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers l'infini, pour $k > 3$.

Si on pouvait démontrer que:

$$r_k(n) < (1-\varepsilon)\, n/\log n\,,$$

on en déduirait qu'il existe des chaînes arbitrairement longues de nombres premiers en progression arithmétique. La plus longue chaîne de ce genre connue est

$$23\,143 + 30\,030\,k\,, \qquad 0 \leq k \leq 11\,,$$

trouvée récemment par W. A. GOLUBIEW.

*Problème 52.*

Existe-t-il une constante $c$ telle que:

$$\sum_{k=0}^{\varphi(n)} (a_{k+1}-a_k)^2 = 4 + \sum_{k=1}^{\varphi(n)} (a_{k+1}-a_k)^2 \leq c\,\frac{n^2}{\varphi(n)}\,,$$

où $1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{\varphi(n)} = n-1$ sont les entiers $< n$ et premiers avec $n$, où $a_0 = -1$ et où $\varphi(n)$ est la fonction d'Euler.

P. ERDÖS: The difference of consecutive primes. *Duke Math. J.*, 6 (1940), pp. 438-441.

Si cette propriété est vraie, il serait intéressant de déterminer la borne supérieure de l'expression:

$$\frac{\varphi(n)}{n^2}\sum_{k=0}^{\varphi(n)} (a_{k+1}-a_k)^2\,.$$

Il est clair que, pour tout $n$, $c > 1$. KNÖDEL a calculé $c$ pour $n \leq 69$, et il a trouvé $c = 1{,}19$.

## V. Problèmes sur les nombres premiers et problèmes divers

### *Problème 53.*

Romanoff a démontré que la densité des sommes de la forme $p + a^k$ ($p$ nombre premier, $a > 1$ entier) est positive.

N. P. Romanoff: Ueber einige Sätze der additiven Zahlentheorie.
*Math. Ann.*, 109 (1934), pp. 668-678.

P. Erdös a généralisé cette propriété de la façon suivante:

Soit

$$a_1 < a_2 < \dots,$$

une suite illimitée, telle que $a_k$ divise $a_{k+1}$, pour toutes les valeurs de $k$. La condition nécessaire et suffisante pour que la densité des sommes de la forme $p + a_k$ soit positive est qu'il existe une constante absolue $c$, telle que, pour tout $k$,

$$a_k < c^k, \sum_{d/a_k} \frac{1}{d} < c.$$

P. Erdös: On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. *Summa Brasil. Math.*, 2 (1950), pp. 113-123.

On ne connait pas de condition nécessaire et suffisante pour que la densité des sommes $p + a_k$ soit positive, pour les suites qui ne vérifient pas la condition: $a_k$ divise $a_{k+1}$.

Notamment, on ne sait pas si la densité des sommes de la forme:

$$p + [\alpha^k],$$

est positive, où $\alpha$ est un nombre réel $> 1$ et où la notation $[x]$ désigne la partie entière de x. Cette question a été posée par M. Kalmar.

### *Problème 54.*

Si $f(n)$ est le nombre de solutions de la relation:

$$p + a^k = n,$$

cette fonction vérifie, pour une infinité de valeurs de $n$, l'inégalité:

$$f(n) > c \log\log n .$$

P. Erdös: On integers of the form $2^k + p$ and some related problems. *Summa Brasil. Math.*, 2 (1950), pp. 113-123.

On ignore l'ordre de grandeur du maximum de $f(n)$ et on ne sait même pas si cette fonction vérifie

$$f(n)/\log n \to 0 .$$

Lorsque $n = 105$, pour toutes les valeurs de $k$ telles que $2 \leq 2^k < 105$; $105 - 2^k$ est un nombre premier.

Pour $n > 105$, il semble que $n - 2^k$ ne puisse être premier pour toutes les valeurs de $k$ telles que $2 \leq 2^k < n$.

Plus généralement, si la suite illimitée d'entiers:

$$a_1 < a_2 < \dots ,$$

vérifie $a_{k+1} < c\, a_k$, il n'y a vraisemblablement qu'un nombre fini de valeurs de $n$ telles que $n - a_k$ soit un nombre premier pour tout $a_k < n$.

*Problème 55.*

Existe-t-il une suite d'entiers $a_i$ vérifiant

$$A(x) > c \log x ,$$

telle que le nombre de solutions de la relation:

$$p + a_i = n \quad (p \text{ nombre premier})$$

reste borné?

Quelles conditions vérifie la somme $A(x)$ si tous les $p + a_i$ sont différents?

Des problèmes analogues se posent pour d'autres suites que celle des nombres premiers, par exemple la suite des carrés. (Dans ce cas, il faut naturellement que $A(x) < c\, x^{\frac{1}{2}}$).

*Problème 56.*

Désignons par $f(n)$ la fonction:

$$f(n) = \sum \frac{1}{n-p} \quad (p \text{ nombre premier} < n) .$$

Une inégalité de Hoheisel:

$$\pi(n + n^{1-\varepsilon}) - \pi(n) > c_1 n^{1-\varepsilon}/\log n ,$$

permet de montrer que:

$$f(n) > c_2 .$$

Le théorème des nombres premiers permet de montrer que:

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} f(n) \to 1 . \tag{1}$$

La méthode de Brun conduit à l'inégalité:

$$\sum_{n=1}^{x} f^2(n) < cx . \tag{2}$$

Il est possible que:

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} f^2(n) \to 1 . \tag{3}$$

Il résulterait de (1) et de (3) que, pour presque tous les $n$ (c'est-à-dire à l'exception près d'une suite de densité 0):

$$f(n) \to 1 .$$

Est-il vrai que:

$$\overline{\lim} f(n) = \infty ,$$

et que

$$f(n)/\log\log n \to 0 \ ?$$

On peut aussi montrer, par la méthode de BRUN, que:

$$f(n) < c \log\log n ,$$

mais on ne sait pas démontrer que:

$$\overline{\lim} f(n)/\log\log n \leqq 1 .$$

Ce problème et ce résultat sont dûs à TURÁN et ERDÖS (non publié). — G. HOHEISEL, Primzahlprobleme in der Analysis, *Sitzungsber. der Preuss Akad. der Wiss. Phys. Math. Klasse* (1930), 580-588; pour un résultat plus fort, voir A. E. INGHAM, On the difference between consecutive primes, *Quarterly Journal of Math.* 8 (1937), 255-266.

*Problème 57.*

La fonction:

$$g(n) = \sum \frac{1}{p} \cdot$$

où $p$ est un nombre premier inférieur à $n$ et ne divisant pas le cœfficient de Newton $\binom{2n}{n}$, est-elle uniformément bornée?

*Remarque:* Il semble que cette propriété est inexacte. Il est probable que, pour un choix arbitraire de nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_k$, il existe un entier $n$ tel qu'aucun des $p_i$ ne divise le coefficient de Newton $\binom{2n}{n}$.

Il est aisé de démontrer que:

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} g(n) \to c , \qquad (1)$$

où $c$ est une constante (il n'est pas difficile de déterminer la valeur de $c$ explicitement),

$$\frac{1}{x} \sum_{n=1}^{x} g(n)^2 \to c . \qquad (2)$$

Il en résulte des relations (1) et (2) que

$$g(n) \to c ,$$

pour presque toutes les valeurs de $n$.

*Problème 58.*

Soit $f_k(x)$ un polynôme avec exactement $k$ coefficients non nuls. Soit $Q_k$ le nombre minimum des coefficients non nuls de son carré $f_k^2(x)$. RÉDEI et RÉNYI ont montré que:

$$\underline{\lim}\, Q_k/k = 0\,.$$

P. ERDÖS a précisé que:

$$Q_k < c_1 k^{1-c_2}\,.$$

P. ERDÖS: On the number of terms of the square of a polynomial. *Nieuw Arch. Wiskunde* (2), 23 (1949), pp. 63-65.

La borne exacte de $Q_k$ semble difficile à déterminer.

RÉNYI et ERDÖS ont émis l'hypothèse que $Q_k \to \infty$ lorsque $k \to \infty$, même si les coefficients de $f_k(x)$ sont des nombres complexes.

RÉNYI et HAJÓS ont démontré que le nombre des termes de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme composé de 2 termes au moins tend vers l'infini avec $n$: de façon plus précise le nombre de termes est supérieur à $cn$, (*Mat. Lapok IV* (1953), pp. 39-41). VERDENIUS a étudié le nombre minimum de termes non nuls du cube $f_k^3(x)$.

W. VERDENIUS: On the number of terms of the square and the cube of polynomials. *Indagationes Math.* 11 (1949), pp. 546-565.

A. RÉNYI, *Hungarica Acta Math.* 1 (1947), 30-34.

*Problème 59.*

Dans une suite illimitée d'entiers:

$$1 \leq a_1 < \ldots,$$

telle que tout entier $n$ puisse être représenté par un produit $a_i a_j$, on montre que

$$\underline{\lim}\, A(x) \left(\frac{x}{(\log x)^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} > 0\,.$$

D. Raikov: On multiplicative bases for the natural series. *Rec. Math. Moscou* (2), 3 (1938) pp. 569-576 (en russe, avec un résumé en anglais).

$A(x)$ vérifie aussi:

$$\underline{\lim}\, A(x) \left(\frac{x}{\log x}\right)^{-1} > 1\,,$$

mais ne vérifie pas:

$$\underline{\lim}\, A(x) \left(\frac{x}{\log x}\right)^{-1} > 1 + \varepsilon\,.$$

E. Wirsing: Ueber die Dichte multiplikativer Basen, *Arch. Math. B.* (1957), pp. 11-15.

Ainsi, si $\varepsilon > 0$ est choisi arbitrairement, il existe toujours une suite:

$$a_1 < \dots,$$

telle que tout entier $n$ soit représentable par un produit $a_1\, a_j$ et que, pour un nombre infini de valeurs de $n$, on ait:

$$A(x) < (1 + \varepsilon)\,\frac{x}{\log x}\cdot$$

*Problème 60.*

Pour tous les entiers positifs $k$, les deux entiers

$$m = 2^k - 2\,, \qquad n = 2^k(2^k - 2)\,,$$

ont les mêmes facteurs premiers, ainsi que les deux entiers:

$$m + 1 = 2^k - 1\,, \qquad n + 1 = (2^k - 1)^2\,.$$

Existe-t-il d'autres exemples du même fait?

*Problème 61.*

La suite

$$u_1 < u_2 < \dots,$$

des entiers de la forme $x^2 + y^2$, $x$, $y$ entiers, vérifie-t-elle la condition

$$\lim (u_{k+1} - u_k)/u_k^{\frac14} = 0 \,?$$

Bambah et Chowla ont démontré que

$$\overline{\lim}\, (u_{k+1} - u_k)/u_{\frac14}^{k} < \infty \,.$$

R. P. Bambah and S. Chowla, On numbers which can be expressed as a sum of two squares, *Proc. Mat. Inst. Sci. India* 13 (1947), pp. 101-103.

## VI. Problèmes d'analyse indéterminée et problèmes analogues

### *Problème 62.*

Trouver les solutions en entiers $x$, $y$, $z$ de la relation

$$x^x y^y = z^z \,.$$

Ko Chao a montré que si $x$ et $y$ sont premiers entre eux, ils ne peuvent prendre que la solution triviale $x = z$, $y = 1$.

Ko Chao: Note on the Diophantine équation $x^x y^y = z^z$.

J. Chinese: *Math. Soc.*, 2 (1940), pp. 205-207, voir aussi W.H. Mills: an unsolved diophantine equation, *Report of the Institute of theory of numbers Univ. of Colorado* (1959), pp. 258-268.

Mais la relation admet aussi les solutions (trouvées par Ko):

$$x = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+2n}(2^n-1)^{2(2^n-1)},$$

$$y = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)}(2^n-1)^{2^{n+1}}$$

$$z = 2^{2^{n+1}(2^n-n-1)+n+1}(2^n-1)^{2(2^n-1)+1} \,.$$

pour lesquelles le p.g.c.d. de $x$, $y$, $z$ est un produit d'une puissance de 2 et d'une puissance de $(2^n - 1)$.

Existe-t-il d'autres solutions, en particulier des solutions impaires?

SURÁNYI a cherché les solutions en nombres entiers $n$, $a$, $b$ de la relation;

$$n! = a!\,b!\,, \qquad a > 1\,; \qquad b > 1\,.$$

Il existe les solutions triviales:

$$n = k!\,, \qquad a = k! - 1\,, \qquad b = k \; (k \textit{ entier}).$$

La seule solution non triviale connue est:

$$10! = 7!\,6!\,.$$

Les solutions non triviales, en entiers $x$, $y$ de la relation:

$$x^x = y^y\,,$$

sont $x = 4$, $y = 2$; les solutions en nombres rationnels $x$, $y$, sont:

$$x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad ; \qquad y = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n};$$

$n$ entier.

*Problème 63.*

Existe-t-il 3 nombres rationnels $x$, $y$, $z$ tels que:

$$x + y + z = 1\,, \qquad xyz = 1\;?$$

Récemment, on a démontré que de tels nombres n'existent pas.

J.W.S. CASSELS, On a diophantine equation, *Acta Arith.* 6 (1960), pp. 47-52, voir aussi G. SANSONE et J.W.S. CASSELS, Sur le problème de Wemer Mnúh, *Acta Arith.* 7 (1962), pp. 187-190.

*Problème 64.*

Pour $n$ suffisamment grand, les produits $abc$ des 3 entiers $a$, $b$, $c$, vérifiant:

$$n = a + b + c\,, \qquad a < b < c\,,$$

sont-ils tous différents?

*Problème 65.*

Pour $k > 2$, l'équation:

$$a_1 \,.\, a_2 \,.\, \ldots \,.\, a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

admet la solution en entiers triviale:

$$a_1 = 2\,,\; a_2 = k\,,\; a_3 = \ldots = a_k = 1\,.$$

Schinzel a démontré que pour $k = 6$ ou $24$, il n'existe pas d'autre solution en entiers; pour les autres valeurs de $k < 24$, il existe d'autres solutions. Peut-on montrer qu'il existe des solutions non triviales pour $k > 24$?

*Problème 66.*

Bowen a émis l'hypothèse que la seule solution en entiers $m$, $n$ de la relation:

$$1^n + 2^n + \ldots + m^n = (m+1)^{2n}\,,$$

est $n = 1$, $m = 2$. Cette hypothèse n'est pas encore démontrée.

Plus généralement, on peut étudier la relation:

$$1^n + 2^n + \ldots + m^n = l^k\,,$$

$m$, $n$, $l$, $k$ entiers.

Voir J.J. Schaffer: The equation $1^p + 2^p + \ldots + n^p = m^q$. *Acta Math.*, *95* (1956), pp. 155-189.

*Problème 67.*

Les seules solutions en entiers $x$ et $n$ de la relation:

$$n! + 1 = x^2\,,$$

sont-elles $n = 4, 5, 7$, $x = 5, 11, 71$?

Obláth et P. Erdös ont montré que, pour $n > 2$, la relation:

$$n = x^k \pm y^k\,,$$

$k$ entier pair ou impair $> 2$, $x$ et $y$ entiers premiers entre eux, n'admet pas de solutions.

De plus la relation $n! = x^4 + y^4$, $(x, y) = 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions en entiers. Cette démonstration est élémentaire pour $k > 4$ et utilise le théorème des nombres premiers pour $k = 4$.

On ne connait aucun résultat, pour les solutions en entiers $x$, $y$ non premiers entre eux.

On sait aussi que la relation:

$$n! + m! = x^k ,$$

a seulement un nombre fini de solutions en entiers $x$, $m$, $n$, $k$.

P. Erdös und R. Obláth, Ueber diophantische Gleichungen der Form $n! = x^p \pm y^p$ und $n! \pm m! = x^p$ *Acta Szeged VIII* (1937), pp. 241-255.

*Problème 68.*

Dans la décomposition en facteurs premiers d'une factorielle:

$$n! = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i} \qquad (P_1 < P_2 < \ldots < P_k) ,$$

il est aisé de voir que:

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_k .$$

Montrer en outre que, si $\alpha_i > \alpha_j$, l'inégalité:

$$P_i^{\alpha_i} > P_j^{\alpha_j} ,$$

est vérifiée.

Problème posé par P. Erdös dans *Amer. Math. Monthly*, 53 (1946), p. 594, problème 4226; solution par W. J. Harrington dans *Amer. Math. Monthly*, 55 (1948), pp. 433-435.

*Problème 69.*

On sait mettre le quotient $a/n$, d'un entier $a$ tel que:

$$1 \leqq a \leqq n ,$$

par $n$, sous la forme d'une somme:

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_k}, \tag{1}$$

où les dénominateurs $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont des entiers croissants.

En désignant par $f(a, n)$ la valeur minimum du nombre $k$, on peut montrer que:

$$f(a\,,\, n) < c_1 \log n / \log\log n$$

et

$$c_2\, n \log\log n < \sum_{a=1}^{n} f(a\,,\, n) < c_3\, n \log n / \log\log n\,.$$

*Lemme:* Pour un entier $a \leqq n\,!$, il existe une représentation:

$$a = d_1 + d_2 + \dots + d_k\,, \qquad d_1 < \dots < d_k\,,$$

avec $d_i$ diviseur de $n\,!$ et $1 \leqq k \leqq n$.

*Remarque:* Si on peut diminuer, dans ce lemme, l'ordre de grandeur de $k$ on peut aussi améliorer la borne supérieure des inégalités précédentes.

P. Erdös: On a diophantine equation, *Mat. Lapok*, 1 (1950), pp. 192-210 (en hongrois).

*Problème 70.*

Si $f(a, n)$ désigne la même fonction que dans le problème précédent, on peut montrer que $f(a, n) \leqq a$ comme suit:

Soit $x_1$ le plus petit entier tel que:

$$\frac{1}{x_1} \leqq \frac{a}{n}\cdot$$

Il en résulte que:

$$\frac{a}{n} - \frac{1}{x_1} = \frac{ax_1 - n}{nx_1} = \frac{a_1}{nx_1}$$

avec $a_1 < a$, puisque $\frac{a}{n} < \frac{1}{x_1 - 1}\cdot$ En répétant cette opération un nombre suffisant de fois, on obtient une décomposition de $a/n$ telle que $f(a, n) \leqq a$.

Stein pose alors le problème suivant:

Pour un entier $a$ tel que $0 < a < n$ et $(a, n) = 1$, $n$ impair, on déterminera l'entier $x_1$ tel que $2x_1+1$ soit le plus petit entier impair vérifiant l'inégalité:

$$\frac{1}{2x_1+1} \leq \frac{a}{n};$$

on en déduit:

$$\frac{a_1}{n(2x_1+1)} = \frac{a}{n} - \frac{1}{2x_1+1}.$$

Peut-on obtenir une représentation de $a/n$:

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{2x_1+1} + \frac{1}{2x_2+1} + \ldots + \frac{1}{2x_k+1}$$

en réitérant cette opération un nombre fini de fois ?

On pourrait aussi poser la même question pour des suites plus générales que la suite des entiers impairs.

### *Problème 71.*

La relation:

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

a-t-elle des solutions en entiers $x$, $y$, $z > 1$, pour tout entier $n > 2$? (hypothèse de Straus et P. Erdös).

Sierpinski a émis l'hypothèse que la relation:

$$\frac{5}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

est possible en entiers $x$, $y$, $z$, pour $n > 5$. Plus généralement, Schinzel a émis l'hypothèse que, pour tout entier $a$ et pour les entiers $n$ suffisamment grands, la relation:

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

est possible en entiers $x$, $y$, $z$.

L'hypothèse de SIERPINSKI a été démontrée par G. PALAMA pour

$$1 < n < 922\,321$$

ainsi que pour les $n > 1$ de la forme $1 + 1\,260\,k$.

G. PALAMA: Si une congettura di Sierpinski relativa alla possibilità in numeri naturali della $5/n = 1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3$. *Boll. Un. Mat. Ital.* (3), 13 (1958), pp. 65-72.

*Problème 72.*

On sait que la somme:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \ldots + \frac{1}{x+n},$$

n'est jamais un entier, si $x$ est entier. Donc, si:

$$J = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des entiers croissants, est un entier, les dénominateurs vérifient l'inégalité:

$$\operatorname{Max}\,(x_{k+1} - x_k) \geqq 2\,.$$

Est-il vrai que:

$$\operatorname{Max}\,(x_{k+1} - x_k) \geqq 3\;?$$

*Remarque:* Ce serait une meilleure approximation, puisque:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1\,.$$

POLYA-SZEGÖ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II*, Berlin (1925), pp. 159 et 381. — P. ERDÖS: On a diophantine equation. *Math. Lapok*, 1 (1950), pp. 192-210 (en hongrois).

D'autre part, il est évident que:

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{x_1} \geqq e\,,$$

en conséquence de:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{cn} = \log c + o(1).$$

Peut-on montrer plus précisément que:

$$\lim_{n=\infty} \frac{x_n}{x_1} = \infty \ ?$$

En d'autres termes, peut-on montrer que, pour tout entier $k$, le nombre des solutions de:

$$J = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n},$$

qui vérifient $x_n < kx_1$ est fini ?

*Problème 73.*

Considérons les décompositions de la forme:

$$1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n},$$

où $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des entiers croissants. On a démontré que la valeur maximum $y_n$ de $x_n$, pour une décomposition en $n$ fractions, vérifie la relation de récurrence:

$$y_{n+1} = y_n (y_n + 1).$$

Quelle est la valeur minimum de $x_n$, pour une décomposition en $n$ fractions de dénominateurs inégaux ?

Si on accepte des dénominateurs égaux, le minimum de $x_n$ est $n$.

P. Erdös: On a diophantine équation. *Math. Lapok*, 1 (1950), pp. 192-210.

*Problème 74.*

Donner une approximation non triviale du nombre de solutions en entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de la relation:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1 .$$

Avec ou sans l'hypothèse:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n .$$

*Problème 75.*

Tout nombre rationnel $a/b$, compris entre 0 et $\pi^2/6-1$, peut être décomposé en une somme de la forme:

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \ldots + \frac{1}{x_n^2} ,$$

où les $x_i$ sont des entiers strictement croissants.

Ce théorème a été démontré par P. Erdös, mais sa démonstration, qui est assez difficile, n'a pas été publiée.

Pour les résultats plus généraux, voir R. Graham: On sums of reciprocals of integers. *Notices Amer. Math. Soc.* (1961), p. 613. (A paraître Proc. London Math. Soc.).

*Problème 76.*

Existe-t-il pour tous les $\varepsilon > 0$ et $n > n_0(\varepsilon)$ une suite $1 < a_1 < \ldots < a_k \leq n$ avec $k > n(1 - \varepsilon)$, telle que si deux produits

$$a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r} = a_{j_1} \ldots a_{j_l} ,$$

où les $\underline{a}$ sont tous distincts, sont égaux, nous avons $r = l$.

Par exemple, une telle suite avec $k = \frac{n}{4}$ est la suite des nombres $2(2l+1)$, $1 \leq l < \frac{n}{4}$, mais je ne sais pas si une telle suite existe pour $k > n(1 - \varepsilon)$.