Számelméleti megjegyzések IV.

Extremális problémák a számelméletben, I.

ERDŐS PÁL

E cikkben tárgyalandó problémák természetét legjobb lesz egy példával illusztrálni. Még 1933-ban találtam a következő tételt. Ha $a_1 < \ldots$ $\ldots < a_{n+1} \leqq 2n$, $n+1$ egész szám $2n$-ig, akkor mindig van közülük kettő, úgy, hogy egyik többszöröse a másiknak, viszont $n+1$, $n+2$, ..., $2n$ mutatja, hogy megadhatunk n számot $2n$-ig, úgy, hogy egyik se osztható a másikkal. Az én eredeti bizonyításom kissé komplikált volt, de VÁZSONYI ENDRE, WACHSBERGER MÁRTA, LÁZÁR DEZSŐ és TURÁN PÁL egyszerű bizonyításokat találtak. E cikkben tárgyalt problémák mind ilyen természetű számelméleti szélsőérték feladatok lesznek — némelyikük könnyű, majdnem középiskolás nívójú — mások igen nehéz megoldatlan kérdések. A bizonyításokat csak akkor (és akkor se mindig) fogom közölni, ha még sehol se jelentek meg, de lehetőség szerint utalni fogok a kérdések irodalmára, melyeket közvetlenül a problémák diszkussziója után fogok megadni. Teljességre természetesen a problémák felsorolásában s az irodalmi utalásokban nem tarthatok igényt, s főleg oly problémákat fogunk csak diszkutálni, melyekkel én magam is foglalkoztam. E cikk első részében olyan szélsőértékfeladatokra fogunk szorítkozni, amelyekben a számok véges intervallumban vannak, e megkötések nélkül a problémák természete teljesen megváltozik.

$c, c_1, c_2, \ldots$ pozitív abszolút konstansokat fognak jelölni, $a_1, a_2, \ldots$, $\ldots, b_1 \ldots$ mindig pozitív egész számokat, rövidség kedvéért e cikkben „szám" mindig pozitív egész számot fog jelölni. $\exp z = e^z$ jelölést fogjuk használni.

Az egyszerűbb problémák egy része megjelent az American Mathematical Monthly problémarovatában és Erdős—Surányi „Bevezetés a számelméletbe" című könyvében.

Az előbb említett egyszerű kérdéssel kapcsolatos a következő, sokkal nehezebb kérdés: Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy egyik se osztható a másikkal. Mekkora $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$ maximuma (k értéke nem fix)?

E feladat teljes megoldása, az extrém sorozat és a maximum meghatározása itt reménytelennek látszik. Behrend bebizonyította, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < c_1 \log n/(\log\log n)^{1/2}. \tag{1}$$

Behrend azt is kimutatta, hogy az (1) által adott nagyságrend nem javítható. Én bebizonyítottam, hogy

$$\max \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = (1+o(1))\frac{\log n}{(2\pi\cdot\log\log n)^{1/2}}. \tag{2}$$

Amer. Math. Monthly 44 (1937), 120. Lásd még TURÁN PÁL, Az egész számok bizonyos számsorozatairól, Középisk. Mat. Lapok 1954, III. 2. p. 33—41. F. BEHREND, On sequences of numbers not divisible one by another, London Math. Soc. Journal 10 (1935) 42—45. P. ERDŐS, On the integers having exactly k-prime factors, Annals of Math. 49 (1948), 53—66, lásd 61. és 62. oldalt.

Az e cikkben tárgyalandó kérdések egy része meg van említve „Some unsolved problems", Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 6 (1961) 221—254 című cikkemben.

1. Ha $a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$ olyan, hogy egyik se osztható a másikkal, akkor $\min a_1 = 2^k$, ahol $3^k < 2n < 3^{k+1}$. Amer. Math. Monthly 46 (1939), 240. Emma Lehmer megoldása.

2. Legyen $a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$, akkor

$$\min_{i \neq j} [a_i, a_j] \leqq 6\left[\frac{n}{2}\right] + 1 \quad \text{ha} \quad n \neq 4.$$

Amer. Math. Monthly 65 (1958), 47. C. R. Phelphs megoldása.

Kérdezhető továbbá, hogy legfeljebb hány szám adható meg n-ig úgy, hogy bármely kettő legkisebb közös többszöröse nagyobb legyen, mint cn. c bizonyos speciális értékeire ezt megoldottam, de általános megoldásom egyelőre nincsen.

3. Legyen $a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$. Fennáll

$$\max (a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c. \tag{1}$$

$\frac{38}{147}$ nem javítható.

Amer. Math. Monthly 44 (1937), 394. E feladatra nem érkezett megoldás.

Jelölje általában $f(d, n)$ azon számok maximális számát n-ig, hogy bármely kettő legnagyobb közös osztója $\leqq d$. Legyen $a_1 < \ldots < a_l$,

$l=f(d, n)$ egy ilyen sorozat, amelyről még feltesszük, hogy egyik a_i se helyettesíthető egy nála kisebb a_i' számmal (azaz, hogy $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \ldots, a_l$ már nem elégíti ki feltételeinket). Nyilvánvaló, hogy ily tulajdonságú $a_1 < \ldots < a_l$ sorozat létezik. Továbbá nyilvánvaló, hogy ha a_i előfordul sorozatunkban, akkor a_i minden osztója is előfordul, (ha ugyanis $t|a_i$ nem fordulna elő, akkor $a_1, \ldots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \ldots, a_l$ is kielégítené feltételeinket). E feltétel azonban extrém sorozatunkat már meg is határozza. Sorozatunk tartalmazza az $(1, 2d)$ intervallum összes számait és $k>2$-re a $((k-1)d, kd)$ intervallum összes olyan számait, amelyeknek legkisebb prímfaktora $\geq k$. Ezzel $f(d, n)$-et meghatároztuk. (1)-et ennek alapján könnyen bebizonyíthatjuk. Megjegyezzük még, hogy az a_i sorozat a (d^2, n) intervallumokban csak prímszámokat tartalmazhat.

4. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy egyik a sem foglaltatik a többi sorozatában. Fennáll $k \leqq \pi(n)$, ahol $\pi(n)$ az n-nél nem nagyobb prímszámok számát jelenti.

5. Jelölje $f(a_1, \ldots, a_k; n)$ azon $m \leqq n$ számok számát, melyek vagy valamelyik a többszörösei, vagy valamelyiknek osztói. Akkor, ha mindegyik a n-nél nem nagyobb

$$f(a_1, \ldots, a_k; n) \leqq f(2, \ldots, p_k; n)$$

azaz függvényünk akkor maximum, ha $a_i = p_i$, ahol p_i az i-edik prímszám.

Amer. Math. Monthly 60 (1953) 717. SZEKERES GYÖRGY megoldása.

6. Ha $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy $a_i + a_j \neq a_r$, akkor $\max k = \frac{n+1}{2}$.

Ezek mind feladataim voltak az American Mathematical Monthlyban. 4. és 6. egészen könnyűek, 5. a legnehezebb.

6-tal kapcsolatban megemlítem a következő tételt, melyet nemrég bizonyítottam be, s mely e folyóiratban fog megjelenni: Legyen $a_1 < \ldots$ olyan sorozat, hogy egy a se összege csupa különböző más a-nak. Akkor $\sum_i \frac{1}{a_i} < 103$, 103 biztos erősen javítható, a pontos határ megállapítása azonban nem lesz könnyű.

7. Legyen $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ olyan, hogy bármely $i \neq j$ számpárra $[a_i, a_j] > n$. Sejtettem, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \leqq \frac{31}{30} \tag{1}$$

egyenlőség csak, ha $n=5$ és $a_1=2$, $a_2=3$, $a_3=5$.

E sejtést SCHINZEL és SZEKERES bebizonyították, a bizonyítás nem egyszerű. $\frac{3}{2}$-el $\frac{31}{30}$ helyett (1) könnyen bizonyítható.

Schinzel és Szekeres bebizonyítják azt is, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz és $n > n_0$-hoz van oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$, melyre $[a_i, a_j] > n$ minden $i \neq j$-re és

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} > 1 - \varepsilon. \tag{2}$$

Sejtem azonban, hogy ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < 1 + \varepsilon$. Talán $n > n_0$-ra

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} < 1.$$

Schinzel és Szekeres bebizonyítják, hogy minden $\varepsilon > 0$-hoz van oly n_0, hogy ha $n > n_0$, akkor van oly

$$a_1 < \ldots < a_k \leqq n, [a_i, a_j] > n \quad \text{ha} \quad i \neq j \tag{3}$$

úgy, hogy azon számok száma n-ig, amelyek egyetlen a-val sem oszthatók, kisebb, mint εn. Ez, mint könnyű belátni, valamivel élesebb, mint (2).

Ezzel kapcsolatban felvethető a következő kérdés: Legalább hány olyan szám van n-ig, mely a (3)-at kielégítő sorozat egyetlen tagjával sem oszthatók? E számok számára nem tudok alsó becslést. Ha még feltesszük, hogy $k > cn$, akkor kérdezhetjük, hogy legalább hány oly $d \leqq n$ szám van, mely legalább egy a-nak valódi osztója. Az alsó becslés természetesen c-től fog függni. Itt talán az $[a_i, a_j] > n$ a gyengébb $a_i \nmid a_j$ feltétellel helyettesíthető.

A. SCHINZEL and G. SZEKERES, Sur un probleme de M. Paul Erdős, Acta Szeged 20 (1959), 221—229.

(1)-et 2-vel $\frac{31}{30}$ helyett kitűztem az Amer. Math. Monthlyban 58 (1951), 345. R. S. LEHMAN $\frac{3}{2}$-vel (sőt még valamivel élesebben) bizonyította. $\frac{31}{30}$ bizonyítása azonban úgy látszik, lényegesen nehezebb.

8. Jelölje $r_k(n)$ azon számok maximális számát n-ig, melyek nem tartalmaznak k tagú számtani sort. Ismeretes, hogy

$$n^{1 - c_1/(\log n)^{1/2}} < r_3(n) < c_2\, n/\log\log n. \tag{1}$$

$r_k(n) = o(n)$ $k > 3$-ra nincsen bebizonyítva!

(1)-ben az alsó határ BEHRENDtől való, a felső határ ROTH-tól. Nagyon érdekes lenne a határokat (1)-ben szűkíteni, valamint $r_k(n)$-et főleg felülről — megbecsülni.

F. A. BEHREND, On sets of integers which contain no three terms in arithmetical progression. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 32 (1946) 331—332.

K. F. ROTH, On certain sets of integers, London Math. Soc. Journal 28 (1953) 104—109.

Lásd még TURÁN PÁL a bevezetésben idézett cikkét.

9. Legyen $\varphi(k) = \pm 1$. Mekkora

$$\max_{d,m} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ m,d \leq n}}^{m} \varphi(d,j) \right| = F(n)$$

minimuma, ha $\varphi(k)$ végigfutja az összes ± 1 értékeket felvevő függvényeket. Könnyen belátható, hogy $F(n) < c_1 \log n$, s valószínűleg $F(n) > c_2 \log n$, de még az sincsen bebizonyítva, hogy $F(n)$ n-el együtt végtelenhez tart.

A 8. és 9. problémák összefüggnek VAN DER WAERDEN tételével, amely szerint minden k-hoz van oly $f(k)$, hogy ha $f(k)$-ig a számokat beosztjuk két részre, akkor legalább az egyik rész tartalmaz k-tagú számtani sort. VAN DEN WAERDEN — ugyanúgy, mint minden későbbi bizonyítás — nagyon rossz felső becslést nyer $f(k)$-ra. RADÓval bebizonyítottuk, hogy $f(k) > ((k-1)2^k)^{1/2}$ és nemrégen W. SCHMIDT bebizonyította, hogy $f(k) > 2^{k - c_3 k^{1/2} \log k}$. Nagyon kívánatos lenne $f(k)$-ra jobb alsó és főleg felső becslést találni.

RAMSAY ismert tételéhez hasonlóan (lásd pl. P. ERDŐS and G. SZEKERES, A combinatorical problem in geometry, Compositio Math. 2 (1935) 463—470) a következő kérdést vethetjük fel: Jelentse $f(k, l)$ azt a legkisebb egész számot, hogy ha $f(k, l)$-ig az egész számokat két részre osztjuk úgy, hogy az első rész nem tartalmaz k-tagú számtani sort, akkor a második rész tartalmaz l-tagú számtani sort. Érdekes lenne $f(k, l)$-re nem túl rossz alsó és felső becslést találni. (Triviális felső becslés $f(k, l) < f(l)$, ha $k \leq l$). Különösen érdekes lenne $f(3, l)$-re becsléseket találni.

További kérdés (melyet VAN DER WAERDEN is tárgyal) a következő: Megbecslendő az a legnagyobb $g_3(n)$ szám, hogy a számokat $g_3(n)$-ig n részre lehet osztani úgy, hogy egyikük se tartalmazzon három tagú számtani sort, Van der Waerden azonban csak nagyon rossz felső becslést kap $g_3(n)$-re, de jobb tudtommal nem ismeretes.

Még a következő elemi kérdést szeretném megemlíteni, melyre talán könnyű lesz válaszolni. Legyen A egész számok egy tetszőleges sorozata, $f_3(A)$ jelölje az A-ban foglalt háromtagú számtani sorok számát. Legyen $A^{(n)}$ és $B^{(n)}$ az $(1, n)$ intervallum számainak két diszjunkt osztályra való bontása. Mekkora $f_3(A^{(n)})+f_3(B^{(n)})$ minimuma? Ugyanez kérdezhető $f_k(A^{(n)})+f_k(B^{(n)})$ összegre is (ahol $f_k(A)$ az A-ban foglalt k tagú számtani sorok számát jelenti.)

VARNAVIDES bebizonyította (ROTH tételének segítségével), hogy ha az $A^{(n)}$ sorozat tagjainak száma $>c_4 n$, akkor $f_3(A^{(n)})>c_5 n^2$, de $f_3(A^{(n)})$ minimumának meghatározása nem lesz könnyű.

$f_3(A)$ az $x+y=2z$ megoldásainak számát jelenti, ahol x, y, z A elemei. Ugyane kérdések vizsgálhatók más egyenletre például az $x+y=z$ esetén.

SCHURtól való a következő tétel: Ha a számokat az $(1, en!)$ intervallumban n részre osztjuk, akkor legalább az egyik részben az $x+y=z$ egyenlet megoldható. $en!$ valószínűleg lényegesen javítható és ha $A(n)$ jelenti azt a legkisebb egész számot, melyre a tétel igaz marad, akkor valószínűleg igaz, hogy $\lim_{n=\infty} A(n)^{1/n}=C<\infty$. Triviális, hogy $A(n)>2^n$ $(n\geqq 2)$ és e becslés könnyen javítható.

Ebbe a kérdéskörbe való TURÁN publikálatlan eredménye: Ha az $n\leqq m\leqq 5n+3$ számokat beosztjuk két részre, akkor legalább az egyik részben

$$x+y=z, \quad x<y<z$$

megoldható. $5n+3$ nem javítható.

Kettőnél több osztályra nem ismeretes analóg tétel.

B. L. VAN DER WAERDEN, Beweis einer Baudet'schen Vermutung, Nieuw Archiv Viskunde (2) 15 (1928), 212—216. Lásd még R. RADÓ, Studien zur Kombinatorik, Math. Zeitschrift 36 (1933), 424—480, és KHINTCHINE „A számelmélet három gyöngye", című könyvét, mely orosz eredeti mellett német és angol fordításban is megjelent.

P. ERDŐS and R. RADÓ, Combinatorial theorems on classifications of subsets of a given set, Proc. London Math. Soc. (3) 2 (1952) 438—439. W. SCHMIDT bizonyítása még nem lett publikálva, lásd Amer. Math. Soc. Notices, június, 1961, 261 oldal.

I. SCHUR, Jahresbericht der Deutschen Math. Ver. 25 (1916) 114.

P. VARNAVIDES, On certain sets of positive density, London Math. Soc. Journal 34 (1959), 358—360.

10. (lásd 4. és a bevezetést). Legyen $a_1<\ldots<a_l\leqq n$ egész számok oly sorozata, hogy egy a sem foglaltatik k vagy kevesebb a szorzatában. Mekkora l maximuma? Jelöljük l maximális értékét $f(k, n)$-el. Bebizonyítottam, hogy

$$\pi(n)+c_1\frac{n^{2/3}}{(\log n)^2}<f(2,n)<\pi(n)+c_2\frac{n^{2/3}}{(\log n)^2} \tag{1}$$

és úgy látom, hogy módszeremmel $k>2$-re adódik, hogy

$$\pi(n)+c_1^{(k)}\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}<f(k,n)<\pi(n)+c_2^{(k)}\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}, \tag{2}$$

(2)-vel azonban itt nem foglalkozunk. A bevezetésben tárgyalt kérdés adja, hogy $f(1,n)=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, azonban $f(k,n)$ pontos meghatározása már $k=2$-re is reménytelen feladatnak látszik. Talán nem lesz reménytelen bebizonyítani, hogy létezik oly c konstans, melyre

$$f(k,n)=\pi(n)+c\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}+o\left(\frac{n^{2/2k+1}}{(\log n)^2}\right), \tag{3}$$

de (3) bebizonyítása nekem már $k=2$-re se sikerült.

P. ERDŐS, On sequences of integers no one of which divides the product of two others and on some related problems. Mitteilungen des Forschungsinstitutes für Math. und Mech. Tomsk 2 (1938), 74—82.

11. A 10. alatt idézett cikkben a következő tételt is bebizonyítom: Legyen $a_1<\ldots<a_y\leqq n$ olyan sorozat, hogy az a_ia_j szorzatok mind különbözők, akkor

$$y<\pi(n)+c_1n^{3/4} \tag{1}$$

és egy alkalmasan konstruált sorozatra

$$y>\pi(n)+c_2n^{3/4}/(\log n)^{3/2}. \tag{2}$$

Sikerült bebizonyítanom, hogy (2) adja a helyes nagyságrendet, ugyanis fennáll

$$y<\pi(n)+c_3\frac{n^{3/4}}{(\log n)^{3/2}}. \tag{3}$$

(3) bizonyításával, mely komplikált, itt nem foglalkozunk.

Általánosabban legyen $a_1<\ldots<a_{y_k}\leqq n$ egész számok oly sorozata, hogy az $a_{i_1}\ldots a_{i_r}$, $1\leqq r\leqq k$ sorozatok mind különbözők. Mekkora y_k maximuma? $k>2$-re e kérdést nem vizsgáltam. (Itt tulajdonképpen két különböző kérdést kapunk, aszerint, hogy megkívánjuk, hogy az a-k mind különbözőek legyenek vagy nem, valószínű azonban, hogy ez y_k nagyságrendjét nem nagyon fogja befolyásolni.)

Legyen $a_1<\ldots<a_z\leqq n$ olyan sorozat, hogy a

$$\prod_{i=1}^{z}a_i^{\varepsilon_i},\qquad \varepsilon_i=0 \quad\text{vagy } 1 \tag{4}$$

szorzatok mind különbözőek. Mekkora Z maximuma? Bebizonyítottam, hogy

(5) $$Z < \pi(n) + 2n^{2/3}.$$

Nem lehetetlen, hogy Z maximuma meghatározható. Legyenek ugyanis az a-k a p^{2^t} alakú számok, ahol p végigfut a prímszámokon és $t \leqq T$, ahol $p^{2^T} \leqq n < p^{2^{T+1}}$. Könnyű belátni, hogy erre a szorzatra a (4) alatti számok mind különbözők, s talán erre a sorozatra éretik el Z maximuma. Ha ez igaz, úgy (5) helyett $Z < \pi(n) + cn^{1/2}/\log n$ is igaz.

(Megjegyzés a korrekturánál). PÓSA és én megjegyeztük, hogy GUY és CONWAY példája miatt (lásd 26-ik probléma) a fenti példa nem adhatja Z maximumát; $Z < \pi(n) + cn^{1/2}/\log n$ valószínűleg igaz lesz.

Ha (4) helyett azt tesszük fel, hogy az összes $\prod_{i=1}^{Z} a_i^{\alpha_i}$, $0 \leqq \alpha_i < \infty$ szorzatok mind különbözőek, akkor könnyű belátni, hogy $\max Z \leqq \pi(n)$.

Most még vázolom (5) bizonyítását. A következő lemmára lesz szükségünk: Minden $m \leqq n$ számra fennáll $m = x^{(m)} \cdot y^{(m)}$ ahol $x^{(m)}$ vagy prímszám vagy $x^{(m)} \leqq n^{2/3}$ és $y^{(m)} \leqq n^{2/3}$. A lemma egyszerű és bizonyítását az olvasóra bízzuk (a lemma bizonyítása a 10. alatt idézett cikkben található.)

Az a_i, $1 \leqq i \leqq Z$ számokat állítsuk elő $x^{(a_i)} \cdot y^{(a_i)}$ alakban. Az $x^{(a_i)}$ és $y^{(a_i)}$ számokat képzeljük pontokkal helyettesítve és az a_i számnak feleltessük meg az $x^{(a_i)}$ és $y^{(a_i)}$ pontokat összekötő élt. Ilymódon egy páros körüljárású gráfot nyerünk (azaz egy olyan gráfot, melyben minden zárt vonalnak páros sok éle van). E gráf szögpontjainak száma legfeljebb $\pi(n) + 2n^{2/3}$. (Ugyanis az $x^{(m)}$ számok száma $< \pi(n) + n^{2/3}$ és az $y^{(m)}$ számok száma $\leqq n^{2/3}$). Egy jólismert (és majdnem triviális) tétel szerint, ha egy gráf éleinek száma nem kisebb, mint a szögpontok száma, akkor a gráfnak van zárt vonala. Ha tehát $Z \geqq \pi(n) + 2n^{2/3}$, volna, akkor páros körüljárású gráfunknak volna egy mondjuk $2l$ élű zárt vonala. Legyenek a zárt vonalban előforduló élek $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{2l}}$. Ekkor azonban nyilván fennáll

$$\prod_{r=1}^{l} a_{i_{2r}} = \prod_{r=0}^{l-1} a_{i_{2r+1}}.$$

Ezzel (5) igazolva van. A 10. alatt idézett cikkben egy élesebb lemmát is bizonyítok, melyből (5) helyett $Z < \pi(n) + cn^{2/3}/(\log n)^2$ nyerhető.

Teljesen más természetű problémára jutunk, ha (4) helyett azt tesszük fel, hogy

(6) $$\prod_{r=1}^{l_1} a_{i_r} = \prod_{r=1}^{l_2} a_{j_r}$$

csak akkor lehetséges, ha $l_1 = l_2$. (6) nyilván teljesül, ha az a-k a pontosan 2-vel osztható számokon futnak végig. Lehetséges, hogy itt $\max Z > n(1-\varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $n > n_0(\varepsilon)$.

12. Legyen $a_1 < \ldots < a_x \leqq n$; $b_1 < \ldots < b_y \leqq n$, tegyük fel, hogy az $a_i b_j$ szorzatok mind különbözők. Mekkora az xy szorzat maximális értéke? Lehetséges, hogy $xy < c_1 n^2/\log n$. Ha e becslés helyes, úgy már a helyes nagyságrendet adja, mint ezt a következő példa mutatja: Legyenek az a-k az $\frac{n}{2}$-nél kisebb prímszámok és a b-k az $\frac{n}{2}$ és n közötti számok. Én azonban csak azt tudom bebizonyítani, hogy $xy < c_2 n^2/(\log n)^{c_3}$

13. Legyen $a_1 < \ldots < a_{x_l} \leqq n$ olyan sorozat, hogy minden m-re az $m = a_i a_j$ egyenletnek l-nél kevesebb megoldása van. Mekkora x_l maximális értéke? 11. alatt e kérdést $l=2$-re tárgyaltuk, $l>2$ esetén a kérdés sokkal nehezebb. Jelentse $\pi_k(n)$ azon számok számát n-ig, amelyeknek $(k+1)$-nél kevesebb különböző prímfaktoruk van. Ha

$$x > (1+\varepsilon)\pi_k(n) \tag{1}$$

és $n > n_0(\varepsilon)$ elegendő nagy, akkor van oly m, melyre az $m = a_i a_j$ egyenletnek legalább 2^k megoldása van. (1) bizonyítása igen komplikált és itt nem foglalkozunk vele. (1)-ből könnyen levezethető, hogy ha $a_1 < a_2 < \ldots$ végtelen sorozat olyan, hogy minden elegendő nagy szám $a_i a_j$ alakba írható, akkor minden k-hoz van oly n_k, hogy az $n_k = a_i a_j$ egyenletnek k-nál több megoldása van. E kérdés additív analogonja régi sejtésünk Turánnal: Legyen $b_1 < \ldots$ oly sorozat, hogy minden elegendő nagy szám $b_i + b_j$ alakba írható. Van-e akkor minden k-hoz oly n_k, hogy az $n_k = b_i + b_j$ egyenletnek k-nál több megoldása van? E kérdés igen nehéznek látszik.

Még a következő tételt szeretném bizonyítás nélkül kimondani: Legyen $x > n \log\log n/\log n - c_1\, n/(\log n)^2$ akkor, ha c_1 elegendő kicsi, van oly m szám, melyre az $m = a_i a_j$ egyenletnek legalább három megoldása van. E tétel nem marad igaz, ha c_1 helyett elég nagy c_2 abszolút konstanst veszünk. A bizonyítás nem egészen egyszerű, s itt nem foglalkozunk vele.

14. Legfeljebb hány szám adható meg n-ig, hogy ne legyen közülük k, melyeknek páronként ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk? $k=3$ esetén se tudok erről a kérdésről érdemleges eredményt.

E számok maximális számát jelöljük $A_k(n)$-el. Schinzel a napokban közölte velem, hogy bebizonyította:

$$A_3(n) < cn \log\log\log n/\log n.$$

L. Moser ugyancsak a napokban közölte velem a következő kérdést: Maximálisan hány szám adható meg n-ig, hogy bármely k-nak különböző legyen a legnagyobb közös osztója. Jelöljük e maximumot $B_k(n)$-el.

Moser kimutatta, hogy $B_k(n) > \exp(c_k \log n/\log\log n)$. Könnyű belátni továbbá, hogy $B_k(n) < \exp((1+\varepsilon)\log 2, \log n/\log\log n)$ s talán

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log B_k(n) \log\log n}{\log n \cdot \log 2} = 1.$$

Triviális, hogy $A_k(n) \geqq B_k(n)$, s így Schinzel és Moser eredményeiből nyerjük, hogy

$$\exp(c_3 \log n/\log\log n) < A_3(n) < \frac{cn \log\log\log n}{\log n}.$$

Sejtelmem sincs, hogy mi $A_3(n)$ valódi nagyságrendje.

A cikk megírása után bebizonyítottam, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra és k-ra, ha

(2) $$A_k(n) < \frac{n}{\exp((\log n)^{1/2-\varepsilon})}.$$

(2) bizonyítását vázoljuk. Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots < a_l$, $l = A_k(n)$ oly maximális sorozat, melynek nincsen k eleme, melyeknek páronként ugyanaz a legnagyobb közös osztójuk. Minden a_i egyértelműen $u_i v_i$ alakba írható, ahol u_i minden prímfaktora nem nagyobb, mint $\exp((\log n)^{1/2})$ és v_i minden prímfaktora nagyobb, mint $\exp((\log n)^{1/2})$. Jelölje p_l a legkisebb $\exp((\log n)^{1/2})$-nél nagyobb prímszámot. Fix u_i mellett legfeljebb

(3) $$\left[\frac{n(k-1)}{p_l u_i}\right] + 1$$

v_i lehetséges, ha ti. egy p_l hosszúságú intervallumban k v_i lenne, akkor ezek páronként relatív prímszámok lennének, s a megfelelő a-knak páronként u_i lenne a legnagyobb közös osztója, ami lehetetlen. Ha viszont $p_l u_i > n$, akkor az $u_i = a_i$ $v_i = 1$ esetleg lehetséges, s ez az oka (3)-ban a $+1$ összeadandónak. (3) miatt

(4) $$A_k(n) = l \leqq \sum_i \left(\left[\frac{(k-1)n}{p_l u_i}\right] + 1\right) \leqq$$
$$\leqq \frac{(k-1)n}{\exp((\log n)^{1/2})} \sum_i \frac{1}{u_i} + \psi(n, \exp((\log n)^{1/2})),$$

ahol $\psi(x, y)$ jelenti, hogy hány olyan szám van x-ig, melyeknek minden prímfaktora $\leqq y$. De Bruijn 20 alatt idézett cikke miatt

(5) $$\psi(n, \exp((\log n)^{1/2}) < \frac{1}{2} \frac{n}{\exp((\log n)^{1/2-\varepsilon})},$$

továbbá

(6) $$\sum_i \frac{1}{u_i} \leqq \prod_{p<\exp((\log n)^{1/2})} \left(1+\frac{1}{p-1}\right) < \log n.$$

(2), (4), (5) és (6)-ból azonnal következik. Lehetséges, hogy (2) már nincsen messze $A_k(n)$ valódi nagyságrendjétől.

15. Maximálisan hány szám adható meg n-ig, úgy, hogy bármely kettő legkisebb közös többszöröse $\leqq n$ legyen?

Sejtem, hogy az extremális sorozat tagjai a következő számok:

$$1 \leqq i \leqq \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} \quad \text{és} \quad \left(\frac{n}{2}\right)^{1/2} < 2j \leqq (2n)^{1/2}.$$

Könnyű bebizonyítani, hogy $3n^{1/2}$-nél kevesebb ily szám adható meg n-ig, sejtésem azonban $\frac{3}{2^{3/2}} n^{1/2}$-et adna.

16. Mekkora lehet $k=k(n)$, ha van oly $m \leqq n$, hogy az $m, m+1, \ldots, m+k$ számok mindegyike legalább egy k-nál nagyobb prímszámmal oszthatók? Nem nehéz bebizonyítani, hogy $k(n) > \exp((\log n)^{1/2-\varepsilon})$ minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $n > n_0(\varepsilon)$. Érdekes, hogy $k(n)$-re nincs elfogadható felső becslésem. Valószínűnek látszik, hogy $k(n) = o(n^\varepsilon)$ minden $\varepsilon > 0$-ra.

17. SYLVESTER és SCHURtól való a következő tétel: Legyen $n \geqq k$, akkor az $n+1, \ldots, n+k$ számok legalább egyike osztható egy k-nál nagyobb prímszámmal. Jelölje $f(k)$ azt a legkisebb egész számot, hogy $f(k)$ k-nál nagyobb egymásután következő szám szorzata mindig osztható legalább egy k-nál nagyobb prímszámmal. Bebizonyítottam, hogy $f(k) < c_1 k/\log k$. RANKIN egy tételéből következik, hogy

$$f(k) > c_2 \log k \operatorname{loglog} k \operatorname{logloglog} k/(\operatorname{logloglog} k)^2.$$

Lehetséges, hogy $f(k)$ valódi nagyságrendje $(\log k)^2$, ennek eldöntése azonban nagyon nehéz lesz. L. MOSER a napokban közölte velem, hogy bebizonyította, hogy ha $n > k$, akkor $\prod_{i=0}^{k-1} (n+i)$ mindig tartalmaz $\frac{3k}{2}$-nél nem kisebb prímfaktort. 3. 4 és 8. 9 mutatja, hogy ez nem javítható (k nagy értékeire természetesen javítható ez).

Nyilvánvaló, hogy $f(2)=2$ és könnyű belátni, hogy $f(3)=f(4)=3$. Nemrég UTZ bebizonyította, hogy $f(5)=\ldots=f(10)=4$. Az $f(k)$-ra vonatkozó kérdések összefüggnek az egymásután következő prímszámok közötti különbségre vonatkozó kérdésekkel és azon kérdéssel, hogy hány olyan egymásután következő szám van, melyeknek mindegyike osztható egy k-nál nem nagyobb prímszámmal.

P. ERDŐS, On a theorem of SYLVESTER and SCHUR, Journal London Math. Soc. 9 (1934) 282—288.

P. Erdős, On a theorem of Sylvester and Schur, Nièuw Arch. Wisk. 3 (1955) 124—128.

R. A. Rankin, The difference between consecutive prime numbers, Journal London Math. Soc. 13 (1938) 242—247.

W. R. Utz, A conjecture of Erdős concerning consecutive integers, Amer. Math. Monthly 68 (1961) 896—897.

L. Moser bizonyítása még nincsen publikálva.

18. Az $n < a_1 < \ldots < a_l \leqq n+k$ számsorozatot akkor nevezzük teljesnek, ha $(a_i, a_j) = 1$, $1 \leqq i < j \leqq l$ és minden m-hez $n < m \leqq n+k$ van oly a_r, melyre $(m, a_r) > 1$. Jelölje $f(n, k)$, illetve $F(n, k)$ l minimális illetve maximális értékét. Könnyű belátni, hogy

$$\min_n f(n, k) = 2 \quad \text{minden} \quad k\text{-ra.}$$

Ugyanis, ha $n = k! - 1$, akkor $k!$ és $k! + 1$ teljes rendszert alkotnak és $f(n, k)$ nyilván nagyobb, mint 1. $\max_n f(n, k)$, $\min_n F(n, k)$ és $\max_n F(n, k)$ meghatározása illetve megbecslése lényegesen nehezebb feladat, melynek teljes megoldásától messze vagyok.

Összefügg e kérdésekkel, hogy k egymásután következő szám között legfeljebb hány olyan lehet, melyeknek minden prímfaktora k-nál nagyobb. Sokkal nehezebb kérdés, hogy k egymásután következő szám között hány prímszám lehet. Sejthető, hogy legfeljebb $\pi(k)$ azaz $\pi(n+k) \leqq \pi(n) + \pi(k)$, de ez csak k kis értékeire van bebizonyítva. Hardy és Littlewood után jelöljük

$$\varrho(y) = \limsup_{x \to \infty} (\pi(x+y) - \pi(x)).$$

Sejthető, hogy $\limsup_{y \to \infty} \varrho(y) = \infty$, de még az se ismeretes, hogy $y > y_0$-ra $p(y) \geqq 2$ (azaz hogy $\liminf_{k \to \infty} (p_{k+1} - p_k) < \infty$). Hardy és Littlewood sejtették, hogy ha $y > y_0$, akkor

$$\varrho(y) > \frac{y}{\log y}.$$

Másrészt Brun módszerével bebizonyították, hogy $\varrho(y) < cy/\log y$. Jelölje $h_n(k)$ az $n < x \leqq n+k$ intervallumban levő azon számok számát, melyek egyetlen k-nál kisebb prímszámmal sem oszthatók. Hardy és Littlewood sejtették, hogy

$$\varrho(k) = \max_n h_n(k).$$

Valószínűnek látszik, hogy $\lim_{y \to \infty} (\pi(y) - \varrho(y)) = \infty$.

G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of partitio numerorum III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math. 44 (1923) 1—70, lásd 52—70. oldalt.

Hasonló prímszámokra vonatkozó sejtések találhatók a következő cikkben: A. Schinzel et W. Sierpinski, Sur certaines hypotheses concernant les nombres premiers, Acta Arithmetica 4 (1958) 185—207.

Most néhány kongruenciarendszerekre vonatkozó problémát fogunk diszkutálni.

19. Egy $a_i (\text{mod}\, n_i)$, $1 < n_1 < \ldots < n_k$ kongruenciarendszert akkor nevezünk lefedőnek, ha mindegyik szám ezen kongruenciák valamelyikét kielégíti. Könnyű bebizonyítani, hogy k minimális értéke 5 és hogy $0 (\text{mod}\, 2)$, $0 (\text{mod}\, 3)$ $1 (\text{mod}\, 4)$, $5 (\text{mod}\, 6)$, $7 (\text{mod}\, 12)$ lefedő kongruenciarendszert alkot.

Felvethető mármost a következő kérdés: Legyen n_1 tetszőleges egész szám, létezik-e oly lefedő kongruenciarendszer, melynek legkisebb modulusa n_1 és mekkora $k = f(n_1)$ maximális értéke. Davenport és én konstruáltunk lefedő kongruenciát, melyre $n_1 = 3$ ez nem nehéz, de $f(3)$ értéke már nem ismeretes. $n_1 = 4$ és $n_1 = 6$ esetre Dean Swift konstruált lefedő kongruenciákat, ez már lényegesen nehezebb, és $n_1 = 8$ esetre Selfridge. Az általános kérdés nincsen megoldva, és nem is látszik könnyűnek. Kérdezhető még, mekkora $g(n_1) = n_k$ minimális értéke. Könnyű belátni, hogy $g(2) = 12$, valószínűleg $g(3) = 120$. (Ez nem igaz, a stockholmi nemzetközi matematikai kongresszuson egy kolléga említette, hogy $g(3)$ értékét meghatározta, de se $g(3)$ értékére se a kolléga nevére nem emlékszem.)

Nem ismeretes, vajon van-e oly lefedő kongruenciarendszer, melynek minden modulusa páratlan. Itt nyilván még sok kérdés vethető fel, de ezeknek megfogalmazását az olvasóra bízzuk.

20. Sejtettem, hogy minden lefedő kongruenciarendszerre $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} > 1$. E sejtést Mirsky és Newmann bebizonyították s S. Stein egy általánosabb tételt bizonyított be.

Nevezzük az $a_i (\text{mod}\, n_i)$, $1 < n_1 < \ldots < n_k$ kongruenciarendszert idegennek, ha nincs oly szám, mely közülük egynél több kongruenciát tud kielégíteni. S. Stein sejtette, hogy ha az $a_i (\text{mod}\, n_i)$, $1 \leqq i \leqq k$ rendszer idegen, akkor mindig van oly $0 < u \leqq 2^k$ szám, mely ezen kongruenciák egyikét sem elégíti ki, $2^{i-1} (\text{mod}\, 2^i)$, $1 \leqq i \leqq k$ példája mutatja, hogy 2^k biztosan nem javítható. Most a következő sejtést fogalmazom meg (mely az imént említett Mirsky—Newmann tétel miatt élesebb, mint Steiné). Legyen

$$a_i (\text{mod}\, n_i), \quad 1 \leqq i \leqq k \tag{1}$$

oly kongruenciarendszer, hogy van oly szám, mely ezen kongruenciák egyikét se elégíti ki. Akkor már van oly ily tulajdonságú u szám, melyre $0<u\leqq 2^k$. E sejtés helyett azonban csak a következőt tudom bebizonyítani: Minden k-hoz létezik egy legkisebb $A(k)$, melyre teljesül a következő: Ha (1) oly kongruenciarendszer, melyhez van oly szám, mely ezeknek egyikét se elégíti ki, akkor már van oly ily tulajdonságú szám, melyre $0<u\leqq A(k)$. $A(k)$-ra azonban nem tudok explicit becslést.

Most térjünk vissza STEIN sejtésére. Először is vázoljuk a következő tétel bizonyítását:

Legyen

$$a_i(\text{mod}\, n_i), \quad 1\leqq i\leqq k \tag{2}$$

idegen rendszer. Akkor

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\leqq 1-\frac{1}{2^k}. \tag{3}$$

A bizonyítás MIRSKY—NEWMANN módszerét s teljes indukciót használ. $k=1$-re a tétel nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $(k-1)$-re (3) fennáll, be fogjuk bizonyítani, hogy k-ra is igaz. Ha $n_k\geqq 2^k$, úgy állításunk indukciós feltételünkből azonnal következik.

Minthogy a (2) rendszer idegen, könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{1-x}-\sum_{i=1}^{k}\frac{x^{a_i}}{1-x^{n_i}}=\sum_j x^{b_j}, \tag{4}$$

ahol $b_1<b_2<\ldots$ végigfut azon számokon, melyek a (2) kongruenciarendszer egyetlen kongruenciáját se elégítik ki, továbbá a b_j sorozat sűrűsége $1-\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}$. A (4) alatti azonosság nyilván $|x|<1$-re érvényes.

Legyen mármost $x=\left(1-\frac{1}{N}\right)e^{2\pi i/n_k}$, ahol $N\to\infty$. A baloldal mindegyik tagja, kivéve $\frac{x^{a_k}}{1-x^{n_k}}$, korlátos marad, $\frac{x^{a_k}}{1-x^{a_{n_k}}}$ abszolút értéke viszont, mint azt könnyű belátni, $(1+o(1))\frac{N}{n_k}$ alakú, ezért a (4) alatti kifejezés baloldalának abszolút értéke $(1+o(1))\frac{N}{n_k}$. A jobboldal abszolút értéke viszont nyilván legfeljebb

$$\sum_j\left(1-\frac{1}{N}\right)^{b_j}=(1+o(1))N\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\right) \tag{5}$$

(5) könnyen igazolható az elemi analízis eszközeivel ((a b_j sorozat sűrűsége $1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}$).

Ezért tehát

$$N\left(1-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}\right)\geqq\frac{N}{n_k} \quad \text{azaz} \quad \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_k}\leqq 1,$$

ami $n_k<2^k$ miatt azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{n_i}<1-\frac{1}{2^k}$, s ezzel (3) igazolva van.

Bizonyításunk azt is adja, hogy (3)-ban csak $n_i=2^i$, $1\leqq i\leqq k$ esetén lehet egyenlőség. 2^{i-1} (mod 2^i), $1\leqq i\leqq k$ mutatja, hogy egyenlőség tényleg lehetséges.

(3)-ból könnyen nyerjük, hogy van oly $u\leqq k\,2^k$ szám, mely a (2) kongruenciák egyikét se elégíti ki. Hogy ezt beláthassuk, megjegyezzük, hogy azon $1\leqq u\leqq k\,2^k$ számok száma, melyek a (2) kongruenciák egyikét se elégítik ki, nagyobb, mint

$$k2^k-\sum_{i=1}^{k}\left(\left[\frac{k\,2^k}{n_i}\right]+1\right)\geqq 0 \tag{6}$$

(3) miatt. Ezért tehát legalább egy $k\,2^k$-nál nem nagyobb szám van, mely a (2) alatti kongruenciák egyikét se elégíti ki.

STEIN sejtése $k\,2^k$ helyett 2^k-t állít. Úgy hiszem, hogy ennek bizonyítása az itt használt módszer javításával lehetséges lesz.

S. K. STEIN, Unions of arithmetic sequences, Math. Annalen, 134 (1957=58), 289=294.

ERDŐS PÁL, Egy kongruenciarendszerekről szóló problémáról, Mat. Lapok 3 (1952) 122—128.

21. S. STEINnal a következő kérdést vetettük fel: Legyen a_i(mod n_i), $n_1<\ldots<n_k\leqq x$ idegen kongruenciarendszer, mekkora k maximális értéke? Jelöljük k maximális értékét $f(x)$-el. Sejtjük, hogy

$$\lim_{x\to\infty} f(x)/x=0, \tag{1}$$

de eddig (1) bebizonyítása nem sikerült, nem tartom lehetetlennek azonban, hogy (1) könnyen lesz bizonyítható.

STEINnal bebizonyítottuk, hogy minden $\varepsilon>0$-ra, ha $x>x_0(\varepsilon)$

$$f(x)>\frac{x}{\exp\left((\log x)^{1/2+\varepsilon}\right)}. \tag{2}$$

(2) bizonyítását vázolom (a részletes bizonyítás HALBERSTAM s ROTH számsorozatokról szóló könyvében fog megjelenni). Legyen p_r a leg-

kisebb, $\exp(\log x)^{1/2}$-nél nagyobb prímszám, és $n_1 < n_2 < \dots$ az x-nél kisebb, p_r-től különböző négyzetmentes számok, melyeknek legnagyobb prímfaktora p_r. Legyen

$$n_j = p_{i_1} \dots p_{i_l} p_r,\ i_1 < \dots < i_l < i_r,$$

ahol $i_1, \dots, i_l$ végigfut az összes r-nél kisebb számokon, melyekre $n_j < x$. Legyen továbbá

(3) $\quad a_j \equiv 0 (\text{mod}\ p_{i_1}),\ a_j \equiv p_{i_{s-1}} (\text{mod}\ p_{i_s}),\ 1 < s < l,\ a_i \equiv p_{i_l} (\text{mod}\ p_r),$

A (3) alatti kongruenciák a_j maradékosztályát mod n_j nyilván egyértelműen meghatározzák. Továbbá könnyű belátni, hogy az $a_j (\text{mod}\ n_j)$ kongruenciarendszer idegen. Az n_j-k száma x-ig nyilván egyenlő azon $\frac{x}{p_r}$-nél kisebb négyzetmentes számok számával, melyeknek minden prímfaktora kisebb mint p_r. DE BRUIJN egy tételéből könnyen nyerhető, hogy ezeknek száma minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $x > x_0(\varepsilon)$ nagyobb, mint $x(\exp p((\log x)^{1/2+\varepsilon}))^{-1}$, s ezzel (2) igazolva van. Nincsen kizárva, hogy (2) már a helyes nagyságrendet adja $f(x)$-re, azaz talán minden $\varepsilon > 0$-ra

$$f(x) = o\left(\frac{x}{\exp((\log x)^{1/2-\varepsilon})}\right).$$

STEIN még a következő kérdést vetette fel: Legyen $a_i (\text{mod}\ n_i)$, $1 \leq n_i \leq x$ oly kongruenciarendszer, hogy minden szám x-ig ezen kongruenciák valamelyikét kielégíti. Mekkora $\sum_i \frac{1}{n_i}$ minimális értéke? E probléma kétféleképpen értelmezhető, megkívánhatjuk, hogy a n_i-k mind különbözőek legyenek, vagy e feltételtől eltekintünk. Jelöljük a második esetben $\sum_i \frac{1}{n_i}$ minimális értékét $D(x)$-el, HUTCHINSON bebizonyította, hogy minden x-re $D(x) > 2\sqrt{2} - 2$ és $\lim_{x\to\infty} D_x = 2\sqrt{2} - 2$. Az $a_i (\text{mod}\ n_i)$ számtani sorok pedig ily alakúak: $i (\text{mod}\ (x-p))$, $1 \leq i \leq p$ és $x (\text{mod}\ (p+i))$, $1 \leq i \leq x-p$, ahol $p = \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x\right]$ vagy $p = \left[\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)x\right] + 1$, Ha feltesszük, hogy a n_i-k mind különbözők, akkor a kérdés nincsen elintézve. (Írásbeli közlés alapján.)

Ezzel kapcsolatban a következő elemi kérdést vetettem fel: Tekintsük az

(4) $$a_i (\text{mod}\ n+i),\quad 1 \leq i \leq n$$

kongruenciákat. Legfeljebb hány oly $2n$-nél nem nagyobb szám lehetséges, mely e kongruenciák valamelyikét kielégíti. Először azt hittem, hogy $\left[\frac{3n}{2}\right]$, de SCHÖNHEIM ezt megcáfolta. HANANIval később bebizonyítottuk, hogy a (4) alatti kongruenciákat $2n$-ig legfeljebb $n+\left[\frac{2n-1}{3}\right]$ szám elégítheti ki, s hogy e határ el is érhető. Ezen állítások bizonyítását vázolni fogjuk.

Először kimutatjuk, hogy e határ nem javítható. Nyilván a (4) alatti kongruenciák mindegyike úgy választható, hogy legalább egy oly $2n$-nél nem nagyobb szám létezzen, mely őt kielégíti, de egyetlen más (4) alatti kongruenciának se tesz eleget, viszont legfeljebb két ily szám lehetséges, s célunk, hogy a (4) alatti kongruenciákat úgy válasszuk meg, hogy lehetőleg sok olyan legyen közülük, melynek két ily szám tesz eleget. Ez, mint könnyű belátni, azt jelenti, hogy k maximális értékét kell meghatározni, melyre vannak az $(1, n)$ intervallumban oly $a_1, \ldots, a_k$; $b_1, \ldots, b_k$ számok, melyekre az a_i+b_i számok mind különbözőek és $a_i+b_i \leqq n$ (ui. az $a_i(\bmod (n+b_i))$ kongruencia ekkor olyan, hogy két oly $2n$-nél nem nagyobb szám van, mely neki eleget tesz s egyetlen más kongruenciának sem tesz eleget). Azonban feltételeink azt jelentik, hogy

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i+b_i) \leqq n+n-1+\ldots+n-k+1=kn-\binom{k}{2},$$

másrészt

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \geqq \binom{k+1}{2}, \quad \sum_{i=1}^{k} b_i \geqq \binom{k+1}{2}.$$

Tehát

$$kn \geqq k(k+1)+\frac{k(k-1)}{2},$$

amiből egyszerű számítással adódik, hogy $k \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$. Könnyű belátni viszont, hogy $k \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$ lehetséges, legyen ui. mindig $a_i=i$, $1 \leqq i \leqq \left[\frac{2n-1}{3}\right]$. Ha $n=3m-1$, akkor $b_i=2m-2i$, ha $1 \leqq i \leqq m-1$ és $b_i=2m-1-2j$ ha $i=m+j$, $0 \leqq j \leqq m-1$, ha $n=3m$, akkor az a-k és b-k definíciója ugyanaz. Ha végül $n=3m+1$ akkor $b_i=2m-2i+1$ ha $1 \leqq i \leqq m$ és $b_i=2m-2j+2$ ha $i=m+j$, $1 \leqq j \leqq m$. Könnyű belátni, hogy $a_i+b_i \leqq n$ és az a_i+b_i összegek mind különbözők s ezzel tételünk be van bizonyítva.

N. G. de Bruijn. On the number of positive integers $\leqq x$ and free of prime factors $\geqq y$. Nederl. Acad. Wetensch. Proc. Ser. A. (Indigationes Math.) 54 (1951) 54—60.

21. Jelölje $h(n, k)$ azon számok maximális számát n-ig, melyek közül nem lehet kiválasztani $k+1$ számot úgy, hogy ezek páronként relatív prímszámok legyenek. Könnyű belátni, hogy

$$h(n, 1)=\left[\frac{n}{2}\right]. \tag{1}$$

Jelentse $A(n, k)$ azon számok számát n-ig, melyek a $2, 3, \ldots, p_k$ prímszámok valamelyikének többszörösei. Könnyű belátni, hogy $h(n, k)\geqq A(n, k)$ és sejtem, hogy

$$h(n, k) = A(n, k) \tag{2}$$

de (2) csak $k\leqq 2$-re van bebizonyítva.

Előttem ismeretlen, valószínűleg Newmantól való a következő meglepő sejtés: Legyen $a_1<\ldots<a_{n+1}\leqq 2n$, $n+1$ szám, akkor mindig van közöttük kettő, melyre

$$(a_i, a_j) = 1, \quad a_i\leqq n. \tag{3}$$

A nehézség az $a_i\leqq n$ feltételben van. Tudtommal e sejtés még nincsen elintézve. E kérdéssel kapcsolatos D. Newman szép sejtése (melyből (3) következne): Minden n-hez és m-hez van az $1, 2, \ldots, n$ számoknak egy oly $i_1^{(m)}, \ldots, i_n^{(m)}$ permutációja, melyre

$$(r, m+i_r^{(m)})=1, \ 1\leqq r\leqq n. \tag{4}$$

E sejtésből (3) azonnal következne, $m=n$ esetre kellene alkalmazni.

Ha e sejtés nem igaz, vagy ha bizonyítása hosszabb ideig nem fog sikerülni, a következő kérdést lehetne vizsgálni: Legyen $1\leqq a_1<\ldots$ $\ldots<a_r\leqq n$, létezik-e oly $n<b_1<\ldots<b_r\leqq 2n$ melyekre $(a_i, b_i)=1$, $1\leqq i\leqq r$? E kérdés már csak azért sem érdektelen, mert, mint könnyű belátni, a (3) alatti sejtés már $r=\left[\frac{n}{2}\right]$ esetén is következne, sőt, még azt is fel lehetne tenni, hogy $(a_i, a_j)>1$, $1\leqq i\leqq j\leqq r$.

$h'(n, 1)$ jelentse azon $a_1<\ldots<a_k\leqq n$ számok maximális számát, melyekre

$$(a_i, a_j)>1, \ 1\leqq i\leqq j\leqq k \quad \text{de} \quad (a_1, \ldots, a_k) = 1. \tag{5}$$

Sejtettem, hogy $h'(n, 1)$ egyenlő azon számok számával n-ig, melyek a 6, 10, 15 számok valamelyikének többszörösei.

Watson azonban ezt megcáfolta. Ellenpéldája a következő (írásbeli közlés): Legyen $u_k=3\ldots p_k$ az első k páratlan prímszám szorzata.

Legyen továbbá

$$u_r \leqq n < u_{r+1}.$$

Watson sorozata $a_1 < \ldots < a_{l_n} \leqq n$ a következő számokból áll:

(6) $$2x \quad \text{ahol} \quad (x, u_r) = 1,\ 1 \leqq x \leqq \frac{n}{2}$$

és

(7) $$y u_r,\ 1 \leqq y \leqq \frac{n}{u_r}.$$

Könnyű belátni, hogy az a-k (5)-öt kielégítik (sőt van három a, melyeknek legnagyobb közös osztója 1) és hogy ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor $l_n > \frac{n}{2}(1-\varepsilon)$. Vázolni fogjuk az ennél élesebb (C az Euler-féle constanst jelöli)

(8) $$l_n = \frac{n}{2} - \frac{e^{-C} n}{2 \log\log n} + o\left(\frac{n}{\log\log n}\right)$$

bizonyítását. A bizonyításhoz felhasználjuk TCHEBICHEFF következő jól ismert tételeit

(9) $$\pi(x) < c_1 x / \log x$$

(10) $$c_2^x < \prod_{p \leqq x} p$$

és Mertens tételét, mely szerint (C az EULER féle konstans)

(11) $$\prod_{p < x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = (1 + o(1)) \frac{e^{-c}}{\log x}.$$

Jelöljük a (6)-ot kielégítő számok számát U-val. Eratosthenes szitájából nyerjük, hogy (p_i végigfut a p_r-nél nem nagyobb páratlan prímszámokon)

(12) $$U = \left[\frac{n}{2}\right] - \left(\left[\frac{n}{2}\right] = \sum_{p_i}\left[\frac{n}{2p_i}\right] + \sum_{i_1 \neq i_2}\left[\frac{n}{2p_{i_1} p_{i_2}}\right] - \ldots + (-1)^r\left[\frac{n}{2p_1 \ldots p_r}\right]\right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2}\prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + \vartheta 2^r,\ |\vartheta| < 1.$$

(10)-ből $p_r < c_3 \log n$, tehát (9)-ből $r - o(\log n)$. (11) és (12) miatt végül nyerjük, hogy

(13) $$U = \frac{n}{2} - \frac{e^{-C} n}{2 \log\log n} + o\left(\frac{n}{\log\log n}\right)$$

(7)-nek legfeljebb p_{r+1} szám tesz eleget, $p_{r+1} < 2p_r$ miatt $p_{r+1} < c_4 \log n$ és ezzel (8) be van bizonyítva.

Bebizonyítjuk mármost, hogy ha $n > n_0$, akkor

$$h'(n, 1) = l_n, \tag{14}$$

azaz nagy n-re WATSON sorozata adja extrém feladatunk megoldását. A bizonyítást részletezzük, mert nem látszik érdektelennek, hogy extrém feladatunk megoldása explicit módon megadható.

Legyen tehát $b_1 < \ldots < b_s \leqq n$, $s = h'(n, 1)$ egy oly sorozat, mely (5)-öt kielégíti, s melynek $h'(n, 1)$ eleme van (azaz melynek maximális számú eleme van).

Legyenek $d_1 < \ldots < d_{s_1}$ a b_i sorozat páros elemei és $e_1 < \ldots < e_{s_2}$ a b_i sorozat páratlan elemei. (5) miatt $s_2 \geqq 1$ (mert különben $(b_1, \ldots, b_s) > 1$).

Lemma 1. $s_1 + 2s_2 \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$. (5) miatt $e_i \pm 1 \neq d_j$ és $e_{i+1} > e_i + 2$. Ezért minden e_i-nek megfeleltethetünk két páros számot (e_i+1)-et és (e_i-1)-et, különböző e-khez különbözők a megfelelő páros számok. Továbbá e páros számok különböznek a d-ktől és nem nagyobbak, mint $n+1$ azaz $s_1 + 2s_2 \leqq \left[\frac{n+1}{2}\right]$, ami Lemma 1. állítása.

Lemma 1. és (8) miatt feltehetjük, hogy

$$s_2 < 10\, n/\log\log n. \tag{15}$$

Ha ugyanis (15) nem volna igaz, akkor Lemma 1-ből

$$s = s_1 + s_2 \leqq \frac{n+1}{2} - 10\, n/\log\log n < l_n$$

(8) miatt, ami lehetetlen, minthogy a b_i sorozat extrém tulajdonsága miatt $s_1 + s_2 = s \geqq l_n$.

Tegyük fel először, hogy $e_i \equiv o \pmod{u_r}$, $1 \leqq r \leqq s_2$ (azaz sorozatunk páratlan számai mind többszörösei u_r-nek). Ez esetben nyilván $s_1 \leqq U$ (ui. $(d_i, u_r) > 1$, azaz a d-k kielégítik (6)-ot). Tehát nyilván $s_1 + s_2 \leqq l_n$ és egyenlőség csak akkor, ha a $b_1 < \ldots < b_s$ a Watson-féle sorozat.

Feltehetjük tehát, hogy van oly j, melyre

$$e_j \not\equiv o \pmod{u_r}.$$

Nyilván $(d_i, e_j) > 1$, $1 \leqq i \leqq s_1$. Jelölje mármost $A(e_j, n)$ azon páros számok számát n-ig, melyek nem relatív prímek e_j-hez. Nyilván

$$s_1 \leqq A(e_j, n). \tag{16}$$

Lemma 2. Legyen $c_5 > 0$ elegendő kis abszolút konstans. Fennáll

$$A(e_j, n) < A(u_r, n) - \frac{c_5 n}{(\log n)^2 \log\log n}, \quad (A(u_r, n) = U).$$

Legyenek $q_1 < \dots < q_k$ e_j prímfaktorai. Nyilván $k \leq r$ (ui. $u_{r+1} > n$). Eratosthenes szitájából nyerjük ugyanúgy, mint (12)-ben, hogy

$$(17)\qquad \begin{aligned} A(e_j, n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left(\left[\frac{n}{2}\right] - \sum \left[\frac{n}{2q_i}\right] + \sum \left[\frac{n}{2q_{i_1} q_{i_2}}\right] - \dots + \right. \\ \left. (-1)^k \left[\frac{n}{2q_1 \dots q_k}\right]\right) = \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) + \vartheta 2^k, \ |\vartheta| < 1. \end{aligned}$$

(az összegezésekben $1 \leq i \leq k$ és $i_1 \neq i_2$ stb.). Továbbá minthogy $u_r \nmid e_j$

$$(18)\qquad \begin{aligned} \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \geq \prod_{i=1}^{r-1} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 - \frac{1}{p_{r+1}}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \frac{(p_{r+1} - 1) p_r}{p_{r+1}(p_r - 1)} > \\ > \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) \frac{p_{r+1}^2}{p_{r+1}^2 - 1} > \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 + \frac{c_6}{(\log n)^2}\right) \end{aligned}$$

az utolsó egyenlőtlenség $p_{r+1} < 2p_r < 2c_3 \log n$ következménye. (17) és (18) miatt

$$(19)\qquad A(e_j, n) < \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)\left(1 + \frac{c_7}{(\log n)^2}\right)$$

$k \leq r = o(\log n)$ miatt $\vartheta 2^k$ (17)-ben elhanyagolható. Mertens tételéből (azaz (11)-ből) (12) és (19) miatt Lemma 2. következik.

Minthogy $l_n > U = A(u_r, n)$, Lemma 2-ből következik, hogy ha tételünk nem lenne igaz, akkor legalább

$$(20)\qquad \frac{c_5 n}{(\log n)^2 \log\log n}$$

páratlan számnak kell sorozatunkban előfordulni.

Lemma 3. Azon számok száma n-ig, melyeknek legalább $10 \log\log n$ különböző prímfaktoruk van $o\left(\frac{n}{(\log n)^3}\right)$. $v(n)$ jelentse n különböző prímfaktorainak számát. Fennáll

$$(20)\qquad 2n \log n > \sum_{k=1}^{n} d(k) > \sum_{k=1}^{n} 2^{v(k)} > E(n) 2^{10 \log\log n} > E(n)(\log n)^5,$$

ahol $E(n)$ jelenti azon m számok számát n-ig, melyekre $v(m) \geqq 10 \log\log n$. (21)-ből Lemmánk azonnal következik.

Lemma 3-ból és (20)-ból következik, hogy ha tételünk nem igaz, akkor sorozatunkban van egy páratlan szám e'_j, melyre $v(e'_j) < 10 \log\log n$. Nyilván $(e'_j, d_i) > 1$, minden $1 \leqq j \leqq s_1$-re, ezért (17) miatt p végigfut e'_j prímosztóin

$$s_1 \leqq A(e'_j, n) \leqq \frac{n}{2} - \frac{n}{2} \Pi\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \exp(\log\log n).$$

Minthogy azonban $v(e'_j) < 10 \log\log n$, Mertens tételéből ((11)-ből), nyerjük, hogy

$$\Pi\left(1 - \frac{1}{p}\right) > \frac{c_8}{\log\log\log n},$$

és ezért végül

$$s_1 < \frac{n}{2} - c_9 \frac{n}{\log\log\log n}. \tag{22}$$

(22) miatt, ha tételünk nem lenne igaz, akkor $n > n_0$ esetén fennállna, hogy

$$s_2 > \frac{c_9 n}{2 \log\log\log n}. \tag{23}$$

(23) azonban (15)-nek ellentmond s ezzel tételünk igazolva van.

Könnyen belátható, hogy bizonyításunk azt is adja, hogy elegendő nagy n-re a WATSON-féle sorozat az egyetlen extrém sorozat.

Kérdezhetők még, hogy hány szám adható meg n-ig úgy, hogy bármely három legnagyobb közös osztója >1, de van négy közülük, melyeknek legnagyobb közös osztója 1. Könnyű belátni, hogy ezeknek maximális száma $(1 + o(1)) \frac{n}{6}$, de e kérdéssel nem foglalkozunk.

23. Legyen $0 \leqq x_1 < \ldots < x_m \leqq 1$. $N(n; a, b)$ jelentse az (a, b) intervallumba eső x-ek számát. Van der Corput az $x_1, \ldots, x_n$ sorozat diszkrepanciáját $D(x_1, \ldots, x_n)$-et következőképpen definiálja:

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \max_{0 \leqq a < b \leqq 1} |(b - a) - N(n; a, b)|.$$

VAN DER CORPUTtól való a következő szép sejtés

$$\lim_{n \to \infty} \min_{0 \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq 1} \left(\max_{1 \leqq i \leqq n} (D(x_1, \ldots, x_i)) \right) = \infty. \tag{1}$$

Van Aardenne—Ehrenfest (1)-et bebizonyította. Roth ezt lényegesen élesítette. Tétele szerint

$$c_1(\log n)^{1/2} < \min_{0 \leqq x_1 < \ldots < x_n \leqq 1} \left(\max_{1 \leqq i \leqq n} (D(x_1, \ldots, x_i)\right) < c_2 \log n.$$

Roth valószínűnek tartja, hogy a felső korlát c_2 értékétől eltekintve pontos.

Talán érdekes a következő kérdés, melyet tudtommal még nem vizsgáltak: Legyen $z_1, \ldots, z_n$ n pont az egységgömbön. S legyen az egységgömb egy tetszőleges gömbsüvege, $F(S)$ S felszíne és $N(n, S)$ a gömbsüvegre eső z-k számát jelenti. Legyen

$$D(z_1, \ldots, z_n) = \max_S |N(n, S) - \frac{nF(S)}{4\pi}.$$

Igaz-e, hogy van egy $f(n)$, melyre $\lim_{n \to \infty} f(n) = \infty$ és

$$D(z_1, \ldots, z_n) > f(n)$$

$z_1, \ldots, z_n$ minden választása mellett teljesül?

Van Aardenne—Ehrenfest, On the impossibility of a just distribution, Indag. Math. 11 (1949) 264—269.

K. F. Roth, On irregularities of distribution, Matematika 1 (1954) 73—79.

24. Szekeressel vizsgáltuk a következő kérdést: Legyen $1 \leqq a_1 \leqq \ldots \ldots \leqq a_n$ tetszőleges számsorozat.

$$M(a_1, \ldots, a_n) = \max_{|z|=1} \left| \prod_{i=1}^{n} (1 - z^{a_i}) \right|, f(n) = \operatorname*{Min}_{a_1, \ldots, a_n} M(a_1, \ldots, a_n).$$

Bebizonyítottuk, hogy $f(n)^{1/n} \to 1$ és hogy minden n-re $f(n) \geqq \sqrt{2n}$. Nemrég Atkinson kimutatta, hogy $f(n) < \exp(cn^{1/2} \log n)$. $f(n) \geqq \sqrt{2n}$ valószínűleg nagyon messze van $f(n)$ valódi értékétől, de talán Atkinson felső becslése már közel van a pontos határhoz.

P. Erdős and G. Szekeres, On the product $\prod_{k=1}^{n} (1 - z^{a_k})$, Acad. Serbe des Sci. 13 (1959) 29—34.

F. V. Atkinson, On a problem of Erdős and Szekeres, Canadian Journ. Math. Bull. 4 (1961) 7—13.

25. Legyen $n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leqq x$ és $\varphi(n_1) < \varphi(n_2) < \ldots < \varphi(n_k)$, ahol $\varphi(n)$ az Euler-féle φ függvényt jelenti. Mekkora k maximális értéke? Valószínűnek látszik, hogy e maximális érték $\pi(x)$, de ennek bebizonyítása igen nehéz lesz, mert könnyű belátni, hogy ez ekvivalens a következő

igen mély sejtéssel: Minden p prímszámra a (p^2-p, p^2) intervallumban van prímszám.

Hasonló kérdés vethető fel más számelméleti függvényekre is, így például $d(n)$-re és $\sigma(n)$-re ($d(n)$ n osztóinak számát, $\sigma(n)$ n osztóinak összegét jelenti). $d(n)$ esetén nincsen plauzibilis sejtésem, $\sigma(n)$ esetén x nagy értékeire, mint azt könnyű belátni, k maximális értéke $\pi(x)$-nél nagyobb, de igen valószínűnek látszik, hogy e maximum nem lehet sokkal nagyobb, mint $\pi(x)$, de e kérdést nem tisztáztam.

Most még néhány additív számelméleti kérdést akarok diszkutálni.

26. Legfeljebb hány oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ adható meg, hogy az

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ vagy } 1$$

összegek mind különbözők legyenek. Jelölje $F(x)$ k maximális értékét. 2 hatványai mutatják, hogy $F(x) \geqq 1 + \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$. Másrészt L. MOSERrel bebizonyítottuk, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra ha $x > x_0(\varepsilon)$

$$F(x) < \frac{\log x}{\log 2} + (1+\varepsilon)\frac{\log\log x}{2\log 2}.$$

Talán $F(x) = \frac{\log x}{\log 2} + O(1)$, de e kérdés eldöntése nem lesz könnyű.

Ha $x = 2^l$, kérdeztem, lehet-e $F(2^l) \geqq l+2$. Ezt nemrég GUY és CONWAY egymástól függetlenül igenlően megválaszolták. Nem ismeretes azonban, hogy lehet-e $F(2^l) \geqq l+3$.

P. ERDŐS, Problems and results in additive number theory, Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles (1955), 136—137.

GUY és CONWAY példái még nincsenek publikálva.

27. Legfeljebb hány oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq x$ adható meg, hogy az $a_i + a_j$ összegek mind különbözők legyenek. E probléma SIDONtól való. Jelöljük k maximális értékét $f_2(x)$-el. TURÁNnal bebizonyítottuk, hogy

(1) $$f_2(x) < x^{1/2} + x^{1/4}.$$

Singer kimutatta, hogy végtelen sok x-re $f_2(x) > x^{1/2}$ és hogy minden $\varepsilon > 0$-ra, ha $x > x_0(\varepsilon)$ $f_2(x) > (1-\varepsilon)x^{1/2}$. Lehetséges, hogy $f_2(x) = x^{1/2} + O(1)$, de ez nehéznek látszik.

Jelölje általában $f_r(x)$ azon számok maximális számát x-ig, hogy a belőlük alkotott r tagú összegek mind különbözők legyenek. $f_r(x)$ vizsgálatának kérdése is Sidontól való. Bose nemrég kérdezte, hogy igaz-e az (1)-nek megfelelő

$$f_r(x) < (1+o(1))x^{1/r}$$

egyenlőtlenség, de e kérdést már $r=3$-ra se tudjuk eldönteni.

ERDŐS—TURÁN, On the problem of SIDON in additive number theory and on some related problems. Journal London Math. Soc. 16 (1941) 212—215.

J. SINGER, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory, Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938) 377—385.

E probléma jellege teljesen megváltozik, ha végtelen sorozatokat megengedünk. További érdekes kérdéseket tárgyal. A. STÖHR összefoglaló cikke: Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe I. és II. Journal für die reine und angewandte Math. 194 (1955) 40—65 és 111—140.

28. Legyen $r_1, \ldots, r_k$ oly maradékrendszer mod n, hogy az

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i r_i, \quad \varepsilon_i = 0 \text{ vagy } 1$$

összegek csak akkor többszörösei n-nek, ha minden $\varepsilon_i = 0$. Jelölje $h(n)$ k maximális értékét. Valószínűleg igaz, hogy $h(n) < cn^{1/2}$, de csak a $h(n) < c_2 n^{1-c_3}$ egyenlőtlenséget tudom bebizonyítani, s ennek részletezésével itt nem foglalkozom.

29. Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$ n szám és legyenek $b_1 < \ldots < b_n$ a többi $2n$-nél nem nagyobb számok. M_k jelölje az $a_i = b_j - k$ megoldásainak számát

$$M^{(n)} = \min \max_{-2n \leqq k \leqq 2n} M_k$$

ahol a minimumot az összes $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n \leqq 2n$ sorozatra kell venni. Nagyon egyszerűen bebizonyítottam, hogy $M^{(n)} \geqq \frac{n}{4}$ SCHERK ezt $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ n-re élesítette és SWIERCZKOWSKI $\frac{4 - 6^{1/2}}{3}$ n-re. Végül L. MOSER nagyon szellemes és egyszerű módon bebizonyította, hogy $M^{(n)} > \frac{\sqrt{2}}{4}(n-1)$ és hosszabb számításokkal ezt még $(4-15^{1/2})^{1/2}(n-1)$-re élesítette.

Sejtettem, hogy $M^{(n)} = \frac{n}{2}$, de ezt valószínűségszámítási módszerekkel megcáfoltam, ugyanakkor SELFRIDGE, MOTZKIN és ROLSTON elektronikus számológép segítségével kimutatták, hogy $M^{(15)} = 6$ amiből könnyen adódik, hogy végtelen sok n-re $M^{(n)} \leqq 0{,}4\, n$. MOSER ezen egyenlőtlenséget még kissé élesítette, de $M^{(n)}$ pontos értéke, vagy akár $\lim_{n \to \infty} M^{(n)}/n$ nem ismeretes.

L. MOSER, On the minimal overlap problem of ERDŐS, Acta Arithmetica 5 (1959) 117—119.

P. ERDŐS, Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie, Journal für die reine und angew. Math. 206 (1961) 61—66.

30. CZIPSZER eltolási problémája. Legyen $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n$. Jelölje N_k az $a_i + k = a_j$ megoldásainak számát, és legyen

$$N^{(n)} = \max \min_{-n \leqq k \leqq n} N_k,$$

ahol a maximumot az összes $1 \leqq a_1 < \ldots < a_n$ sorozatra kell venni. CZIPSZER bebizonyította, hogy

$$\left[\frac{n}{3}\right] \leqq N^{(n)} \leqq \frac{n-1}{2}.$$

A felső határ azonnal adódik a

$$\sum_{\substack{k=-n \\ k \neq 0}}^{n} N_k = n(n-1)$$

egyenlőségből. Az alsó határt a következő példa adja: $a_i = i$ ha $i \leqq \frac{2n}{3}$, $a_i = 2n - i$, ha $\frac{2n}{3} < i \leqq n$. A felső határ $(1-c)\,\frac{n}{2}$-re javítható, ha megjegyezzük, hogy k értékeire melyek n-hez és $-n$-hez közel vannak. N_k kicsiny (ti. nem nagyobb, mint $n-k$). Lehetséges, hogy az alsó határ pontos.

31. Legyen $1 < a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ oly sorozat, hogy 1 nem állítható elő, mint csupa különböző a reciprok értékeinek összege. Mekkora k maximális értéke? Lehet-e $k = n - o(n)$? Mekkora $\sum_{i=1}^{k} 1/a_i$ maximális értéke? Mint a prímszámok példája mutatja, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$ $\log\log n$ nagyságrendű lehet, de könnyen lehetséges, hogy

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = o(\log n).$$

33. Több érdekes additív számelméleti extrém problémát vizsgál ROHRBACH, itt most csak egyet említek. Jelentse $h(n)$ k legkisebb értékét, melyre van oly $0 \leqq a_1 < \ldots < a_k$ sorozat, hogy minden n-nél nem nagyobb szám $a_i + a_j$ alakban előállítható. Könnyű belátni, hogy $h(n) \leqq 2n^{1/2} + 0(1)$ és ROHRBACH sejti, hogy $h(n) = 2n^{1/2} + 0(1)$. Triviális, hogy $h(n) > (2n)^{1/2}$ s ezt ROHRBACH $h(n) > (1+c)(2n)^{1/2}$-re javította. A legélesebb eredmény

jelenleg MOSERtől való. Hasonló kérdés vethető fel $a_i - a_j$ előállítására is.

H. ROHRBACH, Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie, Math. Zeitschrift, 92 (1936) 1—30.

L. MOSER, On the representation of $1, 2, \ldots, n$ by sums, Acta Arithmetica 6 (1960) 11—13.

34. Mekkora k minimális értéke, melyre van oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ sorozat, hogy minden $2 < m \leqq n$ szám $p + a_i$ alakba írható, ahol p prímszám?

LORENZ bebizonyította, hogy $k < c_1 (\log n)^3$ s ezt én $k < c_2 (\log n)^2$-re élesítettem. A prímszámtételből következik, hogy k nem lehet $(1 + o(1)) \log n$-nél kisebb, s ennél jobb alsó becslés nem ismeretes. Könnyen lehet, hogy $k < c_3 \log n$.

A problémát a prímszámok helyett természetesen más sorozatokra is fel lehet vetni, például könnyű bebizonyítani, hogy van oly $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ sorozat, melyre $k < c_4 n^{1/2}$ és minden $2 \leqq m \leqq n$ szám $a_i + r^2$ alakba írható. L. Moser egy publikálatlan eredménye szerint viszont $k > 1{,}03\, n^{1/2}$.

P. ERDŐS, Some results on additive number theory, Proc. Amer. Math. Soc. 5 (1954), 847—853, lásd még P. ERDŐS, Problems and results in additive number theory, Colloque sur la théorie des nombres, Bruxelles (1955) 127—137.

ЗАМЕЧАНИЯ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ. IV.

П. Эрдёш

Автор рассматривает разные экспериментальные задачи в теории чисел. В этой обзорной статье он дает несколько примеров этих задач, некоторые из них довольно простые, другие более трудны и еще не решены.

Максимальное число целых чисел $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq n$, таких что ни одно из них не является делителем остальных, есть $n - \left[\frac{n}{2}\right]$. Это доказать просто, однако автор не сумеет определить максимальное значение величины $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$. Другая очень трудная задача — это определить (или оценить) максимальное число $r_k(n)$ целых чисел $1 \leqq a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ совокупность которых не содержит арифетическую прогрессию от k элементов.

Каким является максимальное значение от k в последовательности $1 \leqq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqq n$, где все произведения $\prod_{i=1}^{k} a_i^{\varepsilon_i}$ ($\varepsilon_i = 0$, или 1) разны? Вероятно, что $k = \pi(n) + o\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\log n}\right)$, однако автору удалось только показать, что $k < \pi(n) + cn^{2/3}$.

Пусть обозначает $A_k(n)$ максимальное число целых чисел не превосходящих n таких что среди них не существует чисел имеющих попарно тот же самый найбольший общий делитель. Требуется определить (оценить) $A_k(n)$. Наилучшие результаты:

$$A_k(n) < \frac{n}{\exp](\log n)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}.$$

Гипотеза Штейна: Пусть $m \equiv a_i \pmod{n_i}$; $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $1 \leqq i \leqq k$, причем нет такого числа, которое удовлетворяло бы двум из этих сравнений. Тогда существует целое число m, $0 < m \leqq 2^k$, для которого $m \not\equiv a_i \pmod{n_i}$ для всех i $(1 \leqq i \leqq k)$. Автор сумеет доказать это для условия $m \leqq k2^k$. Может быть, что гипотеза Штейна остается в силе если мы только предпологаем, что сущесвует целое число N, такое, что $N \equiv a_i \pmod{n_i}$, $1 \leqq i \leqq k$.

REMARKS ON NUMBER THEORY, IV.

P. Erdős

The author investigates several extremal problems in number theory. In this summary I just give a few examples of the problems considered, some are quite simple, others are difficult and unsolved problems.

The maximal number of integers $a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ so that no one divides the other is $n - \left[\frac{n}{2}\right]$. This is quite simple, but I can not determine the maximal value of $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i}$.

Another very difficult problem is to determine (or estimate) the maximal value $r_k(n)$ of integers $1 \leqq a_1 < \ldots < a_l \leqq n$ which do not contain an arithmetical progression of k terms.

What is the maximal value of k in a sequence $1 \leqq a_1 < \ldots < a_k \leqq n$ where all products $\prod_{i=1}^{k} a_i^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = 0$ or 1 are different. It is probable that $k = \pi(n) + 0\left(\frac{n^{1/2}}{\log n}\right)$, but I can prove only $k < \pi(n) + cn^{2/3}$.

Denote by $A_k(n)$ the maximum number of integers not exceeding n so that there are no k of them which have pairwise the same greatest common factor. The best known results are

$$\exp(c \log n/\log\log n) < A_k(n) < \frac{n}{\exp[(\log n)^{1/2-\varepsilon}]}.$$

Conjecture of Stein: Let $a_i \pmod{n_i}$ $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $1 \leqq i \leqq k$ be such that no number satisfies two of the above congruences. Then there is a number $m \leqq 2^k$ for wich $m \not\equiv a_i \pmod{n_i}$ for all $1 \leqq i \leqq k$. I can prove this for $m \leqq k2^k$. Perhaps Steins conjecture remains true if we only assume that there exists an integer N for which $N \not\equiv a_i \pmod{n_i}$, $1 \leqq i \leqq k$.