Sonderabdruck
ELEMENTE DER MATHEMATIK
BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL, SCHWEIZ

Band XVII/5, 1962

Beantwortung einer Frage von E. Teuffel

Es seien $p_1, p_2, \ldots, p_n$ die ersten n Primzahlen und $M(n)$ die grösste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, dass sich jede zu $p_1 p_2 \ldots p_n$ teilerfremde Zahl $m \leqq M(n)$ in der Form $m = a \pm b$ darstellen lässt, wo $a\,b = \prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$. Herr Teuffel[1]) hat die Frage gestellt, ob $M(n)$ unendlich sein kann, das heisst ob die angegebene Darstellung für alle natürlichen m möglich ist (Herr Teuffel setzt dabei $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ voraus). Ich will zeigen, dass $M(n)$ für jedes n endlich ist, sogar wenn nicht jedes p_i in $a\,b$ aufgeht.

Es sei $a_1^{(n)} < a_2^{(n)} < \cdots$ die Folge aller Zahlen von der Form $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$ $(\alpha_i \geqq 0)$.

Lemma 1. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, wenn $i > i_0(\varepsilon)$, $a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)} > \left(a_i^{(n)}\right)^{1-\varepsilon}$.

Das Lemma ist ein spezieller Fall eines Satzes von Mahler[2]): Es sei $\vartheta \neq 0$ algebraisch, $P_1, P_2, \ldots, P_s$, $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ seien endlich viele Primzahlen, ferner sei $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $0 \leqq \beta \leqq 1$, $\gamma > \alpha + \beta$, $c > 0$. Zwei ganze Zahlen seien definiert durch

$$p = p^* \prod_{i=1}^{s} P_i^{\alpha_i}, \quad q = q^* \prod_{i=1}^{t} Q_i^{\beta_i}, \quad 0 < p^* \leqq c\,p^\alpha, \quad 0 < q^* \leqq c\,q^\beta .$$

Dann existiert eine Konstante C, die nur von $\vartheta, \alpha, \beta, \gamma, c$ und den P_i und Q_i abhängt, so dass

$$\left| \vartheta - \frac{p}{q} \right| > \frac{C}{q^\gamma} \quad \text{für alle} \quad \frac{p}{q} \neq \vartheta .$$

Unser Lemma folgt sofort, wenn man $\vartheta = 1$, $p^* = q^* = 1$, $\alpha = \beta = 0$, $c = 1$, $\gamma = \varepsilon/2$ setzt. Der schwächere Satz $\lim_{i=\infty} \left(a_{i+1}^{(n)} - a_i^{(n)}\right) = \infty$ stammt von Pólya[3]).

Lemma 2. Die Anzahl $D(x)$ der Zahlen der Form $\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i} \leqq x$, also die Anzahl der $a_i^{(n)} \leqq x$ ist $o(x^\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$.

Lemma 2 ist natürlich längst bekannt. Offenbar ist $0 \leqq \alpha_i \leqq \log x/\log 2$ und daher

$$D(x) \leqq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^n = o(x^\varepsilon) .$$

Aus Lemma 1 und 2 folgt sofort, dass für genügend grosses x nicht jede Zahl $m < x^{1/2}$ $(m, p_1, p_2 \ldots p_n) = 1$ von der Form $a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)}$ sein kann. Für $x > x_0$ folgt aus $a_i^{(n)} > x$ die Ungleichung

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} > x^{1/2} \quad (i > j) .$$

[1]) El. Math. *15*, 104 (1960).

[2]) Mathematica *4*, 153 (1957), Theorem 3.

[3]) Math. Zeitschrift *1*, 143–148 (1918).

Für $a_j^{(n)} > x^{2/3}$ ist nämlich

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} > x^{2(1-\varepsilon)/3} > x^{1/2} \quad \text{(Lemma 1)}$$

und für $a_j^{(n)} \leqq x^{2/3}$ hat man

$$a_i^{(n)} - a_j^{(n)} \geqq x - x^{2/3} > x^{1/2}.$$

Betrachten wir also die Zahlen

$$m' = a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)} < x^{1/2},$$

so muss $a_i^{(n)} < x$ gelten, also auch $a_j^{(n)} < x$. Die Anzahl der m' ist höchstens $D^2(x)$. Wegen Lemma 2 ist aber $D^2(x) < x^{2\varepsilon}$ für $x > x_0$. Die Anzahl der Zahlen $m < x^{1/2}$, $(m, p_1 p_2 \ldots p_n) = 1$, ist aber für $x > x_0$ nach dem Sieb des Eratosthenes mindestens

$$x^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) - 2^n > \frac{x^{1/2}}{n} - 2^n > x^{2\varepsilon}.$$

Also gibt es unterhalb $x^{1/2}$ mehr Zahlen m als Zahlen m' und damit Zahlen m, die nicht von der Form $a_i^{(n)} \pm a_j^{(n)}$ sind.

P. Erdös