Megjegyzések a Matematikai Lapok két problémájához

Erdős Pál

Turán Páltól való a következő feladat (Mat. Lapok (1954), V. 48 old. 71. feladat): Minden c-hez létezik oly n, melyre ($d(n)$ n osztóinak számát jelenti)

$$d(n+1)-d(n)>c, \quad d(n-1)-d(n)>c. \tag{1}$$

Tőlem való a következő feladat (Mat. Lapok (1955), V. 351. old.): Minden k-hoz van olyan n, melyre

$$d(n)>\prod_{i=1}^{k} d(n+i)d(n-i). \tag{2}$$

E kis cikkben ezen feladatok élesítésével s általánosításával fogunk foglalkozni. Meg fogjuk vizsgálni, hogy (2)-ben k mily nagyra választható, mint n függvénye, s meg fogjuk vizsgálni, hogy hány egymásután következő számra írhatók elő $d(n)$ növekedési viszonyai.

I. TÉTEL. Minden elegendő nagy n-hez létezik oly $m<n$, melyre

$$d(m)>\prod_{1\leq i\leq c_1\log n/(\log\log n)^2} d(m+i)d(m-i),$$

ahol c_1 alkalmasan választott abszolút konstans.

Legyen (p prímszám)

$$T_n=\prod_{p<\frac{1}{4}\log n} p<4^{\frac{1}{4}\log n}<\sqrt{n}. \tag{3}$$

Legyen $1 \leqq |i| < c_1 \log n/(\log\log n)^2$. Nyilván $(i' = \prod_{p|i} p)$

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{T_n-1} d(T_n k + i) \leqq d(i) \sum_{k=0}^{T_n-1} d\left(\frac{T_n}{i'} k + 1\right) <$$

$$< 2d(i) \Sigma d'\left(\frac{T_n}{i'} k + 1\right),$$

ahol $d'(n)$ n-nek $\sqrt{n}$-nél nem nagyobb osztóinak számát jelenti. Továbbá azonban nyilvánvaló, hogy ((3) miatt)

$$(5) \qquad \sum_{k=0}^{T_n-1} d'\left(\frac{T_n}{i'} k + 1\right) < \sum_{l=1}^{T_n-1} \left(\frac{T_n}{l} + 1\right) < 2T_n \log T_n < T_n \log n$$

(4) és (5) miatt azonban

$$(6) \qquad \sum_{k=0}^{T_n-1} d(T_n k + i) < d(i) T_n \log n < i T_n \log n < T_n (\log n)^2.$$

(6)-ból következik, hogy azon $0 \leqq k < T_n$ számok száma, melyekre

$$(7) \qquad d(T_n k + i) > (\log n)^3$$

kisebb, mint $T_n/\log n$. Ebből továbbá következik, hogy azon $0 \leqq k < T_n$ számok száma, melyekhez van egy i, $1 \leqq |i| < c_1 \log n/(\log\log n)^2$, melyre (7) fennáll, kisebb, mint

$$(8) \qquad \frac{T_n}{\log n} 2c_1 \log n/\log\log n < \frac{T_n}{2},$$

ha n elegendő nagy. Ezért (8) miatt van oly $1 \leqq k_0 < T_n$, hogy minden $1 \leqq |i| < c_1 \log n/(\log\log n)^2$ esetén

$$(9) \qquad d(k_0 T_n + i) < (\log n)^3.$$

Ezzel szemben azonban $\left(\pi(x) > c_2 \frac{x}{\log x} \text{ miatt}\right)$

$$(10) \qquad d(k_0 T_n) \geqq d(T_n) > \exp(c_3 \log n/\log\log n), \quad (\exp z = e^z),$$

(9) és (10)-ből tételünk egyszerű számolással azonnal következik.

Tételünk eléggé pontos, ezt mutatja a

II. TÉTEL. Ha c_4 alkalmas, abszolút konstans és elegendő nagy, akkor

$$d(n) < \Pi d(n+i), \quad 1 \leqq i < c_4 \log n/\log_2 n \log_3 n$$

($\log_k n$ a k-szor iterált logaritmust jelenti). Nyilván

$$(11) \qquad \prod_{i=1}^{k} d(n+i) \geqq 2^{\sum\limits_{p<k}\left[\frac{k}{p}\right]} > 2^{k \log\log k - k}$$

ugyanis p-nek legalább $\left[\frac{k}{p}\right]$ többszöröse van az $n+1, n+2, \ldots$
$\ldots, n+k$ számok közül (11)-ből és a jól ismert

$$d(n) < \exp\big((1+\varepsilon)\cdot \log n \log 2/\log\log n\big)$$

miatt nyerjük, hogy

$$d(n) < \exp(1+\varepsilon)\log n \log 2/\log\log n < \prod_{i=1}^{k} d(n+i),$$
$$k = c_4 \log n/\log_2 n \log_3 n,$$

ahol $c_4 > 1$, ezzel tételünk be van bizonyítva.

Valószínűnek látszik, hogy az első tétel közelebb van a valósághoz, mint a második, de ennek bebizonyítása nehéznek látszik. A következő kérdést se tudjuk eldönteni:

Igaz-e, hogy

$$\max_{1 \leqq i < \log n/\log\log n} d(n+i) > (\log n)^{\alpha}$$

fix $\alpha > 0$ mellett. A nehézség az, hogy az $n+i$, $1 \leqq i < \log n/\log\log n$ sorozat $\log n/\log\log n$-nél nagyobb prímfaktorainak számát igen nehéz jól megbecsülni.

III. TÉTEL. Legyen $k = c_5 (\log n)^{1/2}/\log\log n$, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ az $1, 2, \ldots, k$ számok egy tetszésszerinti permutációja. Létezik oly $m < n$, melyre

$$d(m+i_1) < d(m+i_2) < \cdots < d(m+i_k)$$

sőt $1 \leqq r < k$-ra

$$(12) \qquad d(m+i_{r+1})/d(m+i_r) \to \infty$$

egyenletesen r-ben.

E tétel Turán feladatának messzemenő élesítését adja.

Legyen $P_n = \prod\limits_{k<p<\frac{1}{4}\log n} p$ $(k = c_5 (\log n)^{1/2}/\log\log n)$, $V(s)$ jelentse s különböző prímfaktorainak számát. Legyen

$$P_n = s_1, s_2, s_k,$$

ahol

$$V(s_r) = [10r \log\log n] \quad \text{ha} \quad 1 \leqq r < k$$

$$\text{és} \quad V(s_k) \geqq [10k \log\log n] \quad V(P_n) > c_6 \log n / \log\log n$$

miatt c_5 alkalmas választás mellett ez lehetséges.

Legyen mármost $0 \leqq x < P_n$ az az egyértelműen meghatározott szám, melyre

$$x + i_r \equiv 0 \pmod{s_r}, \quad 1 \leqq r \leqq k.$$

Minthogy az s-ek prímfaktorai mind k-nál nagyobbak és $0 < i_r \leqq k$, ezért nyilván $(x + i_r, P_n) = s_r$. Ezért ugyanúgy, mint (4), (5) és (6)-ban

$$(13) \quad \sum_{l=0}^{P_n - 1} d(x + i_r + lP_n) \leqq d(s_r) 2 \sum_{l=1}^{P_n} \left(\frac{P_n}{l} + 1 \right) < 3d(s_r) P_n \log P_n$$

(13) miatt azon $0 \leqq l < P_n$ számok száma, melyekre

$$(14) \qquad d(x + i_r + lP_n) < d(s_r) (\log P_n)^2$$

kisebb, mint $\dfrac{3P_n}{\log P_n}$. Továbbá r legfeljebb k értéket vehet fel s ezért azon $0 \leqq l < P_n$ számok száma, melyekhez van oly $r (1 \leqq r \leqq k)$, melyekre (14) fennáll, kisebb, mint $\dfrac{3kP_n}{\log P_n} < \dfrac{P_n}{2}$, mert a prímszámtételből (vagy elemibb tételekből is) azonnal következik, hogy $P_n > 2^{\frac{1}{4} \log n}$

Ezért van oly $0 < l < P_n$, úgy, hogy minden r-re $(1 \leqq r \leqq k)$ (ui. $x + i_r + lP_n \equiv 0 \pmod{s_r}$)

$$(15) \qquad d(s_r) \leqq d(x + i_r + lP_n) \leqq d(s_r) (\log P_n)^2.$$

Minthogy azonban definíció szerint $d(s_{r+1}) \geqq \dfrac{1}{2} 2^{10 \log\log n} d(s_r)$ és $2^{10 \log\log n} > (\log P_n)^3$, nyilván nyerjük, hogy

$$(16) \qquad d(x + i_{r+1} + lP_n) / d(x + i_r + lP_n) \to \infty.$$

Legyen mármost

$$m = x + i_1 + lP_n < P_n^2 < n \ \Big(\text{ui. } P_n < \prod_{p < \frac{1}{4} \log n} p < 4^{\frac{1}{4} \log n} < \sqrt{n}\Big)$$

ezzel (16) miatt (12) be van bizonyítva.

Felvethető mármost tételünk élesítésének kérdése. $d(n)$ esetén a kérdés igen nehéznek látszik, pl. nagyon nehéz lesz jó becslést találni, hogy milyen nagy $f(n)$-re már biztos nem lehetséges

$$d(n) < d(n+1) < \cdots < d(n+f(n)).$$

Valamivel kedvezőbb a helyzet $V(n)$ esetén, minthogy $V(n) < (1+o(1)) \log n/\log\log n$ (ez mint ismeretes, következik a prímszámtételből), nyilván $V(n)$ esetén $f(n) < (1+o(1)) \log n/\log\log n$. Biztosra veszem, hogy $f(n)$ valódi értéke $o(\log n/\log\log n)$, de csak a következő, sokkal gyengébb tételt tudom bebizonyítani.

IV. TÉTEL. Legyen

$$V(n) < V(n+1) < \cdots < V(n+f(n)).$$

Akkor

$$\overline{\lim_{n=\infty}} f(n)\frac{\log\log n}{\log n} \leqq \frac{1}{2}.$$

Ha ugyanis végtelen sok n-re $f(n) > \left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\frac{\log n}{\log\log n}$ lehetne, akkor nyilván $n+f(n) < 2n$ alatt lenne legalább $\frac{\varepsilon}{2}\frac{\log n}{\log\log n}$ egymásután következő szám, melyek mindegyikének legalább $\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{\log n}{\log\log n}$ különböző prímfaktora van $\left(\text{ti. ha } k = \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cdot\frac{\log n}{\log\log n}\right]+1,\ V(n+k) > \left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{\log n}{\log\log n}\right)$. Legyenek ezek a számok $m, m+1, \ldots, m+i$, $i = \left[\frac{\varepsilon}{2}\frac{\log n}{\log\log n}\right]$, $m+i < 2n$. Minthogy a $\frac{\log n}{\log\log n}$-nél kisebb prímszámok száma $o\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)$ az $m+j$, $0 \leqq j < i$ számok mindegyikének több, mint $\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}\right)\frac{\log n}{\log\log n}$ oly prímfaktora van, melyek $\frac{\log n}{\log\log n}$-nél nagyobbak. $i < \frac{\log n}{\log\log n}$ miatt ezek mindegyike legfeljebb egy $(m+j)$-ben $0 \leqq j < i$ foglaltatik. Ezért az $M = \prod_{j=0}^{i-1}(m+j)$ számnak legalább $\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot$

$\cdot\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^2$ különböző prímfaktora van. Ezért tehát egyrészt $(2^i < n)$

$$M < (2n)^i < \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\frac{(\log n)^2}{\log\log n} + \log n\right), \tag{17}$$

másrészt, ha $s = \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}\right)\left(\frac{\log n}{\log\log n}\right)^2$, a prímszámtételből nyerjük, hogy

$$\begin{aligned} M &\geqq \prod_{i=1}^{s} p_i > (1+o(1))^s s!\,(\log s)^s > \exp(1+o(1))s\log s = \\ &= \exp(1+o(1))\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{4}\right)\frac{(\log n)^2}{\log\log n}. \end{aligned} \tag{18}$$

Elegendő nagy n-re azonban (17) (18)-nak ellentmond s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Felvethető a következő kérdés: melyik az a legnagyobb $k = f(n)$, melyhez van $m_1 < n, m_2 < n$, melyre

$$V(m_1+i_1) < V(m_1+i_2) < \cdots < V(m_1+i_k),$$
$$V(m_2+i_1) < V(m_2+i_2) < \cdots < V(m_2+i_k),$$

ahol i_1, i_2, i_k az $1, 2, \ldots, k$ számok egy permutációja. Ugyan e kérdés felvethető más számelméleti függvényekre is.

ЗАМЕЧАНИЯ К ДВУМ ПРОБЛЕМАМ

П. Ердёш

Автор доказывает, что к каждому n можно подобрать такое $m < n$, что

$$d(m) > \prod_{1 \leqq i < c_1 \log n/(\log\log n)^2} d(m+i)\,d(m-i),$$

где c_1 некоторая положительная постоянная.

Далее, если $n > n_0$ и c_4 достаточно большая постоянная, то

$$d(n) < \prod d(n+i), \quad 1 \leqq i < c_4 \log n/\log_2 n \log_3 n.$$

$\log_k n$ обозначает k раз итерированный логарифм.

В статье рассматривается еще ряд аналогичных вопросов.

REMARKS ON TWO PROBLEMS

P. Erdős

The author proves that for every sufficiently large n there exists an $m < n$ so that

$$d(m) > \prod_{1 \leqq i < c_1 \log n/(\log\log n)^2} d(m+i)d(m-i)$$

where c_1 is a suitable positive constant.

He further shows that for $n > n_0$ and c_4 sufficiently large

$$d(n) < \Pi\, d(n+i), \quad 1 \leqq i < c_4 \log n/\log_2 n \log_3 n$$

where $\log_k n$ is the k-fold iterated logarithm.

Several similar problems are discussed.