# Megjegyzések egy versenyfeladathoz

ERDŐS PÁL és SURÁNYI JÁNOS

**1.** Ismeretes, hogy az $1, 2, \ldots, k$ számok szorzatával bármely egymásutáni $k$ szám szorzata osztható. GALLAI Tibortól[1] származik az a kérdés, hogy ha tetszésszerint adunk meg különböző egészeket és annyi egymásutáni egész számot, mint az adott számok legnagyobbika, akkor hány számot kell ezek közül kiválasztani, hogy a kiválasztott számok szorzata már minden esetben osztható legyen az adott számok szorzatával. Speciálisan 2 és 3 számra a következő kérdés adódik — és ez versenyfeladatként, szerepelt[2] —

*Döntsük el a következő állítások helyességét:*

a) *Ha $a > b$ pozitív egész számok, akkor bármely $b$ számú egymásután következő egész szám között van két olyan, amelyek szorzata osztható $ab$-vel.*

b) *Ha $a < b < c$ pozitív egész számok, akkor bármely $c$ számú egymásután következő egész szám között van három olyan, amelyek szorzata osztható $abc$-vel.*

A válasz[3] az a) kérdésre igenlő, a b) kérdésre viszont pl. $a = 7 \cdot 11$, $b = 7 \cdot 13$, $c = 11 \cdot 13$ és a

$$(6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 - 71 =) 5935 \leqq x \leqq 6077 = (6 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 71)$$

számköz ellenpéldát szolgáltat. Ennek kapcsán további kérdések merülnek fel: lehet-e áttekintést nyerni az összes ellenpéldákon? Hány szám kiválasztását kell megengedni ahhoz, hogy szorzatuk osztható legyen $abc$-vel? Vagy a 3 szám kiválasztásánál maradva meg milyen (1-nél nagyobb) $\alpha$-ra lesz igaz, hogy bármely $\alpha c$ hosszúságú számköz egészeiből kiválasztható 3 egész szám úgy, hogy

[1] Szóbeli közlés 1948-ból.

[2] [1] Lásd a 6. feladatot a 329. oldalon. A [ ]-be tett számok a dolgozat végén felsorolt cikkekre utalnak.

[3] [1] 338. old.

szorzatuk osztható legyen $abc$-vel? Az első kérdésre nyerhető válasz meg fogja adni a kulcsot a továbbiak megválaszolásához is, ezért ezzel fogunk részletesebben foglalkozni. Végül megemlítünk néhány eredményt a felvetett általános problémára vonatkozóan is.

**2.** Legyen adva három különböző szám[4] $a, b, c$ és annyi egymásutáni szám, mint a három szám legnagyobbika. A következő meggondolások mind azon az egyszerű tényen alapulnak, hogy ha a három szám valamelyike egy $r$ egész szám $s$-szeresénél nem kisebb, akkor az egymásutáni számok közt $r$-nek legalább $s$ többszöröse szerepel — hiszen legalább $rs$ egymásutáni egész számunk van. Minden esetre van az egymásutáni számok közt $a$-nak, $b$-nek és $c$-nek egy-egy többszöröse. Ha ezek a többszörösök különböző számok, akkor szorzatuk osztható $abc$-vel. Ha ugyanaz a $k$ szám osztható mondjuk $a$-val és $b$-vel és van egy ettől különböző $l$ szám, amelyik $c$-vel is osztható, akkor $k$ osztható $a$ és $b$ legkisebb közös többszörösével, $[a, b]$-vel. Ha mondjuk $a < b$, akkor az $(a, b)$ legnagyobb közös osztó valódi osztója $b$-nek, s így nem nagyobb annak a felénél. Van tehát az egymásutáni számok közt $k$-n kívül is egy $(a, b)$-vel osztható szám. Ha ez egy $l$-től is különböző $m$ szám, akkor $klm$ osztható az $[a, b]\, c\, (a, b) = abc$ számmal.

Ha $(a, b)$-vel osztható számként $l$-et találjuk, akkor ez osztható $[(a, b), c]$-vel, viszont van $k$-n és $l$-en kívül legalább még egy szám, amelyik osztható $((a, b), c) = (a, b, c)$-vel, a három szám legnagyobb közös osztójával, mert ennek a három szám legnagyobbika legalább háromszorosa. Az így kiválasztott három szám szorzata tehát osztható az

$$[a, b]\, [(a, b), c]\, ((a, b), c) = [a, b]\, (a, b) c = abc$$

számmal.

**3.** Az eddigiek szerint ellenpélda csak olyan esetben állhat elő, ha az egymásutáni számok közt van olyan $k$ szám, amelyik $a$-val is, $b$-vel is, $c$-vel is osztható, és a három szám egyikének sincs az egymásutáni számok közt ettől különböző többszöröse. Ez csak akkor következhet be, ha a három szám legnagyobbika is kisebb a legkisebb kétszeresénél.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy ez fennáll. Legyen $(a, b, c) = d$ $a = a_1 d, b = b_1 d, c = c_1 d$. Ekkor $(a_1, b_1, c_1) = 1$, és így az $(a, b) = u, (a, c) = v, (b, c) = w$ számok páronkint relatív prímek. Továbbá vannak olyan $a', b', c'$ egészek, amelyekkel fennáll $a = a'uvd, b = b'uwd, c = c'vwd$ és $a', b', c'$ szintén páronkint relatív prímek.

[4] Nagysági megkötést szimmetria kedvéért nem tettünk a három számra

Megmutatjuk, hogy ellenpélda létezéséhez az is szükséges, hogy $a' = b' = c' = 1$, legyen, továbbá $u, v, w$ különböző prímek legyenek, amelyek legnagyobbika is kisebb a legkisebb kétszeresénél, $k$ pedig ne legyen osztható egyikük négyzetével sem.

Ha pl. $a' > 1$, akkor van $k$-n kívül még egy $uvd$-vel osztható $l$ szám; továbbá $b$ és $c$ közül valamelyik $wd$-nek legalább kétszerese és így van egy $wd$-vel osztható szám is $k$-n kívül. Ha ez $l$-től is különböző, akkor szorzata $k$-val és $l$-lel osztható $abc$-vel; ha $l$ osztható $wd$-vel is, akkor osztható $uvwd$-vel is és van $d$-nek a kiválasztott két számon kívül is legalább egy többszöröse az egymásután számok közt, a három kiválasztott szám szorzata ez esetben is osztható $abc$-vel.

Legyen most $u = u_1 u_2$ összetett szám. Ha a két 1-nél nagyobb tényező valamelyike legalább 3, akkor biztosan található két egymástól és $k$-tól különböző szám, amelyek egyike $u_1 vd \left(= \frac{a}{u_2}\right)$-vel, a másika $u_2 wd \left(= \frac{b}{u_1}\right)$-gyel osztható és ezeknek és $k$-nak a szorzata osztható $abc$-vel. Ha viszont $u_1 = u_2 = 2$ és ugyanaz a $k$-tól különböző $l$ szám osztható $u_1 vd$-vel és $u_2 wd$-vel, akkor ez a szám $2vwd$-vel is osztható. Mivel pedig $a = 4vd$ és $b = 4wd$ közül az egyik nem kisebb mint $8d$, így előfordul egy harmadik szám az egymásutáni számok közt, amelyik $2d$-vel osztható. Ezzel ismét találtunk 3 számot, amelyek szorzata osztható $abc$-vel.

Tegyük most fel, hogy $k$ osztható pl. $u^2$-tel. Mivel $a$ és $k$ közül valamelyik legalább kétszerese $vd$-nek, $b$ és $c$ közül pedig valamelyik legalább kétszerese $wd$-nek, így az előbbiekhez hasonlóan ismét található három szám, amelyek szorzata osztható $abc$-vel.

**4.** Legyen mostmár $a' = b' = c' = 1$ és $u, v, w$ prím, továbbá $a, b$ és $c$ egyikének se forduljon elő többszöröse az egymásutáni számok közt $k$-n kívül. Ekkor nem választható ki $k$-hoz még két szám úgy, hogy szorzatuk osztható legyen $abc$-vel. Előfordulhat azonban, hogy $u^2d$-nek, $v^2d$-nek és $w^2d$-nek találunk egy-egy többszörösét és ezek szorzata ismét osztható $abc$-vel. Az említett három szám közül kettőhöz található nagyobb $a, b, c$ között, s így ezeknek mindig szerepel többszöröse az egymásutáni számok közt, a legnagyobbnak azonban — legyen ez pl. $w^2d$ — nem biztos, hogy lép fel többszöröse, sőt belátható, hogy van $uvwd$-nek olyan többszöröse, amely $w^2d$-nek az őt közrefogó mindkét többszörösétől messzebb van, mint $a, b, c$ legkisebbike. Az ilyen tulajdonságú többszörösök közt található olyan $k$ szám is, amelyik $u, v, w$ egyikének sem osztható a négyzetével. Ekörül pedig kijelölhető egy olyan számköz, amelyiknek hossza $a, b, c$ legnagyobbikával egyenlő, és amelyik — $k$-t leszámítva — nem tartalmazza $abc$ és $w^2d$ egyikének sem többszörösét.

**5.** Nem térünk ki $d$ elemzésére, bár arra is nyerhetők volnának bizonyos megszorítások. Az $(a, b, c) = 1$ esetben az ellenpéldák következő teljes áttekintését nyertük:

I. Tétel. *Ha az*[5] $a < b < c$ *egész számok relatív prímek, akkor abban és csak abban az esetben van* $c$ *egymásutáni egész szám, amelyek közül nem választható ki 3 úgy, hogy szorzatuk osztható legyen* $abc$*-vel, ha* $a = uv$, $b = uw$, $c = vw$ *alaku,* $u, v, w$ *prímek és* $u < v < w < 2u$.

*Az egymásutáni számok közt kell lennie egynek, amelyiknek legnagyobb közös osztója* $abc$*-vel* $uvw$, *de sem* $a$*-nak más többszöröse, sem* $w^2$*-nek többszöröse nem fordulhat elő a számok között.*

Ebből az eredményből következik, hogy a cikk elején említett ellenpélda a lehető legkisebb $a, b, c$ értékeket adja meg, mert 7 a legkisebb prímszám, amely után van két, a kétszeresénél kisebb prímszám. Viszont a $143 (= 11 \cdot 13)$, $187 (- 11 \cdot 17)$, $221 (= 13 \cdot 17)$ számokhoz az említett ellenpéldáénál kisebb számokból álló

$$(11 \cdot 13 \cdot 17 - 18 =) 2313 \leqq x \leqq 2533 (= 11 \cdot 13 \cdot 17 + 102)$$

számsorozat is ellenpéldát szolgáltat, mert $17^2 = 289$-nek, a $11 \cdot 13 \cdot 17 = 2431$-et közrefogó többszörösei: $2312 (= 8 \cdot 283)$ és $2601 (= 9 \cdot 289)$ nem esnek ebbe a számközbe.

**6.** Ejtsük most el ismét el az $(a, b, c) = 1$ feltevést. A **4.** pont elején tett feltételek mellett ekkor is van $ud$, $vd$ és $wd$-nek egy-egy $k$-tól különböző többszöröse az egymásutáni számok közt (és ezek biztosan különböznek egymástól). Így

II. Tétel. *Ha* $a < b < c$ *egész számok és tetszés szerint adunk meg* $c$ *számú egymásutáni egész számot, ezek közt mindig van legfeljebb 4 olyan, amelyik szorzata osztható* $abc$*-vel.*

**7.** Keressünk végül olyan $\alpha$ pozitív számot, amelyre igaz az, hogy ($a < b < c$-t ismét feltéve) bármely $\alpha c$ hosszúságú számköz egészei közt van három, amelyek szorzata osztható $abc$-vel. Nyilván csak azokat az eseteket kell vizsgálni, amelyekben a $c$ hosszúságú számközre ez még nem teljesül. Tegyük fel tehát ismét a **4.** pont elején szereplő követelményeket, és azt is, hogy $(a, b, c) = 1$.

[5] Mivel $a$ $b, c$ szerepe szimmetrikus, nyilván nem jelenti az általánosság megszorítását, hogy itt ismét előírtuk nagysági sorrendjüket.

Ebben az esetben $\alpha c$-nek legalább akkorának kell lennie, mint $2a=2uv$ és $w^2$ közül a kisebb, tehát $\alpha$-ra kell, hogy

$$(1) \qquad \alpha \geqq \min\left(\frac{2uv}{c}, \frac{w^2}{c}\right) = \min\left(\frac{2u}{w}, \frac{w}{v}\right)$$

teljesüljön. Így $\alpha$ nagyobb a két szám mértani közepénél (tekintve, hogy a két szám nem lehet egyenlő):

$$(2) \qquad \alpha < \sqrt{\frac{2uv}{vw}} = \sqrt{2\frac{u}{v}}.$$

Mivel $u/v < 1$, de 1-hez tetszés szerinti közeli értékeket felvehet, továbbá, ha $u$ és $v$ közel egyenlők, $w$ pedig $\sqrt{2}u$-hoz közeli érték, akkor $2u/w$ és $w/v$ egyidejűleg tetszés szerint közel lehet $\sqrt{2}$-höz, — ezek a feltételek pedig kielégíthetők, mert a szomszédos prímek hányadosa 1-hez tart, — így a tekintett esetben $\alpha$ minimális értéke $\sqrt{2}$. Ez az érték abban az esetben is megfelel, ha $(a, b, c)=d>1$, (de a **4.** pont többi kikötései teljesülnek) mert ekkor

$$\alpha c > \min\left(c\frac{2u}{w}, c\frac{w}{v}\right) = \min(2uvd, w^2d),$$

és ebben az esetben valóban kiválasztható egy $\alpha c$ hosszúságú számköz egészeiből 3 úgy, hogy szorzatuk osztható legyen $abc$-vel.

III. Tétel. *Ha $a<b<c$. akkor bármely $\sqrt{2}c$ hosszúságú számköz egészeiből kiválasztható 3, amelyek szorzata osztható $abc$-vel.*

*Ha $\lambda<\sqrt{2}$, akkor megadható olyan $a<b<c$ számhármas és olyan $\lambda c$ hosszúságú számköz, amelyiknek az egészeire az állítás már nem teljesül.*

**8.** A nyert ellenpéldák segítségével könnyen belátható az is, hogy

IV. Tétel. *Ha $k$ legalább 3, akkor mindig megadható $k$ különböző egész szám és annyi egymásutáni egész, mint az adott számok legnagyobbika, hogy az egymásutáni egészek közül semelyik $k$ szorzata ne legyen osztható az adott egészek szorzatával.*

Az **1.** pont ellenpéldája pl. könnyen módosítható úgy, hogy minden $3 \leqq k \leqq 12$-re ellenpéldát szolgáltasson. Vegyünk ki a $13, 2\cdot 13, \ldots, 11\cdot 13$ számok közül $k-1$-et, de úgy, hogy $7\cdot 13$ és $11\cdot 13$ köztük legyen és a $7\cdot 11$ számot. Ezek szorzata osztható $7^2\cdot 11^2\cdot 13^{k-1}$-nel.

Az **1.** pontban adott számközben nincs 13-nak 1-nél magasabb hatványával osztható szám, így $k-1$ számot kell kiválasztani, hogy szorzatuk osztható legyen $13^{k-1}$-nel. Ezek közt szerepelhet a $7 \cdot 11$-gyel osztható 6006, de sem 7-nek, sem 11-nek más többszöröse nem szerepelhet. Mivel $7 \cdot 11$-nek sem szerepel más többszöröse az adott számközben, mint 6006, így még legalább 2 számot kell kiválasztani, hogy a szorzat $7^2$-nel is, $11^2$-nel is osztható legyen.

Hasonlóan látható be a tétel 12-nél nagyobb $k$-ra is, ha elég nagy $u, v, w$ prímszámokat veszünk, amelyekre $u < v < w < 2u$ és egy olyan számközt, mely eleget tesz az I. tételbeli feltételnek.

**9.** Az így nyert ellenpéldákban $k$ szám megadása esetén $k+1$ szám kiválasztása mindig elegendő, általában azonban ennél sokkal rosszabb is lehet a helyzet. Vegyünk $l$ prímszámot: $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ úgy, hogy $2p_1^2$ nagyobb legyen, mint $p_l^2$. Ez tetszésszerinti $l$-re lehetséges, mivel a szomszédos prímek hányadosa 1-hez tart. Képezzük az összes $p_i p_j$ $(i, j = 1, \ldots, l)$ számokat. Ezek száma

$$k = \frac{l(l+1)}{2}.$$

Találhatunk olyan $p_l^2$ egymásutáni számot, amelyek között előfordul $p_1 p_2 \ldots p_l$ egy többszöröse, amely ezen prímek egyikének a négyzetével sem osztható, ezen kívül nem fordul elő a $p_i p_j$ $(i, j = 1, \ldots l;\ i \neq j)$ többszöröse. Végül $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_l^2$-nek csak egy-egy tööbbszöröse fordul elő, de ezek sem oszthatók a megfelelő $p_i$-nek 2-nél magasabb kitevős hatványával. Ilyen számköz a $2p_1^2 > p_l^2$ feltétel következtében alkalmas kongruenciák megoldásával megadható.

Az adott számok szorzata

$$p_1^{l+1} p_2^{l+1} \ldots p_l^{l+1}.$$

Kiválasztva a több, $p_i$-vel, vagy valamelyik $p_i$-nek magasabb hatványával osztható számokat, ezek száma $l+1$ és szorzatuk az adott prímek mindegyikének a köbével osztható. Minden további prímtényezőhöz tehát már egy-egy külön szám kiválasztása szükséges, összesen $l(l-2)$-é, az előbbi $l+1$ számmal együtt $l(l-1)+1$ számot kell tehát a kérdéses számközből kiválasztani, hogy szorzatuk osztható legyen az adott $l(l+1)/2$ szám szorzatával. Itt tehát a kiválasztandó számok száma közel kétszerese az adottakénak. Azt nem tudjuk, hogy lehet-e ez az arány lényegesen kedvezőtlenebb is.

**10.** Egy további rokon probléma a következő: $f(n)$ jelentse azt a legkisebb számot, amely mellett igaz, hogy bárhogy adunk is meg $n$ különböző természetes számot

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n, \tag{3}$$

tetszésszerinti $f(n)a_n$ egymásutáni egész szám közül kiválasztható $n$ szám úgy, hogy köztük minden $a_i$-nek szerepeljen többszöröse és különböző $a_i$-khez kiválasztott többszörösök különbözők legyenek. Meghatározandó $f(n)$. Az előző bekezdés eredményéből következik, hogy $f(n) \geqq 2$ másrészt világos. hogy $f(n) \leqq n$, azonban ennél jobb becslések is nyerhetők.

Ismeretes, [2], hogy ha $n$ egy adott természetes szám, akkor azoknak a számoknak a száma egy elég nagy $x$ korlát alatt, amelyeknek nincs $n$ és $2n$ közé eső osztója, kisebb, mint

$$\frac{x}{(\log n)^\alpha}, \tag{4}$$

ahol $\alpha$ állandó. Ebből következik, hogy $f(n)$ minden határon túl nő, ha $n$ nő. Válasszuk ugyanis $a_i$-k gyanánt az $n$ és $2n$ közti számokat, másrészt az $(1, x)$ számközt osszuk $f(n)2n$ hosszúságú szakaszokra. Ezek száma $\left[\frac{x}{2nf(n)}\right]$ és mindegyikben van $n$ szám, amelyek közül mindegyik egy-egy (egymástól különböző) $n+i$ alakú szám többszöröse. Így $x$-ig az $n$ és $2n$ közti számoknak legalább

$$\left[\frac{x}{2nf(n)}\right] n$$

számú többszöröse van és ez nem lehet nagyobb (4)-nél. Ebből adódik, hogy alkalmas $c$ állandóval

$$f(n) \geqq c\,(\log n)^\alpha.$$

**11.** Lényegesen javítható a felső becslés is. Legyenek a (3) alatti számok tetszés szerint adva. Bármely $2a_n$ hosszúságú intervallumban van mindegyik $a_i$-nek többszöröse. Ha valamilyen $k<n$-re legfeljebb $k$ különböző szám választható ki ezzel a tulajdonsággal és $k'$ a legkisebb egész, amelyik nem kisebb, mint $k/n$, akkor a kiválasztott számok közt van legalább egy, — jelöljük $m$-mel — amelyik legalább $k'$ különböző $a_i$-vel, mondjuk $a_{i_1}$-gyel, $a_{i_2}$-vel, s í.t. $a_{i_{k'}}$-vel osztható. Ekkor vagy $m+a_{i_1}, m+a_{i_2}, \ldots, m+a_{i_{k'}}$, vagy pedig $m-a_{i_1}, m-a_{i_2}, \ldots, m-a_{i_{k'}}$ mind az adott $2a_n$ hosszúságú számközbe esnek és rendre oszthatók az egymás-

tól különböző $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{k'}}$-vel. Az adott számnak tehát kiválasztható egy-egy többszöröse úgy is, hogy azok közt legalább $k'$ különböző legyen s így $k$ és $k'$ választása szerint

$$k \geqq k' \geqq \frac{n}{k}, \quad k \geqq \sqrt{n}.$$

Az így kiválasztott legalább $\sqrt{n}$ többszöröshöz válasszunk ki egy-egy $a_i$-t.

Ugyanígy látható, hogy a maradó $n_1 = n - k \leqq n - \sqrt{n}$ darab $a_i$-hez a csatlakozó $2a_n$ hosszúságú számközből ismét kiválaszthatunk legalább $\sqrt{n_1}$ számot úgy, hogy a maradó $a_i$-k mindegyikének legyen köztük többszöröse. Mindegyik kiválasztott számhoz hozzárendelünk egy osztóját az $a_i$-k közül és ezt addig folytatjuk, míg minden $a_i$-re sor kerül. Ha ez $l$ lépés után következik be, akkor

$$f(n) \leqq 2l.$$

**12.** Becsülnünk kell tehát $l$-et $n$ segítségével. Tudjuk, hogy az

$$n_0 = n, \; n_{r+1} = n_r - \sqrt{n_r}, \qquad (r = 0, 1, \ldots, l-1)$$

sorozatra

$$\sum_{\lambda=0}^{l} \sqrt{n_\lambda} \geqq n,$$

mert a bal oldal nem kisebb mint az egyes lépésekben kiválasztott $a_i$-k számának az összege.

Legyen $x \leqq \sqrt{n}$ és jelöljük $l_x$-szel azoknak a $\lambda$-knak a számát, amelyekre

$$\frac{x}{2} < \sqrt{n_\lambda} \leqq x \quad \text{azaz} \quad \frac{x^2}{4} < n_\lambda \leqq x^2.$$

Egy ilyen $n_\lambda$-t minden lépésben $\sqrt{n_\lambda}$-val, tehát legalább $x/2$-vel csökkentünk és ezt az $x^2/4$ és $x^2$ közé eső legnagyobból kiindulva $l_x - 1$-szer ismételve ebben az intervallumban maradunk, tehát

$$(l_x - 1) \cdot \frac{x}{2} < \frac{3}{4} x^2, \qquad l_x < \frac{3}{2} x + 1.$$

Legyen $S$ az a természetes szám, amelyre

$$2^S < \sqrt{n} \leqq 2^{S+1}.$$

Ekkor $l$-et azon $\lambda$-k számának összegeként határozva meg, melyekhez tartozó $n_\lambda$-k négyzetgyöke sorra a $\left(\sqrt{n}, \frac{\sqrt{n}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{n}}{2}, \frac{\sqrt{n}}{4}\right), \ldots$ $\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{S-1}}, \frac{\sqrt{n}}{2^S}\right), \left(\frac{\sqrt{n}}{2^S}, 1\right)$ intervallumba esnek,

$$l = \sum_{i=0}^{S} l_{\frac{\sqrt{n}}{2^i}} < \sum_{i=0}^{S} \left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{n}}{2^i} + 1\right) = \frac{3\sqrt{n}}{2} \cdot \frac{1-1/2^{S+1}}{1-1/2} + S <$$

$$< 3\sqrt{n} + S < 3\sqrt{n} + \frac{\log n}{2 \log 2} < C\sqrt{n},$$

ahol $C$ egy alkalmas, 3-nál nagyobb állandó.

Ezzel egyszersmind $f(n)$-re azt nyertük, hogy egy alkalmas $C'$ állandóval

$$f(n) \leqq C'\sqrt{n}.$$

Megjegyezzük, hogy mind a két korlát még nagyon durvának látszik. Az alsó korlát megállapitásánál minden $a_i$-nek minden többszörösét számba vettük a tekintetbe vett intervallumokban és nem mindegyiknek csak egy-egy többszörösét. A felső becslésnél viszont az egy-egy $2a_n$ hosszúságú intervallumba eső különböző többszörösök számának becslése látszik durvának.

## IDÉZETT IRODALOM


[1] Az 1954. évi Schweitzer Miklós Matematikai Emlékverseny, *Matematikai Lapok*, **6** (1955), 328—345. old.

[2] Erdős P.: Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, *Journ. of London Math. Soc.*, **10** (1935), 126—128. old.


## ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ

P. Erdős и J. Surányi


Пусть $0 < a_1 < \cdots < a_n$ данные целые числа. Авторы изучают следующую проблему: сколько чисел нужно выбрать из последовательных целых чисел, число которых $a_n$, чтобы произведение выбранных чисел делилось на $a_1 \cdots a_n$. Детально рассматривается случай $n = 3$. (Этот случай был предложен на математической конкурсе имени Schweizer-a 1954-ого года.) Доказывается также, что, если $\varepsilon > 0$ и $n$ достаточно велико, то может потребоваться больше чем $(2-\varepsilon)n$ чисел, но остаётся открытым вопрос: это ли самый неблагоприятный случай.

Пусть далее $f(n)$ обозначает наименьшее число, для которого имеет место следующее: из $f(n)\, a_n$ последовательных целых чисел можно выбрать по кратному чисел $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы к различным $a_i$ относились различные кратные. Доказывается, что с некоторыми постоянными $c, c', \alpha$

$$c\,(\log n)^{\alpha} < f(n) < c' \sqrt{n}.$$

Повидимому, обе оценки могут быть улучшенны. С определением верхней грани связан следующий вопрос: к скольким $a_i$ можно выбрать попарно различные кратные из промежутка длины $2a_n$. Легко видеть, что таких $a_i$ не меньше $\sqrt{n}$, но и эта оценка, повидимому, может быть улучшенна.

## BEMERKUNGEN ZU EINER AUFGABE EINES MATHEMATISCHEN WETTBEWERBS

von P. Erdős und J. Surányi

Es seien $0 < a_1 < \cdots < a_n$ gegebene ganze Zahlen. Aus beliebig gegebenen $a_n$ aufeinander folgenden ganzen Zahlen sollen gewisse so ausgewählt werden, dass ihr Produkt durch $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ teilbar sei. Der Fall $n = 3$ (Gegenstand der Aufgabe 6 des M. Schweitzer mathematischen Wettbewerbes, 1954) wird näher behandelt, es wird ferner gezeigt, dass für grosse Werte von $n$, bei beliebigen $\varepsilon > 0$ die Auswahl von mehr als $(2-\varepsilon)n$ Elementen nötig sein kann. Die Frage bleibt offen, ob nicht noch ungünstigere Fälle vorkommen können.

Es sei ferner $f(n)$ die kleinste Zahl, für die bei beliebig gegebenen $a_i$-Zahlen aus beliebigen $f(n)\, a_n$ aufeinainder folgenden ganzen Zahlen zu jedem $a_i$ so ein Vielfaches zugeordnet werden kann, dass zu verschiedenen $a_i$ verschiedene Vielfache gehören. Es wird mit passenden Konstanten $c, c', \alpha$ $c\,(\log n)^{\alpha} < f(n) < c' \sqrt{n}$ gezeigt, keiner der Schranken scheint aber genau zu sein.

In Zusammenhang mit der oberen Schranke wird gezeigt, dass aus $2a_n$ aufeinander folgenden ganzen Zahlen wenigstens $\sqrt{n}$ verschiedene Vielfachen von verschiedenen $a_i$ ausgewählt werden können, $\sqrt{n}$ scheint aber wieder nicht die genaue untere Grenze zu sein.