ÜBER EINE ART VON LAKUNARITÄT

VON

P. ERDÖS (BUDAPEST)

(Aus einem Brief an S. Hartman)

... Ich will folgenden Satz beweisen:

Es sei $1 < a_1 < a_2 < \dots$ eine Folge ganzer Zahlen. $A(a_1, a_2, \dots)$ sei die Folge derjenigen ganzen Zahlen, die durch kein einziges a teilbar sind. $A(a_1, a_2, \dots)$ ist dann und nur dann lakunär[1]*), wenn eine unendliche Teilfolge $a_{l_1}, a_{l_2}, \dots$ mit $(a_{l_i}, a_{l_j}) = 1$ existiert.*

Falls dies bewiesen ist, so folgt z. B. daß die quadratfreien Zahlen lakunär sind ($a_k = p_k^2$), und damit sind auch die Primzahlen lakunär[2]). Die quadratfreien Zahlen haben eine positive Dichte – und so ist dies ein einfaches Beispiel für eine lakunäre Folge mit positiver Dichte[3]).

Nun zum Beweis! Es sei $b_1 < b_2 < \dots$ eine Teilfolge der a mit $(b_i, b_j) = 1$. Offenbar genügt es zu zeigen, daß $A(b_1, b_2, \dots)$ lakunär ist (da $A(a_1, a_2, \dots) \subset A(b_1, b_2, \dots)$ ist).

Es sei $l = n_1 < n_2 < \dots$ die Folge $A(b_1, b_2, \dots)$. Um die Lakunarität von $n_1 < n_2 < \dots$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß zu jedem k ein m_k existiert, derart daß für jedes $l > 0$ zwischen l und $l+m_k$ entweder kein n_i oder wenigstens ein n_i mit $n_{i+1}-n_i > k$ bzw. $n_i - n_{i-1} > k$ enthalten ist. Wir zeigen, daß $m_k = b_1 b_2 \dots b_k$ gewählt werden kann. Aus einfachen Sätzen über Kongruenzen folgt nämlich, daß im Intervall $(l, l+m_k)$ ein x existiert mit $x+i-1 \equiv 0 (\operatorname{mod} b_i)$, $1 \leqslant i \leqslant k$ (da doch $(b_i, b_j) = 1$ und

$$\prod_{i=1}^{k} b_i = m_k$$

---

[1]) *Lakunär* wird hier eine wachsende Folge a_n genannt, wenn es keine Zahl k gibt derart, daß für jedes r ein n mit $a_{n+i+1} - a_{n+i} < k$ $(i = 1, \dots, r)$ zu finden wäre; vgl. S. Hartman, *Sur un type de lacunarité*, Le Matematiche 10 (1955), S. 57-61 (Anmerkung der Schriftleitung).

[2]) Das hat W. Sierpiński in seiner Arbeit *Sur la lacunarité au sens de S. Hartman de la suite de tous les nombres premiers*, Le Matematiche 10 (1955), S. 67-70, bewiesen (Anm. d. S.).

[3]) Ein anderes Beispiel einer derartigen Folge wurde von S. Hartman in der unter [1]) zitierten Arbeit angegeben (Anm. d. S.).

ist). Die größte Zahl der Folge $A(b_1, b_2, \ldots)$, die kleiner als x ist, heiße n_i. Man hat also $n_{i+1} > x+k-1$, daher $n_{i+1}-n_i > k$. Somit ist die erste Hälfte des Satzes bewiesen.

Es sei nun $a_1 < a_2 < \ldots$ eine unendliche Folge, die keine unendliche Teilfolge mit $(b_i, b_j) = 1$ enthält. Es sei $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ eine maximale Teilfolge mit der Eigenschaft $(b_i, b_j) = 1$. Offenbar muß es eine solche Folge geben.

Es seien nun $p_1, p_2, \ldots, p_l$ alle Primfaktoren von $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Offenbar ist jedes a_i durch ein p teilbar. Also gilt

$$A(a_1, a_2, \ldots) \supset A(p_1, p_2, \ldots, p_l).$$

Es seien nun $1 = N_1, N_2, \ldots$ die Zahlen von $A(p_1, p_2, \ldots, p_l)$. Offenbar gilt $N_{i+1}-N_i < p_1 p_2 \ldots p_l$, da es unter $p_1 p_2 \ldots p_l$ konsekutiven Zahlen immer mindestens zwei gibt, die zu $p_1 p_2 \ldots p_l$ relativ prim sind $(\varphi(p_1 p_2 \ldots p_l) \geqq 2)$. Damit ist alles bewiesen, da $A(p_1, p_2, \ldots, p_l)$ nicht lakunär ist ...

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1956