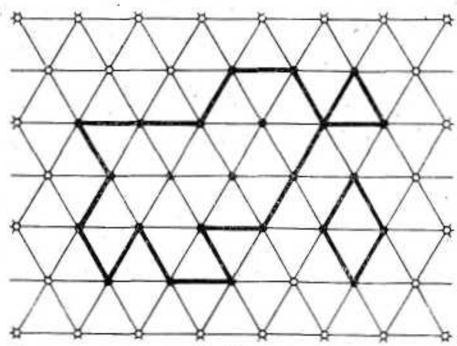
# PONTOK ELHELYEZÉSE EGY TARTOMÁNYBAN

ERDŐS PÁL és FEJES TÓTH LÁSZLÓ

Hogyan kell egy végesben fekvő, zárt tartományban $n$ pontot úgy elhelyezni, hogy minden pont lehetőleg távol kerüljön a többitől, vagyis pontosabban úgy, hogy a pontok közt fellépő minimális távolság maximális legyen? Erre a kérdésre vonatkozik A. THUE [1] következő tétele: Ragadjuk ki egy egységnyi oldalhosszúságú szabályos háromszögrács végesszámú háromszögét. Ha ezek (határaikat is tekintetbe véve) együttesen $n$ rácspontot tartalmaznak, akkor a háromszögek által borított zárt síkrészen fekvő bármely $n$ pont közül mindig kiválasztható két olyan, amelyek távolsága $\leqq 1$. Ha az $n$ pont közül nem mind rácspont, akkor a „$\leqq$" jel a „$<$" jellel helyettesíthető.



*1. ábra*

Ez a tétel csupán speciális esetekben oldja meg a fenti problémát, de felvilágosítást ad az extremális pontrendszer aszimptotikus viselkedéséről $n$-nek nagy értékére: ha $d_n$ jelenti egy $T$ területű, végesben fekvő zárt tartomány $n$ pontja közt fellépő minimális távolság maximumát, akkor [2]

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, d_n = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}. \tag{1}$$

Durván kifejezve, nagy pontszám esetén a pontokat egy szabályos háromszögrács rácspontjaiba kell helyezni.

Egyikünk [3] még régebben felvetette azt a kérdést, miként kell elhelyezni a pontokat úgy, hogy a pontokat összekötő legrövidebb törtvonal hossza maximális legyen. Ezt a maximumot $L_n$-nel jelölve, kimondotta azt a sejtést, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}. \tag{2}$$

Ez azt jelentené, hogy nagy pontszám esetén ez a probléma is az egyenlőoldalú háromszögrácshoz vezet.

Ezzel a problémával VERBLUNSKY [4] és újabban FEW [5] foglalkozott. A probléma teljes elintézése azonban nehéznek látszik, s így felmerül az a kérdés, kimondható-e legalább valamilyen (2)-nél kevesebbet mondó, de (1)-et tartalmazó állítás. Ilyen állítást tartalmaz a következő

TÉTEL: *Legyen $P_1, \ldots, P_n$ egy síkbeli, Jordan-féle értelemben mérhető, $T$ mértékű, zárt ponthalmaz $n$ pontja és $l_i$ a $P_i$ pont távolsága a hozzá legközelebb fekvő ponttól. Képezzük az $l_1 + \cdots + l_n$ összeget és vizsgáljuk ennek $S_n$ maximumát, amidőn a pontok szabadon változnak a ponthalmazon. Akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}. \tag{3}$$

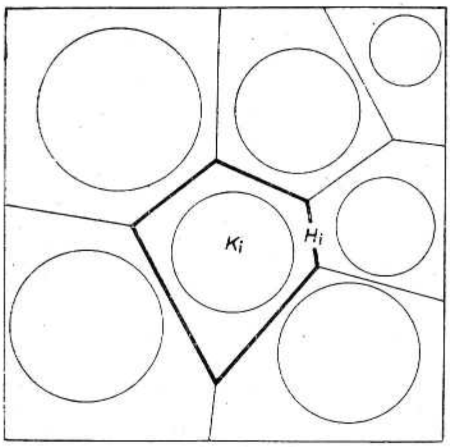
Mindenekelőtt ezt a tételt bizonyítjuk be, majd az előzőkkel kapcsolatos néhány további kérdést említünk.

Tételünk következik az alábbi ismert [6] tételből, amelyet azonban itt teljesség kedvéért bebizonyítunk: egy $q$ területű négyzetben* fekvő, egymásba nem nyúló $n$ kör $r_1, \ldots, r_n$ sugara mindig kielégíti az

$$(r_1 + \cdots + r_n)^2 < \frac{nq}{\sqrt{12}} \tag{4}$$

egyenlőtlenséget.

Jelöljük a köröket $K_1, \ldots, K_n$-nel és tekintsük a négyzetnek és azoknak a $K_i$-t tartalmazó félsíkoknak közös részét, amelyeket $K_i$-nek a többi körrel vett hatványvonalai határoinak. Ez nyilvánvalóan egy $K_i$-t tartalmazó konvex $H_i$ sokszög, amelynek területét is $H_i$-vel jelöljük. Ámde $H_i$ úgy is definiálható, mint a négyzet azon pontjainak halmaza, amelyeknek a $K_i$ körre vonatkozó hatványa nem nagyobb, mint a többi körre vonatkozó hatványa. Innen kitűnik, hogy a $H_1, \ldots, H_n$ sokszög hézagmentesen és egyrétűen lefedi a négyzetet. $H_i$ oldalszámát $p_i$-vel jelölve és figyelembe véve, hogy egy kört tartalmazó adott oldalszámú sokszögek



*2. ábra*

közül a körülírt szabályos sokszög területe a legkisebb:

$$H_i \geqq F(r_i, p_i),$$

* Négyzet helyett vehetünk bármely, legfeljebb hat oldalú konvex sokszöget. Szabályos 6-szög és egyetlen beírt kör esetén azonban (4)-ben egyenlőség áll.

ahol

$$F(x, y) = x^2 y \operatorname{tg} \frac{\pi}{y}.$$

Kimutatjuk, hogy a kétváltozós $F(x, y)$ függvény az $y \geqq 3$ félsíkon konvex. Bevezetve a $g(y) = y \operatorname{tg} \frac{\pi}{y}$ jelölést, a $F = x^2 g(y)$ függvény konvexitásásának feltétele, $F_{xx} > 0$ nyilvánvaló teljesülése miatt

$$F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2 = 2x^2 (g g'' - 2g'^2) \geqq 0,$$

vagyis $g g'' \geqq 2g'^2$. Mivel azonban $y \geqq 3$-ra (sőt már $y > 2$-re is) $g > 0$ és

$$g' = \frac{\frac{1}{2} y \sin \frac{2\pi}{y} - \pi}{y \cos^2 \frac{\pi}{y}} < 0,$$

$$g'' = \frac{2\pi^2 \sin \frac{\pi}{y}}{y^3 \cos^3 \frac{\pi}{y}} > 0,$$

azért a konvexitás feltétele így is írható: $\left(\frac{1}{2} g g''\right)^{\frac{1}{2}} + g' \geqq 0$, azaz $y \cos^2 \frac{\pi}{y}$-nal végigszorozva,

$$\pi \sin \frac{\pi}{y} + \frac{1}{2} y \sin \frac{2\pi}{y} - \pi \geqq 0.$$

A $z = \pi / y$ helyettesítést alkalmazva ki kell tehát mutatnunk, hogy

$$\sin z + \frac{1}{2z} \sin 2z - 1 \geqq 0, \quad 0 < z \leqq \frac{\pi}{3}.$$

Ámde

$$\sin z + \frac{1}{2z} \sin 2z - 1 > \sin z + \frac{1}{2z} \left(2z - \frac{8z^3}{6}\right) - 1 = \sin z - \frac{2z^2}{3}.$$

Mivel pedig a jobboldali függvény $z = \pi/3$-ra még pozitív, azért (a $\sin z$ és a $z^2$ függvény egyszerű tulajdonságai miatt) $0 < z < \pi/3$-ra is az. Ezzel $F(x, y)$ konvexitását kimutattuk.

Felhasználjuk most még az Euler-féle poliédertételnek azt az egyszerű folyományát, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i < 6,$$

valamint azt, hogy $g' < 0$ következtében $F(x, y)$ $y$-nak monoton fogyó függvénye. E tények és a konvex függvényekre vonatkozó Jensen-féle egyenlőtlenség figyelembevételével nyerjük a bizonyítandó (4)-es egyenlőtlenséget:

$$q=\sum_{i=1}^{n}H_i \geqq \sum_{i=1}^{n}F(r_i,p_i)\geqq nF\left(\frac{r_1+\cdots+r_n}{n},\ \frac{p_1+\cdots+p_n}{n}\right)>$$

$$>nF\left(\frac{r_1+\cdots+r_n}{n},6\right)=n\left(\frac{r_1+\cdots+r_n}{n}\right)^2 6\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{n}(r_1+\cdots+r_n)^2.$$

Ezután rátérünk (3) bizonyítására.

A szabályos háromszögrács példájára támaszkodva nem nehéz megmutatni, hogy egy $T$ belső mértékkel bíró ponthalmazra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\geqq\sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Azt fogjuk ezért csak kimutatni, hogy bármely $T$ külső Jordan-mértékű ponthalmazra

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\leqq\sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}.$$

Ezt először egy $b$ oldalú négyzetre mutatjuk ki. Írjunk $P_i$ köré a hozzá legközelebb eső pont $l_i$ távolságának felével, mint sugárral, egy $K_i$ kört. Nyilvánvaló, hogy a $K_1,\ldots,K_n$ körök nem hatolhatnak egymásba, mert ha $K_i$ $K_j$-be hatolna és, mondjuk, $l_i\leqq l_j$ lenne, akkor $P_iP_j<l_j$ lenne, s így $l_j$ nem lehetne a $P_j$-hez legközelebb eső pont távolsága.

Legyen $\varepsilon$ egy tetszés szerinti pozitív szám és tekintsük a négyzetünkkel koncentrikus, hasonló helyzetű $b+2\varepsilon$ oldalú négyzetből kinyúló köröket. Ezek sugara $>\varepsilon$, s így számuk egy $n$-től független $k$ korlát alatt marad. Másrészt nyilvánvalóan valamennyi $l_i\leqq\sqrt{2}\,b$, s így (4) miatt $n>k$-ra

$$l_1+\cdots+l_n<2\sqrt{\frac{(n-k)(b+2\varepsilon)^2}{\sqrt{12}}}+k\sqrt{2}\,b.$$

Ezért

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\leqq\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}(b+2\varepsilon),$$

vagyis, $\varepsilon$ tetszésszerinti volta miatt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\leqq\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}\,b.$$

Másképp kifejezve: létezik egy olyan $2/\sqrt{3}$-hoz tartó $c_1,c_2,\ldots$ számsorozat, hogy

$$S_n\leqq\sqrt{c_n n}\,b. \tag{5}$$

Az általános eset bizonyításához borítsuk le ponthalmazunkat végesszámú, mondjuk $m$ egymásba nem nyúló $q_1,\ldots,q_m$ területű négyzettel. A több négyzet közös határára eső $P_i$ pontokat valamelyik négyzethez számítva, legyen az $i$-edik négyzethez tartozó pontok száma $k_i$ és a kérdéses távolságösszegnek ezekre a pontokra vonatkozó értéke $s_i$. Nyilvánvaló, hogy az egész pontrendszerre vonatkozó távolságösszeg $l_1+\cdots+l_n \leqq s_1+\cdots+s_m$. Másrészt (5), illetőleg a Schwarz-féle egyenlőtlenség miatt

$$s_1+\cdots+s_m \leqq \sqrt{c_{k_1}k_1q_1}+\cdots+\sqrt{c_{k_m}k_mq_m} \leqq \sqrt{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}\sqrt{q_1+\cdots+q_m}.$$

Ezért

$$\frac{l_1+\cdots+l_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}{k_1+\cdots+k_m}}\sqrt{q_1+\cdots+q_m},$$

és tekintettel a könnyen belátható*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}{k_1+\cdots+k_m}=\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

egyenlőségre

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \leqq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}(q_1+\cdots+q_m)}.$$

Mivel azonban a négyzeteket úgy választhatjuk, hogy területösszegük tetszésszerinti kevéssel lépje túl ponthalmazunk mértékét, azért tételünk bizonyítását a fenti egyenlőtlenséggel befejeztük.

Jelentse $l'_i$ a $P_i$ ponthoz legközelebb eső két pont távolságának számtani közepét és legyen $S'_n=\max(l'_1+\cdots+l'_n)$. Meg lehetne kisérelni a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S'_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}$$

reláció bizonyítását, amely általánosítása volna (3)-nak, de még mindig kevesebbet mondana (2)-nél.

Felvethető a következő probléma is [7]: Jelentse $L_n^k$ az $n$ pont közül $k$ pontot összekötő legrövidebb törtvonal maximumát. Igaz-e az, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}L_n^k=(k-1)\sqrt{\frac{2T}{\sqrt{3}}}\,?$$

Ez a kérdés még $k=3$-ra sincs eldöntve. $k=2$-re (1) igenlő választ ad.

Tekintsük most az $n$ pont által meghatározott háromszögek közül a minimális kerületű háromszög kerületének $\Delta_n$ maximumát. $\Delta_n$ aszimptotikus viselkedésének kérdése már nem vezet a szabályos háromszögrácshoz, amennyiben

* Legyen $\lim_{n\to\infty} c_n=c$, $\max|c_n-c|=M$, $\delta$ egy tetszés szerinti pozitív szám és $N$ egy olyan pozitív szám, hogy minden $N$-nél nagyobb $n$ indexre $|c_n-c|<\delta$ teljesüljön. Akkor

$$\left|\frac{c_{k_1}k_1+\cdots+c_{k_m}k_m}{k_1+\cdots+k_m}-c\right| \leqq \frac{|c_{k_1}-c|\,k_1+\cdots+|c_{k_m}-c|\,k_m}{k_1+\cdots+k_m} \leqq \frac{MNm}{k_1+\cdots+k_m}+\delta.$$

egy olyan téglalaprács, amelyben a téglalap oldalai 4:3 arányban vannak, jobb pontelhelyezést ad. Ezt a téglalapot az jellemzi, hogy a három csúcsa által meghatározott háromszög kerülete megegyezik a rövidebb oldal mentén fekvő három egymásután következő rácspont által meghatározott elfajult háromszög kerületével, vagyis a rövidebb oldal hosszának 4-szeresével. Ez a példa mutatja, hogy

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{n}\,\Delta_n \geqq \sqrt{12T}.$$

A jobboldali $\sqrt{12}$ állandó valóban nagyobb a szabályos háromszögrács által szolgáltatott $3\sqrt{2/\sqrt{3}} = \sqrt{6\sqrt{3}}$ értéknél. Vajon fennáll a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\Delta_n = \sqrt{12T}$$

reláció?

HEILBRONN vetette fel azt a kérdést, mi mondható ki egy egységnégyzetben fekvő $n$ pont által meghatározott minimális területű háromszög területének $t_n$ maximumáról. Kimondotta sejtésként, hogy található olyan $C$ állandó, hogy $t_n < C/n^2$. ROTH [8] kimutatta olyan két $C'$ és $C''$ állandó létezését, hogy

$$\frac{C'}{n^2} < t_n < \frac{C''}{n\sqrt{\log\log n}}.$$

## IRODALOM

[1] A. THUE, Om nogle geometrisk taltheoretiske Theoremer, *Forhdl. Skand. Naturfors.* **14** (1892) 352—353. A szerzőknek nem állt módjában a dolgozat elolvasása.

[2] (1)-nek, amelyben a legsűrűbb körelhelyezkedés problémájának megoldása nyer kifejezést, különféle bizonyításai és általánosításai ismeretesek. V. ö. L. Fejes Tóth, Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum, *Berlin—Göttingen—Heidelberg* 1953.

[3] L. FEJES TÓTH, Über einen geometrischen Satz, *Math. Zeitschrift* **46** (1940), 83—85.

[4] S. VERBLUNSKY, On the shortest path through a number of points, *Proc. Amer. Math. Soc.* **2** (1951), 904—913.

[5] L. FEW, The shortest path and the shortest road through $n$ points, *Mathematika* **2** (1955), 141—144. E cikkben többek között a következő tétel van bizonyítva: Legyen adva $n$ pont az egységnégyzetben, akkor mindig van egy oly $\left((2n)^{1/2} + \frac{7}{4}\right)$-nél nem hosszabb törtvonal, mely ezen $n$ pont mindegyikén áthalad.

[6] L. FEJES TÓTH, Some packing and covering theorems, Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math. **12** A (1950), 62—67.

[7] V. ö. a [2]-ben idézett könyv 97. oldalával.

[8] K. F. ROTH, On a problem of Heilbronn, *J. London Math. Soc.* **26** (1951) 198—204.

DISTRIBUTION OF POINTS IN A DOMAIN

By P. Erdős and L. Fejes Tóth

Let $D$ be a closed, bounded domain of area 1, and let $P_1, \dots, P_n$ be $n$ points in $D$. Denote by $d_i$ the minimum distance of $P_i$ from the other points and by $S_n$ the maximum of $d_1 + \dots + d_n$, taken over all possible positions of $P_1, \dots, P_n$ in $D$. We prove that

$$\lim_{n \to \infty} S_n^2/n = 2/\sqrt{3}.$$

This result connects with an old theorem of Thue and a recent result of Few. It follows easily from the following theorem of Fejes Tóth: If there are given $n$ non overlapping circles of radii $r_1, \dots, r_n$, all contained in a unit square, then $(r_1 + \dots + r_n)^2 < n/\sqrt{12}$.