Über die Anzahl der Lösungen von $[p-1, q-1] \leq x$.

(Aus einem Brief von **P. Erdös** an **K. Prachar**)[1]

(Eingelangt am 18. Mai 1955.)

... Wir wollen die Anzahl N der Lösungen von

$$[p-1, q-1] \leq x \tag{1}$$

abschätzen, wobei p, q Primzahlen bedeuten und mit $[a, b]$ allgemein das kleinste gem. Vielfache der natürlichen Zahlen a und b bezeichnet wird. N_d bedeute die Anzahl der Lösungen von

$$[p-1,\ q-1] \leq x,\ \ (p-1,\ q-1) = d. \tag{2}$$

Aus (2) folgt offenbar $p \equiv q \equiv 1 \pmod d$, $(p-1)(q-1) \leq d\,x$. Wenn die Anzahl der Lösungen von

$$p \equiv q \equiv 1 \pmod d,\ (p-1)(q-1) \leq d\,x$$

mit N_d' bezeichnet wird, so gilt also $N_d \leq N_d'$. Also

$$N \leq \sum_{d=2}^{x} N_d'.$$

Es ist klar, daß

$$N_d' \leq 2 \sum_{p \equiv 1 \pmod d,\ p < (2dx)^{1/2}} \pi(1, d, \frac{2dx}{p})$$

wobei $\pi(1, d, y)$ die Anzahl der Primzahlen $p \equiv 1 \pmod d$, $p \leq y$ ist. Mit Hilfe der *Brun*'schen Siebmethode folgt[2]

$$\pi(1,\ d,\ \frac{2dx}{p}) < \frac{c_1\,d\,x}{p\,\varphi(d)}\ (\log\frac{x}{p})^{-1} < \frac{c_1\,d\,x}{p\,\varphi(d)}\ \{\log(\frac{x}{2d})^{1/2}\}^{-1}. \tag{3}$$

---

[1] Dies ist ein Teil eines Briefes von *P. Erdös* vom 9. Nov. 1954, dessen Veröffentlichung uns der Autor freundlicherweise gestattet hat. Zu dem hier bewiesenen Resultat vergleiche man die Arbeit von *K. Prachar*, diese Monatshefte **59** (1955), **91** (Anm. d. Red.).

[2] Siehe dazu *V. Brun*, Über das Goldbach'sche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Math. og Naturvideskab, 34 (1915), No. 8 und *E. C. Titchmarsh*, A divisor problem, Rendiconti Palermo 54 (1930) 414. Mit c werden wie üblich positive Konstanten bezeichnet.

Es sei zunächst $d < x^{1/4}$. Dann folgt aus (3)

$$\pi(1, d, \frac{2\,d\,x}{p}) < \frac{c_2\, dx}{p\,\varphi(d) \log x} \tag{4}$$

Mittels der Methode von *Brun* folgt weiter

$$\sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod d \\ p < (2xd)^{1/2},\, d < x^{1/4}}} \frac{1}{p} < c_3 \frac{\operatorname{loglog} x}{\varphi(d)}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ergibt sich

$$N_d' < \frac{c_4\, d\, x \operatorname{loglog} x}{(\varphi(d))^2 \log x} < c_5 \frac{x(\operatorname{loglog} x)^3}{d \log x} \tag{6}$$

wegen $d/\varphi(d) < c \operatorname{loglog} x$. Also gilt

$$\sum_{d < x^{1/4}} N_d' < c_6\, x(\operatorname{loglog} x)^3. \tag{7}$$

Anstatt (7) kann man durch etwas längere Rechnung auch $\sum\limits_{d<x^{1/4}} N_d' < c_6\, x \operatorname{loglog} x$ erhalten, da bekanntlich $\sum\limits_{d<y} d/\varphi(d)^2 < c \log y$ gilt.

Sei nun $x^{1/4} \leq d \leq x$, $p-1 = a\,d$, $q-1 = b\,d$, $a\,b \leq x/d$, $(a, b) = 1$, $a\,b \leq x^{3/4}$. Für festes a und b ist die Anzahl der Primzahlen p, q mit $p-1 = ad$, $q-1 = bd$, $d \leq x/ab$ $(ab \leq x^{3/4})$ höchstens

$$c_7 \frac{x}{a\,b(\log x)^2} \prod_{p/ab\,(a-b)} (1 + \frac{1}{p}).$$

Dies folgt durch Anwendung der *Brun*'schen Siebmethode. Nun ist

$$\sum_{1 \leq a,\, b \leq x} (a\,b)^{-1} \prod_{p/ab\,(a-b)} (1 + \frac{1}{p}) < c_8(\log x)^2.$$

Also ist die Anzahl der p, q mit $[p-1,\ q-1] \leq x$, $x^{1/4} \leq d \leq x$ kleiner als $c_9\, x$. Daher ist die Anzahl der Lösungen von $[p-1, q-1] \leq x$ kleiner als $c_{10}\, x(\operatorname{loglog} x)^3$ und dies läßt sich auf $c_{10}\, x \operatorname{loglog}\, x$ verschärfen.[3]

[3] Zusatz bei der Korrektur: Durch noch etwas genauere Abschätzung läßt sich dies auf $c_{10}\, x$ verbessern. Man kann nämlich die im Falle $d < x^{1/4}$ entstehende Summe

$$S = \sum_{p \leq x} \frac{A_p}{p}, \quad A_p = \sum_{d \mid p-1} \frac{d}{\varphi(d)}$$

abschätzen, indem man zuerst $\sum\limits_{p \leq x} A_p = 0(x)$ zeigt (nach dem Vorbild von *Titchmarsh*, loc. cit.) und dann durch partielle Summation $S = 0(\log x)$ findet. (Mitteilung von *P. Erdös* vom 7. September 1955).

Printed in Austria