על בעיות אחדות בתורת הגרפים האלמנטרית*

פאול ארדש

טורן [1] הוכיח את המשפט הבא:

יהי G גרף בעל m קדקדים ו-

$$M(m,k)=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-2}{k-1}\cdot(m^2-r^2)+\binom{r}{2};\quad 1\le r\le k-1,\ m=(k-1)t+r \tag{1}$$

צלעות. אזי מכיל G גרף שלם מסדר k, כלומר קיימים ב-G k קדקדים אשר כל שנים מהם קשורים (ב-G) על-ידי צלע.

טורן גם הראה שההערכה (1) היא הטובה ביותר, בהציגו לכל m ולכל k גרף המכיל $M(m,k)-1$ צלעות ואינו מכיל שום גרף שלם מסדר k.

נסמן ב-$G_1^{(m)}$ גרף המכיל m קדקדים ו-$f(m)$ צלעות, כאשר

$$f(m)=\begin{cases} n^2+1; & m=2n\\ n(n+1)+1; & m=2n+1\end{cases}$$

משפטו של טורן קובע שעבור $l>0$ מכיל $G_1^{(m)}$ משולש. ברור ש-$G_0^{(m)}$ אינו צריך להכיל משולש: נסמן את קדקדיו ב-1, 2, ... , m, ונחבר את הקדקדים i ו-j אם ורק אם $1\le i\le[\frac{m}{2}]<j\le m$.

רדמכר [2] הוכיח ש-$G_1^{(2n)}$ מכיל לפחות n משולשים. אוכיח כאן את משפטו של רדמכר בדרך פשוטה יותר. יתר על כן, הנני משער שעבור $l<[\frac{m}{2}]$ מכיל $G_l^{(m)}$ לפחות $l.[\frac{m}{2}]$ משולשים. אוכיח כאן את השערתי עבור $3\geq l$. ההוכחה מסתבכת והולכת כגדול l ואינה נראית מתאימה להוכחת ההשערה הכללית.

קל לראות שהתוצאה היא הטובה ביותר, אם היא בכלל נכונה. כי אם $l<[\frac{m}{2}]$, נכניס ל-$G_l^{(m)}$ את הצלעות (i,j) שעבורן $1\le i\le[\frac{m}{2}]<j\le m$ ואת הצלעות $([\frac{m}{2}],[\frac{m}{2}]+1)$, $([\frac{m}{2}]+1,[\frac{m}{2}]+2)$, ... , $([\frac{m}{2}]+l-1,[\frac{m}{2}]+l)$. ברור ש-$G_l^{(m)}$ זה מכיל רק $l.[\frac{m}{2}]$ משולשים.

כדי להראות שההשערה אינה נכונה עבור $l=[\frac{m}{2}]$, נגדיר $G_n^{(2n)}$ בצורה הבאה: $G_n^{(2n)}$ מכיל את הצלעות (i,j) שעבורן $1\le i\le n-1<j\le 2n$, ועוד את הצלעות $(n,n+1)$, $(n+1,n+2)$, ... , $(2n-1,2n)$, $(n,2n)$. ברור ש-$G_n^{(2n)}$ זה מכיל רק n^2-1 משולשים.

עבור $m=2n+1$ יתכן שההשערה נכונה עבור כל l המקיים $l\le 2n-2$. היה גם מענין למצא מהו מספר המשולשים המוכלים ב-$G_l^{(m)}$ במקרה הכללי.

עבור $k=4$, $m=3n$, יוצא ממשפט טורן שכל גרף המכיל 3n קדקדים ו-$3n^2+1$ צלעות מכיל לפחות גרף שלם אחד מסדר 4. אפשר לשער שכל גרף כזה מכיל לפחות n^2 גרפים שלמים מסדר 4.

* * *

* נתקבל א שבט תשטו (24.1.55).

משפט 1. יהי $[\frac{m}{2}]>l$, $3\geq l$. אז מכיל כל גרף $G_1^{(m)}$ לפחות $l\cdot[\frac{m}{2}]$ משולשים.

במקרה $l=1$ ההוכחה היא פשוטה מאד ולכן נביאה בנפרד, אף על פי שכחה של ההוכחה שנתן עבור $l>1$ יפה גם ל $l=1$.

נניח אפוא $l=1$. בדרך אנדוקטיבית נסיק את נכונותו של המשפט עבור m מתוך הנחת נכונותו עבור $m-1$; מאחר שהמשפט נכון עבור $m=3$, אפשר להניח $m>3$. $G_1^{(m)}$ מכיל לפחות קדקד אחד שסדרו $[\frac{m}{2}]$ או פחות מזה (סדרו של קדקד מגדר בתור מספר הצלעות היוצאות ממנו). כי לולי כן, היה מספר הצלעות של $G_1^{(m)}$ לפחות $\frac{1}{2}\cdot m\cdot([\frac{m}{2}]+1)$, כלומר יותר מ-$f(m)$.

נניח $m=2n+1$. נשמיט מתוך $G_1^{(m)}$ את אחד הקדקדים מסדר $[\frac{m}{2}]=n$, ואת כל הצלעות היוצאות ממנו. הגרף הנשאר יכיל $2n$ קדקדים ולפחות n^2+1 צלעות ולכן, לפי הנחת האנדוקציה, לפחות $[\frac{m}{2}]=n=[\frac{2n}{2}]$ משולשים; לכן גם $G_1^{(m)}$ המקורי מכיל לפחות $[\frac{m}{2}]$ משולשים, מה שהיה להוכיח.

נניח כעת $m=2n$. אם $G_1^{(2n)}$ מכיל קדקד מסדר קטן מ-n, נשמיט את הקדקד הזה (וכמובן גם את כל הצלעות היוצאות מקדקד זה - אף כי להבא לא נציין זאת בכל פעם); הגרף הנשאר מכיל $2n-1$ קדקדים ולפחות $n(n-1)+2$ צלעות ולכן, לפי הנחת האנדוקציה, הוא מכיל לפחות משולש אחד (לאמתו של דבר אפילו לפחות $n-1$ משולשים). נשמיט אחת מצלעות המשולש הזה. הגרף הנשאר הוא $G_1^{(2n-1)}$ ולכן הוא מכיל, שוב לפי הנחת האנדוקציה, לפחות $n-1$ משולשים. יוצא ש-$G_1^{(2n)}$ המקורי הכיל לפחות $n=[\frac{m}{2}]$ משולשים, מה שהיה להוכיח.

אם סדרו של כל קדקד של $G_1^{(2n)}$ הוא לפחות n, יכיל $G_1^{(2n)}$ לכל היותר שני קדקדים שסדרם גדול מ-n (כי אחרת היה מספר הצלעות עולה על $(f(m)=\frac{1}{2}(2n^2+2))$. מצד שני מכיל $G_1^{(2n)}$, לפי משפטו של טורן, לפחות משולש אחד. מאחר שיש לכל היותר שני קדקדים שסדרם עולה על n, לפחות אחד מקדקדי המשולש סדרו בדיוק n. נשמיט אותו מ-$G_1^{(2n)}$. הגרף הנשאר מכיל $2n-1$ קדקדים ו-$n(n-1)+1$ צלעות, על כן, לפי הנחת האנדוקציה, הוא מכיל לפחות $n-1$ משולשים. יוצא מזה שהגרף המקורי מכיל לפחות n משולשים, ובזה מסתימת הוכחת משפט 1 במקרה $l=1$.

עבור $l>1$ האנדוקציה מ-$m-1$ ל-m היא מיגעת, לכן נוכיח את המשפט תחלה עבור $m=2n$ בעזרת אנדוקציה מ-$2n-2$ ל-$2n$. בגלל ארך ההוכחה נשמיט ממנה פרטים אחדים, ביחוד עבור $l=3$.

שקול פשוט, אף כי ממושך, מוכיח את נכונות המשפט עבור $m=6,8,10$ במקרה $l=2$, ועבור $m=8,10,12,14,16$ במקרה $l=3$. נבדיל בין שני מקרים:

א. כל צלע של $G_1^{(2n)}$ שייכת למשולש אחד לפחות. יוצא ש-$G_1^{(2n)}$ מכיל לפחות $[\frac{n^2+1}{3}]$ משולשים, ומספר זה איננו קטן מ-$l.n$ עבור $n>5$, $l=2$, או $n>8$, $l=3$. לכן במקרה זה הוכח המשפט.

ב. ישנה צלע -נגיד $(1,2)$- שאיננה שייכת לשום משולש. אזי כל קדקד j, $3\leq j\leq 2n$, מחובר לאחד הקדקדים $2,1$ לכל היותר.

אם נניח שכל j מחובר לאחד הקדקדים $2,1$, יוצא שיהיו בדיוק

2n-1 צלעות היוצאות מהקדקדים 1 או 2. נשמיט מתוך $G_1^{(2n)}$ את שני הקדקדים הללו. הגרף הנשאר הוא $G_1^{(2n-2)}$, ולכן הוא מכיל, לפי הנחת האנדוקציה, לפחות $l(n-1)$ משולשים. נחלק את קדקדי $G_1^{(2n-2)}$ לשתי מחלקות זרות: לראשונה נשייך את כל הקדקדים שהיו ב-$G_1^{(2n)}$ קשורים ב-1, לשניה את אלה שהיו קשורים ב-2. יהיו x ו-2n-2-x מספר הקדקדים במחלקה הראשונה והשניה, בהתאמה. מספר הצלעות המחברות קדקדים ממחלקות שונות הוא לכל היותר

$$x(2n-2-x)\leq(n-1)^2.$$

מאחר של-$G_1^{(2n-2)}$ $(n-1)^2+1$ צלעות, יוצא שלפחות l מצלעותיו מחברות שני קדקדים מאותה המחלקה. לכן מכיל $G_1^{(2n)}$ לפחות l משולשים שאחד מקדקדיהם הוא 1 או 2. יחד עם $l(n-1)$ המשולשים שב-$G_1^{(2n-2)}$, זה נותן לפחות ln משולשים ב-$G_1^{(2n)}$, מה שמוכיח את המשפט במקרה זה. (עד כאן לא השתמשנו בהנחה $l\leq 3$, אך להבא נצטרך להסתמך עליה.)

נשאר עוד המקרה שבו הצלע (1,2) איננה שיכת לשום משולש, ולא כל הקדקדים הנותרים קשורים ב-1 או 2. לכן מספר הצלעות היוצאות מ-1 או 2 הוא 2n-2, לכל היותר. נשמיט מתוך $G_1^{(2n)}$ את הקדקדים 1 ו-2. בגרף הנשאר ישנם 2n-2 קדקדים ולפחות $(n-1)^2+l+1$ צלעות.

כאן נזדקק למשפט-עזר פשוט, שנוכיחהו אחרי סיום הוכחת משפט 1.

משפט-עזר: יהי $m\geq 4$ במקרה $l=2$, $m\geq 16$ במקרה $l=3$. אזי כל $G_1^{(2m)}$ מכיל צלע השיכת ל-l משולשים לפחות.

לפי משפט-העזר שיכת לפחות צלע אחת ל-l משולשים לפחות. נשמיטה מתוך הגרף. הגרף המתקבל הוא $G_1^{(2n-2)}$, לכן הוא מכיל, לפי ההנחה, לפחות $l(n-1)$ משולשים, כלימר $G_1^{(2n)}$ מכיל לפחות ln משולשים. בזה מסתימת הוכחת משפט 1 במקרה $m=2n$.

נעבור למקרה $m=2n+1$. גם כאן מוכיח דיון פשוט אך ממושך את נכונות משפט 1 עבור $m=5,7$ במקרה $l=2$, ועבור $m=7,9,11$ עבור $l=3$. מאחר ש-$\frac{1}{2}(2n+1)(n+1)>n^2+n+1$ כאשר $n>3$, $l=2$ או $n>5$, $l=3$, יוצא שבמקרים אלה מכיל $G_1^{(2n+1)}$ לפחות קדקד אחד שסדרו איננו עולה על n. אם נשמיט את הקדקד הזה מהגרף, יתקבל גרף המכיל $G_1^{(2n)}$, אשר מצדו, לפי מה שהוכחנו, הוא מכיל ln משולשים לפחות; ובזה הסתימה הוכחת משפט 1.

ברור שהשיטה שבה השתמשנו להוכחת משפט 1 מתאימה גם למקרה $l>3$; אלא שהערכים של m שיש לטפל בהם בדרכים מיוחדות נעשים גדולים למדי, ויתכן גם שהמשפט יתגלה כבלתי נכון עבור l-ים כאלה.

הוכחת משפט-העזר: שקול פשוט מוכיח את נכונותו עבור $m=4$, $l=2$, ו-$m=16$, $l=3$. כפי שראינו מכיל כל $G_1^{(m)}$ לפחות קדקד אחד שסדרו איננו עולה על $\left[\frac{m}{2}\right]$. נשמיט קדקד כזה מהגרף. מתקבל גרף המכיל $G_1^{(m-1)}$, ולכן, לפי הנחת האנדוקציה, צלע השיכת ל-l משולשים לפחות, מה שהיה להוכיח.

הערה: מענין לציין דקימת רק אפשרות אחת (פרט לשנויי הסדר של הקדקדים) כדי ש-$G_1^{(m)}$ יכיל בדיוק $\left[\frac{m}{2}\right]$ משולשים: ל-$G_1^{(m)}$ שיכות הצלעות (i,j) שעבורן $1\leq i\leq\left[\frac{m}{2}\right]<j\leq m$ ועוד הצלע $(m-1,m)$. הוכחת הדבר פשוטה ונתנת להעברה בדרכים דומות לאלה שהשתמשנו בהן פעמים אחדות בהוכחת משפט 1.

משפט 2. כל $G_1^{(m)}$ מכיל צלע השייכת ל-$c.m$ משולשים לפחות, כאשר c קבוע מוחלט, $0<c$.

הערך המדויק של c איננו ידוע לי, אך ודאי $c<\frac{1}{2}$.

הוכחה: נתבונן במשולש כלשהו -נגיד $(1,2,3)$- של $G_1^{(m)}$. נניח שאין ב-$G_1^{(m)}$ שום צלע השייכת ליותר מ-x משולשים. אזי לכל היותר $x-1$ מהקדקדים $4,5,6,\ldots,m$ קשורים לאותו זוג של קדקדים מתוך $(1,2,3)$. לכן מספר הצלעות היוצאות מהקדקדים $1,2,3$ הוא לכל היותר $3+m-3+3(x-1)=m+3x-3$. נשמיט מתוך $G_1^{(m)}$ את הקדקדים $1,2,3$ ואת הצלעות היוצאות מהם. הגרף הנשאר מכיל $m-3$ קדקדים ולפחות $f(m)-m-3x-3$ צלעות. אם $f(m)-m-3x+3\geq f(m-3)$, הגרף הנשאר מכיל $G_1^{(m-3)}$ ולכן הוא מכיל גם משולש - נגיד $(4,5,6)$. לפי אותו השקול כלעיל ישנן לכל היותר $(m-3)+3x-3=m+3x-6$ צלעות היוצאות מהקדקדים $4,5,6$ נשמיט את הקדקדים האלה מהגרף ונמשיך בתהליך זה עד שכעבר k צעדים או הגרף הנשאר יכיל $m-3k$ קדקדים ופחות מ-$f(m-3k)$ צלעות, או לגרף הנשאר יהיו פחות מ-x קדקדים. במקרה הראשון יוצא

$$f(m)-f(m-3k) \quad (m+3x-3)+(m+3x-6)+\ldots+(m+3x-3k)=km+3kx-\frac{3}{2}k(k+1).$$

במקרה השני יוצא

$$f(m)\leq km+3kx-\frac{3}{2}k(k+1)+\binom{x}{2}.$$

בשני המקרים מוכיח חשבון קל ש-$x>cm$ עבור קבוע $0<c$ מתאים, מה שמוכיח את משפט 2.

האוניברסיטה העברית, ירושלים

ספרות

[1] P. Turán, Matem. és Physikai Lapok 43 (1941), 436-452.
On the theory of graphs, Colloquium Mathematicum 3 (1954), 19-30.

[2] מפיר.

SOME THEOREMS ON GRAPHS (Summary)

Paul Erdös

Turán [1] proved that if a graph of n vertices contains $M(n,k)+1$ edges where

$$M(n,k)=\frac{k-2}{2(k-1)}(n^2-r^2)+\binom{r}{2}, \quad n=(k-1)t+r, \quad 1\leq r\leq k-1$$

then it contains a complete k-gon, i.e. it contains k vertices any two of which are connected by an edge. He also showed that a graph having n vertices and $M(n,k)$ edges does not have to contain a complete k-gon.

Thus in particular Turán's theorem implies that a graph of 2n vertices and n^2+1 edges contains at least one triangle. Rademacher [2] proved that such a graph contains at least n triangles. I shall simplify the proof of Rademacher and more generally prove the following

Theorem. Let $l \leq 3$, $n > 2l$ and assume that our graph G has n vertices and $M(n,k)+1$ edges. Then it contains at least $l[\frac{n}{2}]$ triangles.

The theorem probably remains true for all $2l < n$. If n is even it certainly fails for $l = \frac{n}{2}$. This can be seen by considering the graph with the vertices $1,2,\ldots,2n$ and edges (i,j), $1 \leq i \leq n-1$; $n \leq j \leq 2n$, and $(n,n+1),[(n+1),(n+2)],\ldots,[(2n-1),2n],(n,2n)$. This graph has n^2+n edges and only n^2-1 triangles.

We prove our theorem in this summary only for $l=1$. We shall use induction. Our theorem clearly holds for $n=3$. Assume that it holds for $n-1$, we shall prove it for n. Assume first $n=2m+1$. Our graph contains at least one vertex of order m or less, for if not, the number of i's edges would be at least $(m+1)(2m+1)/2 > m(m+1)+1 = M[(2m+1),3]+1$. Omit this vertex of order m or less. The remaining graph has 2m vertices and at least $m^2+1 = M(2m,3)+1$ edges, thus by the induction hypothesis it contains at least $m = [\frac{n}{2}]$ triangles, which completes our proof if $n=2m+1$.

Assume next $n=2m$. As before we can see that our graph contains at least one vertex of order $\leq m$. If it contains a vertex of order $<m$, we omit it, the remaining graph has $2m-1$ vertices and at least $M[(2m-1,3)]+2$ edges, thus contains at least one triangle, by the induction hypothesis. Omit an edge of this triangle. The remaining graph has $2m-1$ vertices and at least $M[(2m-1,3)]+1$ edges. Thus by the induction hypothesis it contains at least $m-1$ triangles, and thus our original graph contains at least m triangles, q.e.d.

Assume finally that all vertices of our graph have order at least m. Then our graph can contain at most two vertices of order $m+1$. By omitting one of the vertices of order m, we see as in the previous paragraph that our graph contains at least one triangle. At least one vertex of this triangle must have order m. Omit this vertex. The remaining graph has $2m-1$ vertices and $M[(2m-1),3]+1$ edges. Thus by the induction hypothesis it must contain at least $m-1$ edges and thus our original graph must contain at least m edges, this complements our proof.

The same method gives the following stronger theorem:

Let G be a graph of n vertices and $M(n,3)+1$ edges. If G contains only $[\frac{n}{2}]$ triangles its structure is uniquely determined, its edges are (i,j), $1 \leq i \leq [\frac{n}{2}]$, $[\frac{n}{2}] < j \leq n$ and $(n-1,n)$.

Hebrew University, Jerusalem