ÜBER DIE REIHE $\Sigma \frac{1}{p}$.

VON

P. ERDÖS, in Manchester.

Mit Hilfe der Identität

$$\underset{p}{\Pi}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad (s > 1)$$

(wo p alle Primzahlen durchläuft), hat Euler den Satz bewiesen, dass die Summe der reziproken Werte der Primzahlen divergiert. Im Folgenden geben wir für diesen Satz zwei andere Beweise, die vielleicht nicht uninteressant sind.

I. Wenn $\sum\limits_{p \geq 2} \frac{1}{p}$ konvergieren würde, so würde es ein i mit $\sum\limits_{p > p_i} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}$ geben; dann wäre die Anzahl der Zahlen $\leq n$, die durch keine der Primzahlen $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots .$ teilbar sind, offenbar grösser als

$$n - \sum_{p > p_i} \left[\frac{n}{p}\right] \geqq n - \sum_{p > p_i} \frac{n}{p} > \frac{n}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Es ist evident, dass jede Zahl sich als Produkt einer Quadratzahl und einer quadratfreien Zahl darstellen lässt [1]). Daraus folgt, dass die Anzahl der Zahlen $\leq n$, die nur aus den Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_i$ zusammengesetzt sind, nicht grösser ist als $2^i \sqrt{n}$, d.h. das Produkt der Anzahl der quadratfreien Zahlen, die aus $p_1, p_2, \ldots, p_i$ zusammengesetzt sind, multipliziert mit der Anzahl der Quadratzahlen $\leq n$ [2]).

Wenn wir nun $n = 2^{2(i+1)}$ wählen, erhalten wir, dass die

1) Eine Zahl heisst quadratfrei, wenn sie durch keine Quadratzahl > 1 teilbar ist.

2) Aus dieser Bemerkung folgt sogleich, dass die Anzahl der Primzahlen $\leq n$ grösser als $\frac{\log n}{2 \log 2}$ ist. Es seien nämlich $q_1, q_2, \ldots q_r$ die Primzahlen $\leq n$. Die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq n$ ist offenbar nicht grösser als $\binom{r}{0} + \binom{r}{1} + \ldots + \binom{r}{r} = 2^r$, also ist $2^r \sqrt{n} \geq n$, daher $r \geq \frac{\log n}{2 \log 2}$.

Anzahl der Zahlen, die nur aus $p_1, p_2, \ldots, p_i$ zusammengesetzt sind, nicht grösser als $2^i 2^{i+1} = \frac{n}{2}$ ist, in Widerspruch zu (1).

II. Es gilt

$$\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p^2} < \tfrac{1}{4} + \frac{1}{2\,.\,3} + \frac{1}{3\,.\,4} + \ldots = \tfrac{1}{4} + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + \ldots = \tfrac{3}{4};$$

wenn nun $\sum_{p\geq 2} \frac{1}{p}$ konvergieren würde, so würde ein i existieren mit

$$\sum_{p\geq p_i} \frac{1}{p} < \tfrac{1}{8}.$$

Für die Anzahl der Zahlen $\leq n$, die durch keine der Zahlen $p_1^2, p_2^2, \ldots, p_i^2, p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots$ teilbar sind, d.h. für die Anzahl der quadratfreien Zahlen $\leq n$, die aus $p_1, p_2, \ldots, p_i$ zusammengesetzt sind, hätten wir dann die Ungleichung

$$2^i \geqq n - \sum_{p=2}^{p_i} \left[\frac{n}{p^2}\right] - \sum_{p>p_i} \left[\frac{n}{p}\right] \geqq n - \sum_{p=2}^{p_i} \frac{n}{p^2} - \sum_{p>p_i} \frac{n}{p} > \frac{n}{8}.$$

Da dies aber für $n \geqq 2^{i+3}$ nicht gilt, ist unser Satz bewiesen.