# VÉGTELEN GRÁFOK EULER-VONALAIRÓL.

**1. §.** Ismeretes a következő EULER-től származó tétel:

Egy véges sok élből álló gráfnak akkor és csak akkor van EULER-vonala, ha

1. a gráf összefüggő,
2. minden szögpontjában párosszámú él találkozik.[1]

Itt egy véges gráf EULER-vonala alatt értjük éleinek oly

$$P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$$

sorozatát, melyben a gráf minden éle pontosan egyszer fordul elő.

Következőkben kiterjesztjük ezt a tételt végtelen gráfokra. Egy végtelen gráf EULER-vonalán értjük az éleknek oly

$$\ldots P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \ldots$$

mindkét irányban végtelen sorozatát, melyben a gráf minden éle pontosan egyszer fordul elő. Dolgozatunk célja annak igazolása, hogy a *szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy végtelen gráfnak legyen* EULER-*vonala, a következő:*

E 1. *a gráf összefüggő,*

E 2. *megszámlálható sok éle van,*

E 3. *nincs olyan szögpontja, melyben páratlanszámú él fut össze,*

---

[1] L. pld. D. KÖNIG: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig 1936. 20. l. Ugyanitt (33. l.) vannak felvetve mindazon problémák, melyeknek megoldását jelen dolgozat tartalmazza.

E 4. *hagyjuk el a gráf egy tetszőleges véges részgráfját, a megmaradó gráf darabjai*[1] *közt*

a) *legfeljebb két végtelen gráf van,*

b) *sőt, ha az elhagyott véges gráf párosfokú,*[2] *akkor pontosan egy végtelen gráf van.*

Mielőtt áttérnénk tételünk igazolására, előbb az E 4 feltételt egy más, valamivel kevesebbet követelővel cseréljük fel. Ugyanis elégséges az E 4-ben szereplő tetszőleges véges részgráfok helyett véges élvonalakat[3] vizsgálni, sőt elégséges a gráf egy tetszőleges szögpontján átmenő véges élvonalak vizsgálata. Vagyis E 4 helyére a következő kritériumot tesszük:

E 4'. *van a gráfnak egy következő tulajdonságú szögpontja: hagyjunk el a gráfból egy ezen a szögponton átmenő tetszőleges véges élvonalat; a megmaradó gráf darabjai közt*

a) *legfeljebb két végtelen gráf van,*

b) *sőt, ha az elhagyott élvonal zárt, pontosan egy végtelen gráf van.*

Megjegyezzük még, hogy abban az esetben, ha a vizsgálandó gráf minden szögpontjában végesszámú él találkozik, az E 2, 3 feltétel nyilvánvalóan pótolható a következővel:

E 5. *a gráf párosfokú.*

[Ha t. i. egy összefüggő gráf minden szögpontjában véges sok él találkozik, akkor a gráf élei megszámlálhatók.[4]]

**2. §.** Először megmutatjuk, hogy feltételeink szükségesek. Ez E 1, 2, 3-nál nyilvánvaló, tehát részletesen csak E 4-gyel kell foglalkozni.

---

[1] Azokat az *összefüggő* gráfokat, amelyekre egy gráf szétesik, a következőkben e gráf *darab*jainak fogjuk nevezni.

[2] Egy gráfot *párosfokú*nak nevezünk, ha a gráf minden szögpontjában véges és pedig párosszámú él találkozik.

[3] Egy véges élvonal alatt értjük a gráf egy oly $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n$ élsorozatát, melyben egy él legfeljebb egyszer fordul elő. Az élvonalat nyiltnak vagy zártnak nevezzük a szerint, hogy $P_1$ és $P_n$ megegyezik vagy nem.

[4] KŐNIG, id. h., 79. l.

Tegyük tehát fel, hogy a vizsgálandó gráfnak van EULER-vonala, vagyis, hogy létezik a

$$\ldots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \ldots$$

EULER-vonalat reprezentáló élvonal. Hagyjunk el a gráfból egy tetszőleges véges $g$ részgráfot. Mindenesetre vannak oly $\mu$ és $\nu$ egészszámok, hogy a

$$P_\mu P_{\mu+1}, P_{\mu+1}P_{\mu+2}, \ldots, P_{\nu-1}P_\nu \qquad (P_\mu \neq P_\nu)$$

véges élvonal, melyet $V$-vel jelölünk, tartalmazza a $g$ gráf összes éleit. Jelöljük továbbá a gráfból a $V$ élvonal elhagyása után megmaradó

$$\ldots, P_{\mu-2}P_{\mu-1}, P_{\mu-1}P_\mu \quad \text{és} \quad P_\nu P_{\nu+1}, P_{\nu+1}P_{\nu+2}, \ldots$$

végtelen gráfokat $V_{-1}$, illetőleg $V_{+1}$-el. Nyilván a $g$ gráf elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráf darabjai közül csak azok lehetnek végtelen gráfok, melyek a $V_{-1}$, $V_{+1}$ gráfok valamelyikét tartalmazzák. Ilyen tehát legfeljebb kettő lehet. Evvel tehát igazoltuk E 4$a$-t. Most áttérünk E 4$b$ igazolására, vagyis igazoljuk, hogy, ha $g$ párosfokú, akkor $\bar{g}$-nak egyetlen végtelen darabja van. T. i. konstruálható $\bar{g}$-nak egy oly élvonala, mely részgráfja $V$-nek is és amely élvonal összeköti a $P_\mu$ szögpontot a $P_\nu$ szögponttal. [A konstrukció a következő: $P_\mu$ a $V$-nek páratlanfokú szögpontja, mig $g$ párosfokú, tehát $g$ elhagyása után ($g$ részgráfja $V$-nek) marad még $V$-nek egy $P_\mu P_{i_1}$ éle. Továbbá $P_{i_1}$ a $V$-nek párosfokú szögpontja és a párosfokú $g$ elhagyása után az előbbiek szerint maradt még $V$-nek egy $P_\mu P_{i_1}$ éle. Ebből következik, hogy $V$-nek maradt még egy $P_\mu P_{i_1}$-től különböző $P_{i_1}P_{i_2}$ éle is. Ez az eljárás csak akkor akadhat meg, amikor elérjük a $P_\nu$ szögpontot; de ekkor már előállítottuk a kívánt élvonalat.] Ennek az élvonalnak létezése azonban maga után vonja $\bar{g}$ egy oly végtelen darabjának létezését, melynek mind a $V_{-1}$, mind a $V_{+1}$ gráf része. Ekkor azonban $\bar{g}$-nak nyilvánvalóan csak egyetlen végtelen darabja van.

Evvel tehát igazoltuk az E 1, 2, 3, 4 feltétel szükségességét. Ebből természetesen következik a kevesebbet követelő E 1, 2, 3, 4' feltétel szükségessége is.

3. §. A feltétel elegendő voltának bizonyitásához a következő segédtételt fogjuk felhasználni:

*Egy G gráfnak van* Euler-*vonala, ha az* E 1, 2, 3 *feltételen kívül teljesíti a következő feltételt:*

E 6. *G-nek van egy oly szögpontja, hogy bárhogyan hagyunk is el G-ből egy ezen a kitüntetett szögponton átmenő véges élvonalat, a megmaradó gráfnak pontosan egy végtelen darabja van.*

Ennek a segédtételnek bizonyitása két lépésben történik.

*a)* Számozzuk meg $G$ éleit tetszőleges módon.

Konstruálunk először egy oly $V_0$ véges zárt élvonalat, mely

1. átmegy $G$ kitüntetett szögpontján,

2. tartalmazza élei közt a $G$ gráf első sorszámú élét,

3. ha $G$-ből elhagyjuk $V_0$-t, a megmaradó $\overline{V}_0$ gráf teljesiti az E 1, 2, 3, 6 feltételt, még pedig az E 6-ot úgy, hogy a benne szereplő kitűntetett szögpontnak választható oly szögpont, mely szögpontja a $V_0$ gráfnak is.

A konstrukció a következő:

Vegyük $G$-nek egy oly $v$ élvonalát, mely a kitüntetett szögpontból, $Q_0$-ból indul ki és amely tartalmazza $G$ első sorszámú élét. $G$-ből $v$ elhagyása után megmaradó $\bar{v}$ gráf darabjai között E 6 szerint csak egy végtelen gráf van; a többi (t. i. véges) darabjait hozzácsatoljuk $v$-hez. Az ily módon nyert $g$ gráfról azt állitjuk, hogy vagy nincs, vagy két páratlanfokú szögpontja van. [Ugyanis először tekintve, hogy $g$ véges gráf, minden szögpontjában végesszámú él fut össze. A $g$ azon szögpontjai, melyek nem szögpontjai a $G$-ből $g$ elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráfnak, ugyanolyan fokúak $g$-ben, mint $G$-ben. Ezen szögpontok tehát, tekintve, hogy végtelenfokúak nem lehetnek, párosfokúak. A $g$ azon szögpontjai pedig, melyek szögpontjai $\bar{g}$-nak is, egyúttal szögpontjai $v$-nek is. Továbbá tekintve, hogy ezen szögpontok nem szögpontjai a $g$-ből $v$ elhagyása után megmaradó gráfnak, ugyanolyan fokúak $g$-ben, mint $v$-ben. A $v$ gráfnak viszont a szerint, hogy $v$ zárt vagy nyilt élvonal, vagy nincs vagy két páratlanfokú szögpontja van.] Már most, ha $g$-nek van két páratlanfokú szögpontja, akkor e szögpontok ezek szerint szögpontjai a $\bar{g}$ gráfnak is; tekintve pedig, hogy $\bar{g}$ összefüggő, $\bar{g}$ tartalmaz oly élvonalat, mely az utóbbi két szögpontot köti egymással össze. Ezt az élvonalat csatoljuk $g$-hez; legyen az így keletkezett gráf $v'$. Tekintve, hogy $v'$ párosfokú, az 1. §-ban említett EULER-féle tétel szerint $v'$ felfogható egy zárt élvonalnak. A $G$-ből $v'$ elhagyása után megmaradó $\bar{v}'$ gráf darabjai között E 6 szerint csak egy végtelen gráf van. A $\bar{v}'$ véges darabjait csatoljuk $v'$-höz; legyen az így keletkezett véges gráf $g'$. A $g'$ gráf párosfokú. (Ugyanis ugyanúgy, mint $g$ vizsgálatánál, $g'$-nek csak oly pont lehetne páratlanfokú szögpontja, amely $v'$-nek is páratlanfokú szögpontja.) Mindenesetre tehát előállitottunk egy összefüggő párosfokú gráfot ($g$-t, ill. $g'$-t), mely EULER gráftétele szerint felfogható egy $V_0$ zárt élvonalnak. Azt állítjuk, hogy a $V_0$ eleget tesz a kívánt feltételeknek. Ugyanis átmegy $Q_0$-on és tartalmazza élül $G$ első sorszámú élét, tehát teljesíti 1.-et és 2.-t. Míg 3. teljesülése, vagyis az, hogy a $G$-ből $V_0$ elhagyása után megmaradó $\bar{V}_0$ teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt a következőképpen látható be:

E 1 teljesül, mert a $\bar{V}_0$ gráf azonos $\bar{g}$-val, illetőleg $\bar{g}'$-val.

E 2, 3 teljesül, mert a $\bar{V}_0$ gráf úgy keletkezett $G$-ből, hogy elhagytunk belőle egy párosfokú véges gráfot.

E 6 teljesül, még pedig úgy, hogy a kitüntetett szögpontnak választható a $\bar{V}_0$ gráf oly $Q_1$ szögpontja, mely szögpontja egyúttal a $V_0$ gráfnak is. Ugyanis legyen $v_1$ a $\bar{V}_0$-nak tetszőleges a $Q_1$-en áthaladó élvonala. A $\bar{V}_0$-ból $v_1$ elhagyása után megmaradó gráf legyen $\bar{v}_1$. A $v_1$ élvonal és a $V_0$ zárt élvonal, tekintve, hogy $Q_1$ mindkettőnek szögpontja, együtt egy olyan gráfot alkotnak, amely felfogható egy $v_2$ élvonalnak. Tekintve, hogy $v_2$ tartalmazza szögpontul $Q_0$-t, $G$-ből a $v_2$ élvonal elhagyása után megmaradó $\bar{v}_2$ gráf darabjai között E 5 szerint csak egy végtelen gráf van. A $\bar{v}_2$ gráf azonban azonos $\bar{v}_1$-val.

*b)* A $\overline{V}_0$ gráf teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt (még pedig az E 6-ot úgy, hogy kitüntetett szögpontnak választható $\overline{V}_0$ oly szögpontja, mely szögpontja $V_0$-nak is). Tehát az előbbi konstrukciót megismételhetjük a $\overline{V}_0$ gráfra és ennek segítségével nyerhetünk egy oly $V_1$ zárt élvonalat, melynek $V_0$-lal nincs közös éle, amely tartalmazza szögpontul a $Q_1$ pontot és amely tartalmazza a $G$ gráf azon legalacsonyabb sorszámú élét, melyet $V_0$ nem tartalmaz. Továbbá a $G$-ből $V_0$ és $V_1$ élvonalak elhagyása után megmaradó gráf teljesíti az E 1, 2, 3, 6 feltételt, még pedig E 6-ot úgy, hogy a kitüntetett szögpontnak választható oly szögpont, mely szögpontja a $V_1$ élvonalnak is. Ezt az eljárást folytatva nyerjük a

$$V_0, V_1, V_2, \ldots$$

közös él nélküli zárt élvonalak végtelen sorozatát. Ez a végtelen élvonalsorozat kimeríti a $G$ gráf éleit, továbbá a $V_i$ élvonal tartalmazza szögpontul a $Q_i$ és $Q_{i+1}$ szögpontokat ($i=1, 2, \ldots$). Azonban a $V_0$ zárt élvonal felfogható egy $Q_1$-ből kiinduló és ugyanide visszatérő élvonalnak, míg a $V_i$ zárt élvonal felbontható két, a $Q_i$ és $Q_{i+1}$ pontokat összekötő $V'_{-i}$ és $V_{+i}$ nyilt élvonalra ($i=1, 2, 3, \ldots$). A

$$\ldots V'_{-n}, V'_{-n+1}, \ldots, V'_{-1}, V_0, V'_1, \ldots, V'_m, V'_{m+1}, \ldots$$

egymásba kapcsolódó élvonalak sorozata pedig megadja a $G$ gráf egy EULER-vonalát.

**4. §.** Egy második segédtétel, melyre szükségünk lesz és amely önmagában sem látszik érdektelennek, a következő:

*A szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy végtelen $G$ gráfnak legyen végesből kiinduló, végtelenbe haladó* EULER-*vonala, vagyis, hogy felírhatók legyenek élei a*

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots$$

*egyoldalúan végtelen sorozatban, a következő:*

E* 1. *a gráf összefüggő,*

E* 2. *megszámlálható sok éle van,*

E* 3*a*. *vagy van a gráfnak pontosan egy páratlanfokú szögpontja,*

E* 3*b*. *vagy, ha nincs páratlanfokú szögpontja, akkor van legalább egy végtelenfokú szögpontja,*

E* 4. *a gráf előbbi pontban kitüntetett nem párosfokú szögpontjának az a tulajdonsága van, hogy G-ből elhagyva egy ezen a szögponton átmenő tetszőleges véges élvonalat, a megmaradó gráf darabjai közt egy végtelen gráf van.*

Ezen E* feltétel szükségességének bizonyítása hasonlóan történik az E feltétel szükségességének fent adott bizonyításához. Tekintve pedig, hogy az E* feltétel szükségességét a továbbiakban úgy sem fogjuk felhasználni, ezt a bizonyítást nem is részletezzük. Az E* feltétel elégségességének bizonyítását a 3. § tételének bizonyításához hasonlóan végezzük és pedig ismét két lépésben.

*a)* Számozzuk meg a $G$ gráf éleit tetszőleges módon. Konstruálunk egy oly $V_0$ nyílt élvonalat, mely

1. átmegy $G$ kitüntetett szögpontján,
2. tartalmazza a $G$ gráf első sorszámú élét,
3. $G$-ből elhagyva a $V_0$ élvonalat, a megmaradó $\overline{V_0}$ gráf teljesíti az E* feltételt, még pedig E* 4-et oly módon, hogy a kitüntetett szögpontnak választható oly szögpont, mely szögpontja a $V_0$ élvonalnak is.

A konstrukció a következő:

Vegyük $G$-nek egy a kitüntetett szögpontból $Q_0$-ból kiinduló oly $v$ nyilt élvonalát, mely tartalmazza élül a $G$ gráf első sorszámú élét. Legyen ennek az élvonalnak a $Q_0$-tól különböző végpontja $Q_1$. [Ilyen élvonal létezik. Ugyanis tekintve, hogy $G$ összefüggő, tartalmaz egy olyan élvonalat, amely $Q_0$-ból indul ki és tartalmazza $G$ első sorszámú élét. Ha ez az élvonal zárt, akkor, mint párosfokú gráf, nem merítheti ki $G$-nek $Q_0$-ban összefutó nem párosszámú élét. Tehát ehhez a zárt élvonalhoz csatolható $G$-nek egy $Q_0$-ból kiinduló éle, ami által a zárt élvonalból előállítottunk egy kivánt nyílt élvonalat.] Tekintsük a

$G$-ből $v$ elhagyása után megmaradó $\bar{v}$ gráfot. Ennek a gráfnak E* 4 szerint csak egy végtelen darabja van. A $\bar{v}$ gráf véges darabjait csatoljuk $v$-hez; legyen az így nyert gráf $g$. A $g$ gráfnak $Q_0$ és $Q_1$ páratlanfokú szögpontja, míg a többi szögpontjai párosfokúak. [Ugyanis a $g$ gráf $Q_0$-tól és $Q_1$-től különböző szögpontjainak párosfokúsága a 3. § $a)$ pontjában szereplő $g$ gráf párosságához hasonlóan következtethető. A ~~$g$ gráfnak a~~ $Q_0$ szögpont, ~~aszerint, hogy $Q_0$ a $G$ gráfnak páratlan- vagy végtelenfokú szögpontja,~~ nem szögpontja, illetőleg szögpontja $\bar{g}$-nak; tehát $g$-nek ezeknek az eseteknek megfelelően olyan fokú szögpontja, mint $G$-nek, illetőleg $v$-nek; mindkét esetben tehát ez a szögpont páratlanfokú. A $Q_1$ szögpont szögpontja $\bar{g}$-nak, tehát $g$-ben ugyanolyan fokú, mint $v$-ben; vagyis páratlanfokú.] A $g$ gráf tehát felfogható egy $Q_0$-t $Q_1$-vel összekötő $V_0$ nyílt élvonalnak (l. 6. § $a)$). A $V_0$ élvonal nyilvánvalóan teljesíti az 1., 2. kivánalmakat. Teljesíti továbbá 3.-at is. [A $Q_1$-ben összefutó $\overline{V}_0$-élek száma megegyezik $G$ és $g$ $Q_1$-ben összefutó élei számának különbségével. A $Q_1$ szögpont tehát a szerint, hogy $G$-ben páros- vagy végtelenfokú, $\overline{V}_0$-ban páratlan-, illetőleg végtelenfokú szögpont. Míg a $\overline{V}_0$-ra vonatkozó többi kivánalom ahhoz hasonlóan látható be, ahogyan a 3 §$a)$-ban szereplő $\overline{V}_0$-ra beláttuk az E 1, 2, 3, 6 teljesülését.]

$b)$ Tekintve az előbb bebizonyítottakat, a $\overline{V}_0$ gráfra konstrukciónk megismételhető. Ilyen módon nyerünk egy a $Q_1$, $Q_2$ különböző végpontokkal bíró oly $V_1$ élvonalat, mely nem tartalmaz $V_0$ élei közül egyet sem, ellenben tartalmazza $G$ azon legalacsonyabb sorszámú élét, melyet $V_0$ nem tartalmazott. Az eljárást folytatva nyerjük a

$$V_0, V_1, V_2, \ldots$$

közös él nélküli nyílt élvonalak oly végtelen sorozatát, melyek rendre egymásbakapcsolódnak a $Q_1$, $Q_2$,... szögpontokban és amelyek kimerítik a $G$ gráf éleit. Ezen élvonalak sorozata megadja azonban a $G$ gráf egy keresett egyoldalúan végtelen EULER-vonalát.

**5. §.** Ebben a §-ban megadjuk az E 1, 2, 3, 4' feltétel elégségességének bizonyitását.

Ha egy $G$ gráfra ezen a feltételen kivül teljesül a 3. §-ban szereplő E 6 feltétel is, akkor a 3. § szerint $G$-nek van EULER-vonala; tegyük tehát fel, hogy ez az eset nem áll fenn, vagyis tegyük fel, hogy $G$-nek van egy oly $v$ élvonala, hogy a $G$-ből $v$ elhagyása után megmaradó $\bar{v}$ gráfnak két végtelen darabja van. A $v$ élvonal az E 4'$b$ szerint csak nyilt élvonal lehet. Csatoljuk a $\bar{v}$ gráf véges darabjait a $v$ gráfhoz; legyen az így keletkezett gráf $G_0$. A 3. § *a)* pontjában szereplő $g$ gráfra vonatkozó meggondolásokhoz hasonlóan következtethető, hogy $G_0$-nak két páratlanfokú szögpontja van, vagyis az, hogy a $G_0$ gráf felfogható egy $Q_{-1}$, illetőleg $Q_{+1}$ végpontokkal biró $V$ nyilt élvonalnak. A $\bar{V}$ gráf két végtelen darabból áll, jelöljük ezeket a darabokat $G_{-1}$, illetőleg $G_{+1}$-vel. Azt állitjuk, hogy a $G_{-1}$, illetőleg $G_{+1}$ gráfok teljesitik a 4. §-ban szereplő E* feltételt, még pedig E* 4-et úgy, hogy a kitüntetett szögpontnak választható $Q_{-1}$, illetőleg $Q_{+1}$. [Nézzük például $G_{+1}$-et. E* 1, 2 nyilván teljesül. A $\bar{V}$ gráf $Q_{+1}$ szögpontban összefutó éleinek száma egyenlő a $G$ gráf és $V$ gráf ezen szögpontban összefutó élei számának különbségével. A $Q_{+1}$ szögpont tehát aszerint, hogy $G$-nek páros-, illetőleg végtelenfokú szögpontja, $G_{+1}$-nek páratlan-, illetőleg végtelenfokú szögpontja. Mindenesetre tehát teljesül E* 3. Az E* 4 feltétel ahhoz hasonlóan látható be, ahogyan a 3. § *a)* pontjában szereplő $\bar{V}_0$ gráfra vonatkozó E 6 feltételt igazoltuk.] Ez pedig azt jelenti, hogy a $G_{-1}$, illetőleg $G_{+1}$ gráfok a $Q_{-1}$, illetőleg $Q_{+1}$ szögpontból kiinduló egyoldalúan végtelen $E_{-1}$, illetőleg $E_{+1}$ EULER-vonalnak foghatók fel. Az

$$E_{-1},\ V,\ E_{+1}$$

egymásba kapcsolódó gráfok pedig megadják a $G$ gráf egy keresett EULER-vonalát.

Ezzel tehát befejeztük tételünk bizonyitását.

**6. §.** Befejezésül három kiegészitő megjegyzést teszünk.

*a)* Ismeretes a következő véges gráfokra vonatkozó LISTING-féle tétel:[1]

Legyen egy véges gráf páratlanfokú szögpontjainak száma $2n$. (Minden véges gráf páratlanfokú szögpontjainak száma páros.) Létezik az élvonalaknak oly

$$V_1, V_2, \ldots, V_n$$

rendszere, mely az adott gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Ez a tétel dolgozatunk módszeréhez hasonlóan átvihető végtelen gráfokra. Ugyanis igazolható a következő — ebben a dolgozatban nem bizonyított — tétel:

*Annak a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy végtelen $G$ gráfhoz tartozzon a (véges vagy egyoldalúan végtelen vagy mindkétoldalúan végtelen) élvonalaknak oly véges*

$$V_0, V_1, \ldots, V_n$$

*rendszere, melyben $G$ minden éle pontosan egyszer fordul elő, a következő:*

1. *a gráfnak véges sok darabja van,*
2. *megszámlálható sok éle van,*
3. *véges sok páratlanfokú szögpontja van,*
4. *létezik egy oly $M$ szám, hogy $G$-ből egy tetszőleges véges $g$ részgráf elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráf végtelen darabjainak száma nem nagyobb $M$-nél.*

*b)* Ismeretes a következő véges gráfokra vonatkozó EULER-féle tétel:[2]

Bármely véges gráf élei kimeríthetők egy oly zárt

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_0$$

élsorozattal, hogy ebben az élsorozatban a gráf minden éle pontosan kétszer forduljon elő.

---

[1] L. pl. KŐNIG id. h., 22. l.

[2] L. pl. KŐNIG id. h., 23. l.

Ennek a tételnek végtelen gráfokra való átvitele a következő: *A szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy G gráf élei kimeríthetők legyenek egy*

$$\ldots P_{-2}P_{-1},\ P_{-1}P_0,\ P_0P_1,\ P_1P_2,\ldots$$

*mindkét oldalon végtelen sorozattal úgy, hogy ebben a végtelen élsorozatban G minden éle pontosan kétszer forduljon elő, az, hogy*

1. *a gráf összefüggő,*
2. *megszámlálható sok éle van,*
3. *elhagyva G-ből egy, tetszőleges véges gráfot a megmaradó gráfnak pontosan egy végtelen darabja van.*

Tekintsük ugyanis azt a $G^*$ gráfot, mely úgy keletkezik, hogy $G$ minden $e$ éle mellé veszünk egy $e'$ élet, mely ugyanazon két szögpontot köti össze, mint $e$. Ekkor a $G$ gráfra vonatkozó kívánalom nem jelent mást, minthogy a $G^*$ gráfnak legyen EULER-vonala, vagyis, hogy a $G^*$ gráfra teljesüljön az E feltétel. Azonban E 1, 2 akkor és csak akkor teljesedik $G^*$-ra, ha $G$-re teljesedik a fenti 1. és 2., míg E 3 mindig teljesedik $G^*$-ra, mert $G^*$-nak nem lehet páratlanfokú szögpontja. Továbbá azt állitjuk, hogy $G^*$-ra az E 4 feltétel akkor és csak akkor teljesedik, ha $G$ teljesiti a fenti 3.-at. Ugyanis tegyük fel először, hogy $G$-nek van egy oly $g$ részgráfja, hogy a $G$-ből $g$ elhagyása után megmaradó $\bar{g}$ gráf darabjai közt két végtelen gráf van. Jelöljük ezeket a végtelen gráfokat $\gamma_1$ és $\gamma_2$-vel. Kettőzzük meg $g$ éleit, ilymódon kapjuk a $\Gamma$ párosfokú gráfot. Elhagyva $G^*$-ból a $\Gamma$ párosfokú gráfot, a megmaradó gráf darabjai közt két végtelen gráf van, mert ezek a végtelen gráfok $\gamma_1$, illetőleg $\gamma_2$ élei megkettőzésével állithatók elő. Az azonban, hogy a $G^*$ gráfból a párosfokú $\Gamma$ gráf elhagyása után megmaradó gráf darabjai között két végtelen gráf legyen, ellenkezik az E 4*b* feltétellel. Ilyen módon tehát, abból a feltevésből kiindulva, hogy $G$ nem teljesiti 3.-at, arra jutottunk, hogy $G^*$ nem teljesiti E 4-et.

Ha pedig $G$ teljesiti a 3.-at, akkor könnyen belátható, hogy elhagyva $G^*$-ból egy tetszőleges $g$ gráfot, a megmaradó $\bar{g}$ gráfnak pontosan egy végtelen darabja van; vagyis $G^*$ teljesíti E 4-et. [Ha u. i. $\bar{g}$-nak több végtelen darabja van, akkor $g$-nek azon részét hagyva el $G^*$-ból, mely $G$-nek is része, több végtelen darabbal biró gráfot kapunk.]

Evvel tehát állitásunkat igazoltuk.

*c)* KŐNIG DÉNES emlitett könyvében a következő problémát is felveti:

Az $n$-dimenziós tér $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rácspontját (hol az $x$-ek tetszőleges egész számok) kapcsoljuk össze egy-egy éllel az $(x_1+1, x_2, \ldots, x_n)$, $(x_1, x_2+1, \ldots, x_n), \ldots, (x_1, x_2, \ldots, x_n+1)$ rácspontokkal. Ezeket a kapcsolásokat a tér összes rácspontjaira elvégezve kapjuk az $n$-dimenziós tér közönséges rácsgráfját.

*Van-e az n-dimenziós tér közönséges rácsgráfjának* EULER-*vonala?*

Dolgozatunk tételéből, sőt már a 3. § tételéből is, a legegyszerűbben következtethető az *igenlő* válasz.[1] Ugyanis E 1, 2 nyilvánvalóan teljesedik, teljesedik továbbá E 3 is, mert a gráf minden szögpontjában $2n$ él találkozik. Teljesedik ezenkivül az E 6 feltétel is, mert elhagyva a gráfból egy *tetszőleges* véges élvonalat, a megmaradó gráf darabjai közt pontosan egy végtelen gráf van. Vegyük ugyanis az $n$-dimenziós tér egy oly $n$-dimenziós kockáját, mely belsejében tartalmazza az elhagyott élvonal szögpontjait. Az elhagyás után megmaradó gráf darabjai közül csak az lehet végtelen, mely tartalmaz az előbbi kockán kivül fekvő rácspontot. Ilyen darab azonban csak egy van.

*Erdős Pál, Grünwald Tibor*
*és Weiszfeld Endre.*

---

[1] Ennek a tételnek egy direkt bizonyitását adja E. WEISZFELD: Über Gitterpunkte des mehrdimensionalen Raumes; e dolgozat a szegedi *Acták*-ban fog megjelenni.

# ÜBER EULERSCHE LINIEN UNENDLICHER GRAPHEN.

Die Verfasser beantworten die bei D. König: «Theorie der endlichen und unendlichen Graphen» (Leipzig, 1936) aufgeworfene Frage, wie man die bekannten Euler'schen Graphen-Sätze, die sich dem Problem der Königsberger Brücken anschliessen, auf *unendliche* Graphen ausdehnen kann. U. A. wird folgender Satz bewiesen.

Ein unendlicher Graph besitzt dann und nur dann eine (beiderseits unendliche) Euler'sche Linie, d. h. dann und nur dann kann man die Kanten des Graphen in einer beiderseits unendlichen Folge von der Art

$$\ldots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \ldots$$

(wo jede Kante nur einmal vorkommt) aufzählen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. Der Graph ist zusammenhängend.
2. Er besitzt abzählbar unendlichviele Kanten.
3. Er besitzt keinen solchen Knotenpunkt, in dem eine ungerade Anzahl von Kanten zusammenlaufen.
4. Entfernt man in beliebiger Weise endlich viele Kanten, so gibt es unter den zusammenhängenden Bestandteilen des entstehenden Graphen *a)* höchstens zwei *unendliche* Graphen; *b)* bilden die weggelassenen Kanten einen solchen Graphen, in dem nach jedem Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Kanten laufen, so gibt es genau einen *unendlichen* Graphen.

Hieraus ergibt sich z. B. unmittelbar, dass der gewöhnliche *Gitter-Graph* des $n$-dimensionalen Euklidischen Raumes für jedes $n$ eine beiderseits unendliche Euler'sche Linie besitzt.

*P. Erdős, T. Grünwald, E. Weiszfeld.*