l'ensemble des points xy tels que $\tau(x) \prec \bar{y}$, puisque l'opérateur logique Σ correspond à une projection.

3. Pour en déduire notre théorème, remarquons que la condition $\tau(x) < \Omega$ équivaut évidemment à l'existence d'un type d'ordre μ tel que $\tau(x) \prec \mu$ et $\mu < \Omega$. Or, la fonction $\bar{y}$ admettant comme valeurs tous les types d'ordre dénombrable, cela revient à l'existence d'un y tel quel que $\tau(x) \prec \bar{y} < \Omega$. En symboles :

$$[\tau(x) < \Omega] \equiv \sum_{y} \{[\tau(x) \prec \bar{y}](\bar{y} < \Omega)\}.$$

L'ensemble des y tels que $\bar{y} < \Omega$ étant de classe C_1 ([1]), donc de classe P_n, et l'ensemble des xy tels que $\tau(x) \prec \bar{y}$ étant, comme nous venons de démontrer, également de classe P_n, il en est encore de même de l'ensemble des xy qui satisfont à la condition entre crochets $\{\ \}$. Comme projection de ce dernier, l'ensemble des x tels que $\tau(x) < \Omega$ est donc aussi de classe P_n.

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Il en résulte en particulier que les deux opérations : l'opération (A) et la soustraction effectuées sur des ensembles qui sont simultanément de classe P_2 et C_2 ne conduisent pas en dehors de cette famille. Elle contient par conséquent tous les ensembles (nommés par M. Lusin, ensembles C) qui s'obtiennent à partir des intervalles en effectuant ces deux opérations un nombre arbitraire de fois ([2]).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur le mode de convergence pour l'interpolation de Lagrange.* Note ([3]) de MM. **P. Erdös** et **Erwin Feldheim**, présentée par M. Jacques Hadamard.

Les recherches qui vont suivre se rattachent à des questions sur l'interpolation de Lagrange. Toutes les notations que nous employons sont expliquées dans une Note précédente ([4]).

([1]) *Op. cit.*, p. 257.

([2]) Cette dernière conclusion a été signalée par MM. Kantorovitch et Livensohn dans les *Comptes rendus*, **190**, 1930, p. 1115 et dans *Fund. Math.*, **18**, 1932, p. 217 (sans démonstration). Cf. aussi quelques indications sur des travaux de M. Novikoff sur ce sujet, contenues dans un compte rendu sur la théorie descriptive des fonctions présenté à l'Académie des Sciences d'U. S. S. R. (édité par l'Académie en russe, 1935, p. 61) par M. Lusin.

([3]) Séance du 5 octobre 1936.

([4]) *Comptes rendus*, **203**, 1936, p. 650.

Nous allons démontrer dans la suite que, pour les abscisses de Tchebychef, on a

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{+1}[L_n(f)-f(x)]^{2r}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=0, \tag{1}$$

$L_n(f)$ désignant le $n^{\text{ième}}$ polynome d'interpolation de la fonction $f(x)$, et $2r$ un nombre pair quelconque.

Pour $r=1$, on a, d'après un résultat connu ([1]),

$$\int_0^{\pi}[L_n(f)-f(\cos\theta)]^2\,d\theta\to 0$$

et

$$\int_0^{\pi}|L_n(f)-f(\cos\theta)|\,d\theta\to 0, \tag{2}$$

qui nous servira dans la démonstration.

Il est immédiat qu'il suffit de prouver que

$$I_n=\int_0^{\pi}[L_n(f)]^{2r}\,d\theta$$

reste borné lorsque $n\to\infty$. Or, $L_n(f)=\sum_{i=1}^{n}y_i\,l_i(x)$, donc

$$I_n=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=2r}\frac{2r\,!}{\alpha_1\,!\,\alpha_2\,!\ldots\alpha_s\,!}\,y_{i_1}^{\alpha_1}y_{i_2}^{\alpha_2}\ldots y_{i_s}^{\alpha_s}\int_0^{\pi}l_{i_1}^{\alpha_1}l_{i_2}^{\alpha_2}\ldots l_{i_s}^{\alpha_s}\,d\theta, \tag{3}$$

où Σ désigne une somme multiple : le nombre des sommations est indiqué par le nombre des indices i_k.

Nous procéderons par une induction double. On sait que le théorème est vrai si $r=1$. Supposons qu'il en est ainsi pour toute valeur $\leqq 2r-2$, et démontrons-le pour $2r$. Il résulte de l'hypothèse

$$\int_0^{\pi}[L_n(f)]^{2r-2}\,d\theta<C$$

(C, constante indépendante de n) et de (2), que l'intégrale

$$\int_0^{\pi}|L_n(f)|^k\,d\theta \tag{4}$$

([1]) P. Erdös et P. Turán, *Quadrature and Mean-Convergence of the Lagrange-Interpolation*, *Annals of Mathematics*, sous-presse.

est bornée pour toute valeur de k plus grande que 1, mais au plus égale à $2r-2$. Il faut démontrer que tous les termes de la somme (3) sont bornés. Nous le ferons par induction relativement au nombre s des exposants α_k. Si $s=1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} y_k^{2r}\int_0^{\pi} l_k^{2r}(\cos\theta)\,d\theta.$$

Étant donné que, d'après Fejér, $\sum_{k=1}^{n} l_k^2 < 2$, et tous les y_k sont uniformément bornés, cette somme le sera également.

Supposons maintenant que tous les termes qui correspondent à des valeurs au plus égales à $s-1$ sont bornés, et passons à la valeur suivante s. Considérons l'expression

$$(5)\quad \int_0^{\pi}(\Sigma y_k^{i_1} l_k^{i_1})(\Sigma y_k^{i_2} l_k^{i_2})\ldots(\Sigma y_k^{i_s} l_k^{i_s})\,d\theta = \int_0^{\pi}[\mathrm{L}_n(f)]^{\beta_1}(\Sigma y_k^2 l_k^2)^{\beta_2}\ldots(\Sigma y_k^{2r} l_k^{2r})^{\beta_{2r}}\,d\theta,$$

où β_1 est le nombre des α_k qui sont égaux à 1, β_2 le nombre de ceux qui sont égaux à 2, et ainsi de suite. Cette expression est bornée pour $n\to\infty$, parce que, d'après (4), $\int_0^{\pi}|\mathrm{L}_n(f)|^{\beta_1}\,d\theta$ est borné, et il en est de même pour toutes les sommes qui figurent au second membre de (5) [1]. En développant le premier membre, on trouve le terme général de I_n et des termes dans lesquels l'indice s est diminué. Ces derniers, en vertu de l'induction, sont bornés, d'où la même conclusion pour le terme général de I_n. Le dernier terme, en effet, du développement de (5) correspond au cas où tous les α_k sont égaux à 1, et contient le facteur $\int_0^{\pi} l_{i_1} l_{i_2}\ldots l_{i_{2r}}\,d\theta$ qui est nul par suite de l'orthogonalité (démontrée dans la Note citée).

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Les théorèmes d'addition des fonctions de Legendre*. Note de M. **René Lagrange**, présentée par M. Émile Borel.

Les théorèmes d'addition des fonctions de Legendre, dans les énoncés ultimes qu'en a donnés Hobson [2], malgré la précision supplémentaire

---

[1] $\Sigma l_k^2 < 2$, $|\Sigma l_k^3| < 2\sqrt{2}$, ..., $|\Sigma l_k^m| < \mathrm{C}$ (C, constante indépendante de n).

[2] Cf. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*, p. 360-384 (*Cambridge University Press*, 1931).

apportée aux énoncés successifs de Legendre, Heine, K. Neumann, Whittaker et Watson, n'ont pas toute la portée dont ils sont susceptibles, puisqu'ils expriment le développement de $P_n(z)$ et $Q_n(z)$, où

$$z = bb' + \sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}\cos\omega,$$

en fonction des P_n^m et Q_n^m d'argument b et b', et du paramètre essentiellement réel ω. En outre l'extension apportée par Hobson à ses prédécesseurs fut obtenue grâce à une discussion approfondie relativement compliquée. Voici un procédé de démonstration qui joint, à l'avantage de la simplicité, celui de supprimer, en ce qui concerne ω, une restriction *a priori* arficielle. J'ai montré (1) que, si $P(t) \equiv at^2 + 2bt + c$, $Q(t) \equiv a't^2 + 2b't + c'$, avec $b^2 - ac = b'^2 - a'c' = 1$, $\tau_1 = -b + 1/a$, $\tau_2 = -b - 1/a$, $\sigma_1 = -b' + 1/a'$, $\sigma_2 = -b' - 1/a'$, $ac' + ca' - 2bb' = -2z$, les expressions

$$(1)\quad J_n^m(z) = \frac{\Gamma(-m-n)}{\Gamma(-n)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{m}{2}} P_n^m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^n \frac{dR(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)}{R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^{m+1}},$$

où Γ est un contour simple décrit par t dans un sens qui soit direct pour τ_1, σ_1 et inverse pour τ_2, σ_2, sont les coefficients du développement de Laurent

$$(2)\qquad \left[\frac{Q(t)}{P(t)}\right]^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n^m(z) R(t, \sigma_2, \tau_1, \tau_2)^m;$$

celui-ci est valable dans la couronne limitée par les deux cercles passant par σ_1 ou σ_2 et conjugués par rapport à τ_1 et τ_2, et le fait que Γ doit pouvoir être choisi dans cette couronne exige en outre $\mathcal{R}(z) > 0$. Ces égalités supposent un choix convenable de l'argument de $Q(t)/P(t)$.

Ceci rappelé, posons $a = \sqrt{b^2 - 1}\,e^{-v}$, $c = \sqrt{b^2 - 1}\,e^{v}$, $a' = -\sqrt{b'^2 - 1}\,e^{-v'}$, $c' = -\sqrt{b'^2 - 1}\,e^{-v'}$, de sorte que $z = bb' + \sqrt{b^2 - 1}\sqrt{b'^2 - 1}\operatorname{ch}(v' - v)$ et

$$\tau_1 = -\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,e^{v}, \qquad \tau_2 = -\sqrt{\frac{b+1}{b-1}}\,e^{v}, \qquad \sigma_1 = \sqrt{\frac{b'-1}{b'+1}}\,e^{v'}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{b'+1}{b'+1}}\,e^{v'};$$

b et b' sont eux-mêmes les valeurs de z correspondant aux couples de polynomes $P(t)$, $2t$ et $Q(t)$, $2t$, les zéros de $2t$ étant 0 et ∞. On a alors

$$(4)\qquad P_n(z) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{Q(t)^n\,dt}{P(t)^{n+1}} = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{Q(t)^n}{(2t)^{n+1}}\left[\frac{P(t)}{2t}\right]^{-n-1} dt$$

---

(1) Cf. René Lagrange, *Journ. de Math.*, 6, 1927, p. 165.