

KÜLÖNLENYOMAT

# MATEMATIKAI LAPOK

XV. ÉVFOLYAM 1—3. SZÁMÁBÓL

Katona Gyula—Nemetz Tibor—Simonovits Miklós

Újabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és  
megjegyzések bizonyos általánosításaira

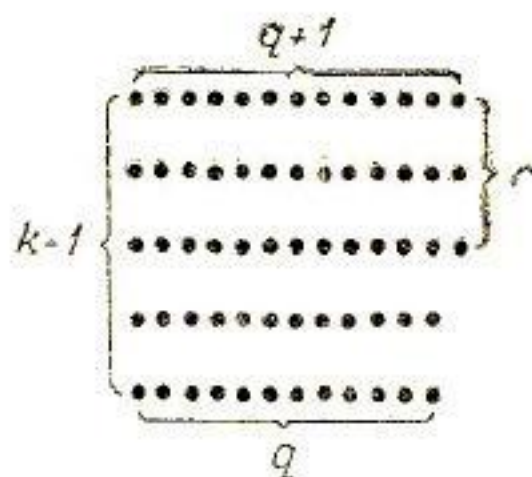
BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT  
BUDAPEST, 1964

## Ujabb bizonyítás a Turán-féle gráftételre és megjegyzések bizonyos általánosításaira

KATONA GYULA—NEMETZ TIBOR—SIMONOVITS MIKLÓS

1. Turán Pál 1941-ben a következő tételt bizonyította be: [1] Legyen  $n = q(k-1) + r$ , ahol  $q$ ,  $k$  és  $r$  egész számok, továbbá  $0 \leq r < k-1$ . Jelöljön  $G_E^n$  egy  $n$  szögpontú,  $E$  élű gráfot. Ha teljesül, hogy  $E > E_0(n, k) = \frac{k-2}{2(k-1)}(n^2 - r^2) + \binom{r}{2}$ , akkor a  $G_E^n$  gráf tartalmaz  $k$  szögpontú teljes részgráfot. (Ezt a következőkben teljes  $k$ -asnak fogjuk nevezni.) Azaz: a  $G_E^n$  gráfnak létezik olyan  $k$  szögpontja, amelyek közül bármely kettőt összekötő él a gráfhoz tartozik.

Bizonyította továbbá, hogy van és csak egy olyan  $E_0$  élű gráf van, amelyben nincs teljes  $k$ -as, és ez a következő:



1. ábra

Soroljuk az  $n$  szögpontot  $k-1$  osztályba úgy, hogy  $r$  osztályba  $q+1$ , a többibe  $q$  pont jusson. Szerepeljenek a gráfban azok és csak azok az élek, amelyek különböző osztálybeli pontokat kötnek össze. Az így értelmezett  $T_{E_0}^n$  gráfnak, mint az könnyen belátható,  $E_0$  éle van, és nincs benne teljes  $k$ -as, ami azt jelenti, hogy  $E_0+1$ -nél kevesebb számú él még nem biztosítja egy teljes  $k$ -as létezését.

Turán [2]-ben a következő problémát veti fel: Vezessünk be egy általánosabb gráffogalmat. Ha adott  $n$  pont és a pontok összekötése

(pontpárok kiválasztása, élek megadása) helyett pont  $m$ -eseket választunk ki valamilyen módon,  $m$ -es gráfhoz jutunk. Ennek tehát speciális esete a kettes, ill. élgráf. Egy  $m$ -es gráfban „teljes  $k$ -as” alatt olyan részgráfot értünk, melynek bármely  $m$ -ese a kiválasztottak között van. Ekkor a fenti tételnek megfelelő probléma így fogalmazható:

Legyen adott egy  $n$  szögpontú gráf. Legalább hány  $m$ -est kell kiválasztani, hogy akárhogyan is választjuk ki azokat, biztosan legyen az  $m$ -es gráfban „teljes  $k$ -as”\*. Ez még megoldatlan probléma, csak sejtések vannak rá. Legegyszerűbbnek látszik a probléma  $m=3, k=4$ -re. Ezt megoldani próbálva jutottunk el az eredeti Turán-tétel újabb két bizonyításához, amelyek a 2. fejezetben szerepelnek. Az ezekben alkalmazott módszerek bizonyos becslésekre adnak lehetőséget az általános esetben, ezt adjuk meg a 3. fejezetben. Ezek  $m=3, k=4$  esetén aránylag jók, ezzel az esettel külön foglalkozunk a 4. fejezetben.

Megemlítjük, hogy az eredeti bizonyításon kívül ismeretes még egy Zykovtól [3] és egy Andrásfay Bélától [4] származó bizonyítás is, sőt Dirac G. [5] egy újabb általánosabb tételéből is következik a tétel.

Mivel a komplementer gráfban (amely éppen azokat az  $m$ -eseket tartalmazza, amelyek az eredetiből hiányoznak) gondolatmeneteink egyszerűbben fogalmazhatóak meg, a problémát átfogalmazzuk a komplementergráfra. (Ilyen alakban áll a probléma Turán idézett dolgozatában is.)

Egy  $n$  szögpontú gráfban legalább hány  $m$ -est kell megadnunk, hogy ne legyen benne „üres  $k$ -as”? („Üres  $k$ -as”-nak nevezzük a „teljes  $k$ -as” komplementerét, tehát egy olyan  $k$ -ast, amelynek egyetlen  $m$ -ese sincs a kiválasztottak között.) Ha egy gráfban nincs „teljes  $k$ -as”, akkor a komplementerben nincs „üres  $k$ -as”, ha az eredeti gráfban legfeljebb  $E_0(n, k, m)$   $m$ -es lehetett, hogy ne legyen „teljes  $k$ -as”, a komplementerben legalább  $M_k^m(n) = \binom{n}{m} - E_0(n, k, m)$ -es szükséges, hogy ne legyen „üres  $k$ -as”. A továbbiakban használni fogjuk még az  $M_k = M_k^2(n)$  jelölést.

Rátérve a komplementer gráfokra, Turán tétele a következőt jelenti:

Legyen  $K_{M_k}^n$  a Turán-féle  $T_{E_0}^n$  extrém gráf komplementere, azaz  $K_{M_k}^n$  az az  $n$  szögpontú gráf, melynek szögpontjai a lehető legegyszerűsebben vannak  $k-1$  osztályba sorolva, tehát minden osztályban  $q$ , ill.  $q+1$  pont van (reguláris gráf esetén  $q+1$ ) és a pontok között azok és csak azok lesznek összekötve, melyek egy osztályba tartoznak. (Ebben nincs „üres  $k$ -as”, mert  $k$  kiválasztott pont között mindig van

\* Vagy másképp legfeljebb hány  $m$ -est lehet kiválasztani, hogy a gráfban ne legyen „teljes  $k$ -as”?

olyan kettő, melyek egy osztályba tartoznak, így éllel vannak összekötve.) *Ha egy  $G^n$   $n$  szögpontú gráfban nincs „üres  $k$ -as”, akkor vagy több él van benne, mint  $K_{M_k}^n$ -ban, vagy izomorf azzal.*

(Vagyis  $K_{M_k}^n$ -ben fogtuk le a lehető legkevesebb éllel az összes  $k$ -ast. A tételben az extrém gráf unicitása is szerepel.)

## 2. I. Bizonyítás Turán tételére.

Ebben a bizonyításban módosítsuk  $q$  és  $r$  értelmezését úgy, hogy  $n = q(k-1+r)$  legyen, ahol  $0 < r \leq k-1$ . ( $E_0(n, k)$  kifejezése  $q$  és  $r$ -el, mint könnyen verifikálható, így sem változik.) Ezzel a jelöléssel mindig van olyan osztály, amelyben  $q+1$  pont van, és  $r = k-1$  esetén minden osztály ilyen.

A bizonyítás  $n-1$ -ről  $n$ -re való teljes indukcióval történik. Ha  $n < k$ , az állítás triviális,  $K_{M_k}^n$  az üres gráf.

Tegyük fel, hogy az állítás az  $n-1$  szögpontú gráfokra igaz. Legyen adott egy  $G^n$   $n$  szögpontú gráf. Elég csak azt az esetet vizsgálni, mikor  $G^n$  élszáma nem nagyobb  $K_{M_k}^n$ -énál. Ekkor azt kell bizonyítani, hogy

a) ha  $G^n$  élszáma is  $M_k$  és nincs  $G^n$ -ben „üres  $k$ -as”, úgy  $G^n$  és  $K_{M_k}^n$  izomorfak,

b) ha  $G^n$  élszáma kisebb, mint  $M_k$ , akkor tartalmaz „üres  $k$ -ast”.

a) *bizonyítása:* Látható, hogy  $K_{M_k}^n$ -ban egy pont foka  $q$  vagy  $q-1$ , aszerint, hogy a pont egy  $q+1$  vagy egy  $q$  pontot tartalmazó osztályban van, és így  $K_{M_k}^n$ -ban a maximális fokszám  $q$ . (Az egy pontból kiinduló élek számának maximuma.)

Könnyen belátható, hogy  $G^n$ -ben is  $q$  a maximális fokszám. Ugyanis nem lehet minden pont legfeljebb  $q-1$ -edfokú, mert ekkor fokszámösszege, azaz a kétszeres élszáma kisebb lenne  $2M_k$ -nál, tehát  $G^n$  élszáma is  $K_{M_k}^n$  élszámánál. De  $G^n$  egyetlen pontja sem lehet  $q$ -nál magasabb fokú, mert azt a pontot elhagyva egy  $G^{n-1}$ -hez jutnánk, míg  $K^n$ -ből elhagyva egy  $q$ -adfokút, éppen  $K^{n-1}$ -hez jutunk. Azonban  $G^{n-1}$ -nek kevesebb éle lenne, mint  $K^{n-1}$ -nek, így az indukciós feltétel miatt tartalmazna „üres  $k$ -ast”. Ez  $G^n$ -ben is üres volna, ami ellentmond feltevésünknek. Így  $G^n$ -ben is a maximális fokú pont éppen  $q$ -ad fokú. Jelöljön  $P$  egy maximális fokú pontot. Ezt elhagyva, a kapott  $G^{n-1}$ -ben sem lehet az előbbiek szerint „üres  $k$ -as”, s ugyanannyi éle van, mint  $K^{n-1}$ -nek, így izomorfok az indukciós feltevés miatt.  $G^n$ -et úgy kapjuk tehát  $K^{n-1}$ -ből, hogy ennek  $q$  pontját összekötjük a  $P$  ponttal. Ha  $K^{n-1}$ -ben a  $k-1$  osztály mindegyikében volna olyan pont, mely nincs összekötve  $P$ -vel, úgy minden osztályból egy ilyen pontot kiválasztva, ezen  $k-1$  pont  $P$ -vel egy „üres  $k$ -ast” alkotna. Mivel ez nem lehet, kell lennie egy osztálynak, melynek minden pontjából fut  $P$ -be él. Ezen osztály  $q$  pontot tartalmaz, mivel  $P$   $q$ -adfokú volt (egy osztály  $K^{n-1}$ -ben  $q$  vagy  $q+1$  pontot tartalmaz). Ezért  $P$ -ből egy  $q$  pontot tartalmazó osztály minden pontjához fut él és máshova már nem is

futhat él. Ebből következik, hogy  $G^n$  izomorf  $K_{M_k}^n$ -nel, mert egyformán keletkeznek  $K^{n-1}$ -ből.

A b) eset ebből egyszerűen következik. Húzzunk be annyi újabb élt  $G^n$ -be, hogy ugyanannyi éle legyen, mint  $K^n$ -nek. Ha a kapott gráf nem izomorf  $K^n$ -nel, akkor a)-ból következik, hogy az új kibővített gráf tartalmaz üres  $k$ -ast, ezt tehát annál inkább tartalmazni kellett  $G^n$ -nek. Ha a kibővített gráf izomorf  $K^n$ -nel, úgy  $G^n$  azért tartalmaz „üres  $k$ -ast”, mert  $K^n$ -ből akárhogy is hagyunk el éleket, lesz „üres  $k$ -asa”: egyik elhagyott él két végpontja, s a többi osztály egy-egy pontja. (Megjegyezzük, hogy az első típusú bővítés csak  $k=n$  esetén nem lehetséges mindig.)

*II. Bizonyítás.* Legyen  $M_k(n)$  a legkisebb szám, amelyhez létezik  $G_{M_k(n)}^n$ , melyben nincs „üres  $k$ -as”.

Legyen  $D_k(n) = \binom{n}{2} - E_0(n, k) = \binom{q}{2}(k-1-r) + \binom{q+1}{2} \cdot r$ , ahol  $n = q(k-1) + r$  és  $0 \leq r \leq k-2$ .

Bizonyítani kell, hogy  $M_k(n) = D_k(n)$ , amit  $n$ -ről  $n+1$ -re való teljes indukcióval igazolunk.

Az állítás  $n \leq k$  esetén triviálisan teljesül.

Tegyük fel, hogy  $n$ -re igazoltuk. Tekintsünk egy  $G^{n+1}$  gráfot, amelynek  $M_k(n+1)$  éle van, s nincs benne üres  $k$ -as. Minden élhez rendeljünk egy multiplicitást, azt a számot, ahány  $n$ -szögpontú részgráfjában van  $G^{n+1}$ -nek. A multiplicitások összege egyrészt  $(n-1)M_k(n+1)$ , másrészt az  $n+1$  darab  $n$  szögpontú részgráf éleinek összege. Mivel az  $n$  szögpontú részgráfok egyikében sincs „üres  $k$ -as,” ezért ezek mindegyikében az indukciós feltevés miatt legalább  $M_k(n)$  él van, így

$$(n+1)M_k(n) \leq M_k(n+1) \cdot (n-1)$$

vagyis

$$M_k(n+1) \leq \left\{ M_k(n) \cdot \frac{n+1}{n-1} \right\},$$

ahol  $\{x\}$  a legkisebb  $x$ -nél nem kisebb egész szám. Nyilván

$$\left\{ M_k(n) \frac{n+1}{n-1} \right\} = M_k(n) + \left\{ \frac{2M_k(n)}{n-1} \right\}.$$

Mivel, mint könnyen igazolható,  $D_k(n+1) = D_k(n) + q$  azt kell csak kimutatni, hogy

$$q-1 < \frac{2M_k(n)}{n-1} \leq q$$

$M_k(n)$  indukciós feltétel szerinti értékét behelyettesítve azt kell tehát belátni, hogy

$$q - 1 < \frac{q(q-1)(k-1-r) + q(q+1) \cdot r}{q(k-1) + r - 1} \leq q.$$

Átalakítva

$$\frac{q-1}{q} < 1 - \frac{k-r-2}{q(k-1) + r - 1} \leq 1,$$

ahol a jobboldali egyenlőség nyilvánvalóan fennáll, mivel  $r \leq k-2$ , tehát a tört értéke nem negatív.

A baloldali egyenlőtlenséget átalakítva:

$$\frac{k-r-2}{q(k-1) + r - 1} < \frac{1}{q},$$

azaz

$$q(k-1) - qr - q < q(k-1) + r - 1.$$

Ez viszont teljesül, ha  $q > 1$ , vagy  $q = 1$  és  $r > 0$ . Ezzel beláttuk, hogy  $M_k(n+1) \cong M_k(n) + q = D_k(n+1)$ . Hogy valóban annyi, mint a tétel állítja (azaz  $M_k(n+1) = D_k(n+1)$ ), azt az bizonyítja, hogy a fentiekben értelmezett  $K_{M_k}^{n+1}$  gráfban nincs üres  $k$ -as és éppen  $M_k(n+1)$  éle van.

3. Mindkét gondolatmenetből következik általában is a következő

1. TÉTEL:

$$M_k^m(n+1) \cdot (n+1-m) \cong M_k^m(n) \cdot (n+1).$$

Például a második bizonyítás alapján ez a következőképpen adódik: tekintsük  $n+1$ -re az extrém gráfot, amelyben tehát  $M_k^m(n+1)$  darab  $m$ -es van. Ha az  $n+1$  darab  $n$  szögpontú részgráfban összeszámoljuk, hogy hány  $m$ -es van és összeadjuk, akkor  $(n+1) \cdot M_k^m(n)$ -nél nem kaphatunk kevesebbet. Másrészt viszont, mivel minden  $m$ -es  $(n+1-m)$  ilyen részgráfban van benne, tehát éppen  $(n+1-m) M_k^m(n+1)$ -et kapunk, ami a tétel helyességét jelenti. Ebből a tételből következik az

1. KOROLLÁRIUM: a „minden  $k$ -as lefogásához” szükséges és az összes  $m$ -esek számának hányadosa  $n$ -nel monoton nő (azaz viszonylag egyre több kell).

$$\begin{aligned} \frac{M_k^m(n+1)}{\binom{n+1}{m}} &= \frac{M_k^m(n+1) \cdot (n+1-m)}{\binom{n+1}{m} (n+1-m)} \cong \\ &\cong \frac{M_k^m(n)}{\binom{n+1}{m} \cdot \frac{n+1-m}{n+1}} = \frac{M_k^m(n)}{\binom{n}{m}}. \end{aligned}$$

Innen adódik a

2. KOROLLÁRIUM:

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{k}{m}} \cong M_k^m(n) \cong \frac{\binom{n}{m}}{\left[\frac{k-1}{m-1}\right]^{m-1}}.$$

Ugyanis

$$M_k^m(k) = 1 \quad \text{így} \quad \frac{M_k^m(n)}{\binom{n}{m}} \cong \frac{1}{\binom{k}{m}}.$$

A felső becslést megkapandó pedig Turán által sejtett gráfot tekintsük. (Ha a pontokat  $\left[\frac{k-1}{m-1}\right]$  osztályba soroljuk\* a lehető legegyszerűbben és az  $m$ -es gráf tartalmazza az egy osztályba eső  $m$ -eseket, és csak ezeket, így egy „üres  $k$ -ast” nem tartalmazó gráfhoz jutunk.)

4. Külön foglalkozunk az  $m=3, k=4$  esettel. Többen sejtették, hogy a legkevesebb háromszöget tartalmazó gráf, amelyben nincs üres 4-es, a következő: Soroljuk a szögpontokat 3 osztályba a lehető legegyszerűbben és a gráf hármasai (következőkben háromszögei) legyenek azok a háromszögek, melyeknek minden pontja egy osztályban van, vagy két pontja van az első osztályban, egy pontja a másodikban, vagy két pontja a másodikban és egy pontja a harmadikban, vagy két pontja a harmadikban és egy az első osztályban van. Jelöljük  $H^n$ -nel az így kapott hármass rendszert. Könnyen látható, hogy ez a gráf kielégíti a követelményeket; nincs benne „üres 4-es”.

*Bizonyítjuk, hogy ha  $n \neq 3s$ , akkor van más gráf is, mint  $H^n$ , melyben ugyanennyi háromszög mellett nincs üres négyes.* Ha  $n = 3s + 1$ , ill.  $n = 3s + 2$ , végezzük el az előbbi osztálybasorolást úgy, hogy az első, ill. az első két osztályba  $s + 1$  pont jusson. Az első osztályból annak egy  $P$  pontját elhagyva legyenek a kiválasztott háromszögek ugyanazok, mint  $H^{n-1}$ -ben, azaz az összes olyan háromszög legyen kiválasztva, melynek minden pontja egy osztályban van, vagy kettő egyben, s egy a rákövetkezőben a megfelelő ciklus szerint. Azokat a további háromszögeket, melyek tartalmazni fogják a kiválasztott  $P$  pontot, jellemezhetjük a másik két pont által alkotott élel. Ha a  $H^n$ -et akarjuk megkapni, akkor össze kell kötni azokat a pontpárokat, melyek az első

\* Ha ezzel az összes pontot egy osztályba soroltuk, állításunk semmitmondóvá fajul.

ill. a harmadik osztályban vannak, vagy az egyik pontjuk az első, másik a második osztályban van. (Természetesen most  $P$ -t nem számítjuk az első osztályba.) Vegyük ehelyett a  $P$ -t tartalmazó háromszögeket meghatározó élek egy kité módosított rendszerét. (L. 2 ábra) Legyen  $Q$  egy második osztályba eső pont. Ez az első osztály  $s$  pontjával volt összekötve, ehelyett most összekötjük a harmadik osztály  $s$  pontjával. Az élek, így tehát a háromszögek száma nem változott. Belátjuk, hogy minden négyesben van így is háromszög. (Tehát minden négyesnek legalább egy hármasa a kiválasztottak között szerepel.) Nyilván elég ezt csak olyan négyesekre belátni, amelyekben  $P$  és  $Q$  szerepel, ugyanis csak olyan háromszögek keletkeztek vagy tűntek el, melyek  $P$ -t és  $Q$ -t tartalmazták. Vizsgáljunk tehát egy  $PQAB$  négyest. Ha az  $A, B$  pontok közül az egyik, pl.  $A$  a harmadik osztályban van, akkor a négyesből a  $PQA$  háromszög szerepelni fog (ui. az  $AQ$  él szerepel). Ugyanígy nem lesz üres a négyes, ha az  $A, B$  pontok közül az egyik az első, a másik az első vagy a második osztályban van. Marad az az eset, amikor mind a kettő a második osztályban van. Ekkor viszont  $Q$ -val egy osztályba esnek, így már a  $P$  elhagyásával kapott gráfban is szerepel az  $ABQ$  háromszög. Ha  $s = 0, 1$ , úgy nem jutunk új gráfhoz,  $s \geq 2$  esetén azonban igen.



2. ábra

Belátjuk, hogy az így értelmezett  $L^n$  gráf valóban különbözik  $H^n$ -től  $s \geq 2$ -re. Itt is akkor mondunk egy pontot  $k$ -adfokúnak, ha éppen  $k$  szereplő háromszög szögpontja.

a)  $n = 3s + 1$ . A  $P$  pont elhagyásával keletkező részgráf minden pontja egyenlő fokszámú. Legyen a közös fokszám  $k$ . Ekkor  $P$  hozzávétele után az első osztály pontjai  $k + 2s - 1$ , a másodiké  $k + s$ , a harmadiké  $k + s - 1$  fokúak lesznek, mert  $2s - 1, s, s - 1$  él fut ki belőlük.  $L^n$ -ben  $k + 2s - 2, k + s, k + s$  lesz a fokszám,  $P$ -é azonban  $k + 2s - 1$  marad. Ha  $s \geq 2, k + 2s - 1$  nagyobb  $k + s$ -nél is, legalább három ilyen fokú pontunk volt és csak egy maradt, vagyis a két gráf valóban különböző.

b)  $n = 3s + 2$ . Most annak a  $H^{n+1}$  gráfnak jelöljük  $k$ -val pontjai fokszámát, melyből egy pont elhagyásával kapjuk  $H^n$ -et. Ekkor az egyes osztályokban  $k - s, k - s$ , ill.  $k - 2s$  pont lesz. Átrendezés után  $P$  fokszáma marad, a többire  $k - s - 1, k - s, k - 2s + 1$  lesz a fokszám. Ha  $s \geq 2, H^n$ -ben nincs  $k - 2s + 1$  fokú pont. Így ekkor is különböző



$H^n$  és  $L^n$ . Megjegyezzük, hogy a leszámolásnál is kihasználtuk már lényegesen  $s \cong 2$  kikötést.

5. A  $H^n$  gráf felső becslést ad az extrém gráf háromszögszámára, amiből csak

$$\frac{M_4^3(n)}{\binom{n}{3}} \cong \frac{4}{9}$$

-et emeljük ki.

Most alsó becslést adunk erre.\* Tudjuk, hogy  $\frac{M_k^m(n)}{\binom{n}{3}}$  monoton növő sorozat, korlátos, tehát konvergens, így ha elég nagy értékre ismerjük az értékét, az egyre pontosabb becslést szolgáltat.

*Tétel:*  $M_4^3(n) \cong \frac{5}{14} \binom{n}{3}$ , hacsak  $n \cong 8$

$$M_4^3(4) = 1, \quad M_4^3(5) = 3, \quad M_4^3(6) = 6, \quad M_4^3(7) = 12, \quad M_4^3(8) = 20, \\ M_4^3(9) = 30.$$

a) Ha  $n=4$ , a sejtés helyes, az extrém gráf egyértelmű. Minthogy  $M_k^m(n) \cong M_k^m(n-1) \cdot \frac{n}{n-3}$ , így  $n=5$ -re legalább  $\frac{5}{2}$  azaz 3 háromszög kell. Így a sejtés ekkor pontos,  $M^5$  háromszögeinek száma 3, és ez az egyetlen 3 háromszöges, a követelményeket kielégítő gráf.

b)  $n=6$ .  $M_4^3(5)=3$ -ból következik, hogy ha  $n=6$ , legalább 6 háromszög kell, tehát annyi, mint  $H^6$ -ben. Ez az első érték, melyre nem triviális, hogy a sejtett  $H^6$  gráf az egyetlen jó. Tegyük fel, hogy  $K^6$  is egy extrém gráf. Ekkor semmilyen részgráfjában sem lehet üres négyszög. Ha egy pontot és az ezt tartalmazó háromszögeket elhagyjuk, legalább 3 háromszög marad, kell, hogy  $M_4^3(5)=3$  miatt minden pontja legfeljebb 3-adfokú legyen. Mivel a fokszámösszeg 18, és minden pont legfeljebb 3-adfokú, így kell, hogy pontosan harmadfokú legyen. Ha két pontot hagyok el, marad legalább egy háromszög, így van a két ponthoz, s innen bármely két ponthoz olyan a gráfban szereplő háromszög, amelyben mind a két pont szerepel. Nevezzük  $k$ -szoros élnek a pontpárt, ha a két ponthoz van  $k$  darab háromszög, melynek ezek pontjai. Előzőek szerint minden él legalább egyszeres. Továbbá minden pontból 3 háromszög indul ki, így a pontból kiinduló élek multiplicitásösszege 6, azaz éppen egy ponthoz fut kétszeres él, a többihez legalább egyszeres (minden

\* Megemlítjük, hogy Bollobás Béla egyik diákköri pályázatra írt cikkében szintén alsó becslést adott erre, de a miénknél rosszabbat.

él legalább egyszeres!) Ha két pont között kétszeres él fut, ez szimmetrikus rájuk nézve, azaz így két-két pontot rendeltünk egymáshoz, 3 pontpárt kaptunk. Egy osztályt éppen az ilyen módon egymáshoz rendelt két-két pont alkot.

Feltehető, hogy az első élre támaszkodó háromszög harmadik csúcsa éppen a második él pontja, ekkor a második élről kifutó két háromszög egyike sem futhat az első él felé, ha ui. futna, könnyen látható, hogy volna az előbbivel közös éle, tehát egy negyedik kétszeres él. Így a második élről a harmadik él egy pontjához fut háromszög, erről az élről az elsőre, onnan a másodikra: ez a ciklus éppen, s ezzel gráf egyértelműségét bizonyítottuk, hiszen  $H^6$  is ilyen.

c) Ha  $n=7$ , legalább  $M_4^3(6) \cdot \frac{7}{4} = \frac{42}{4}$  azaz 11 háromszög kell.

Bebizonyítjuk, hogy ennyi nem elég. Ha 11 háromszög elég lenne, akkor 33 a fokszámszámösszeg, s nem lehet 6-odfokú pont, mert azt elhagyva 6 pontra csak 5 háromszög jutna. Így vagy egy harmadfokú pont van és a többi 5-ödfokú, vagy két 4-edfokú és a többi 5-ödfokú. Az első esetben elhagyunk egy 5-ödfokú pontot, és az azt tartalmazó háromszögeket, úgy, hogy olyan háromszöget is hagyjunk el, mely a 3-adfokút tartalmazza. Így a 3-adfokú pont másodfokú lesz, a 6 pontra ugyan 6 háromszög jut, de nem minden pont harmadfokú, így ismét tartalmaz egy üres négyest, s így az eredeti gráf is tartalmaz. Ha 2 negyedfokú van, s a többi 5-ödfokú, tegyük fel, hogy nincs benne üres négyes. Ekkor akármelyik 5-ödfokút is hagyjuk el, minden pont 3-adfokúvá kéne, hogy váljon. (Hisz csak úgy nem lenne a megmaradó 6 szögpontú gráfban üres négyes.) Így egy negyedfokú és egy ötödfokú pont közti él egyszeres lehet csak, hisz különben a negyedfokú pont 3-nál kisebb fokúvá válna. Mivel egy negyedfokúból 8 él fut ki, 5 az ötödfokúakhoz, tehát 3 a másik negyedfokúhoz (természetesen multiplicitással!), azaz 3-szoros él köti össze a két negyedfokút. Van olyan ötödfokú, melyhez nem fut erről az élről háromszög. Azt elhagyva 6-pontú 6 háromszögű részgráfhoz jutunk, melyben lesz háromszoros él, tehát nem lesz izomorf  $H^6$ -tal, azaz lesz benne üres négyes, ami ellentmond feltevésünknek.

Ha tehát  $n=7$ , legalább 12 háromszög kell.

Ha  $n=8$ , az 1. tétel miatt legalább 19, 2, azaz 20, ha  $n=9$ , legalább 30. Minthogy ezek az értékek éppen megegyeznek a  $H^7$ ,  $H^8$ ,  $H^9$  gráfok háromszögeinek számával, így  $M_4^3(7)=12$ ,  $M_4^3(8)=20$ ,  $M_4^3(9)=30$ . Ezt az eredményt az 1. következménnyel egybevetve, s figyelembe véve, hogy  $\binom{8}{3}=56$ , adódik, hogy  $n \geq 8$  esetén

$$M_4^3(n) \geq \frac{20}{56} \binom{n}{3} = \frac{5}{14} \binom{n}{3}.$$

Megjegyezzük, hogy a  $H^n$  háromszög-gráf háromszögeinek számát,  $H(n)$ -nel jelölve, a  $H(n)/\binom{n}{3}$  sorozat nem szigorúan monoton,  $3s-1$ -edik és  $3s$ -edik tagja megegyezik.

#### IRODALOM

- [1] TURÁN PÁL: Egy gráfelméleti szélsőértékfeladatról. Mat. Fiz. Lapok XLVIII 1941, p 436—452.  
 [2] TURÁN PÁL: Research problems. Publications of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sc. Vol. VI. ser A F. 3 (1961) p 417—423.  
 [3] А. А. ЗЫКОВ: О некоторых свойствах линейных комплексов. Мат. Сборник (Новая серия) Том 24 (66) N. 2. (1949) стр. 163—188.  
 [4] B. ANDRÁSFAL: Neuer Beweis eines graphen theoretischen Satzes von P. TURÁN. Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sc. Vol. VII. Ser. A. Fasc 1—2 p 193—196.  
 [5] G. DIRAC: Extensions of Turan's Theorem on graphs. Acta Math. Hung. XIV (1963) Fasc. 3—4. p 417—423.

#### ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ТУРАНА ИЗ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Г. Катона—Т. Немец—М. Шимонович

#### Резюме

Пусть

$$E_0 = \frac{k-2}{2(k-1)} (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$

В 1941 г. Туран доказал, что существует единственный граф с  $\binom{n}{2} - E_0$  ребрами такой, что для любой совокупности из  $k$  его вершин можно найти по крайней мере одно ребро графа соединяющее две из этих вершин. Авторы дают два доказательства этой теоремы.

Далее, они исследуют следующую задачу Турана: Обозначим через  $M_k^{(m)}(n)$  наименьшее число совокупностей  $m$  элементов, взятых из множества  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , состоящего из  $n$  элементов так, что любая совокупность  $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}$   $k$  элементов содержит по крайней мере одну совокупность  $m$  элементов нашей системы. Если  $m=2$ , тогда мы получим предыдущую теорему Турана. Если  $m>2$ , тогда определение величины  $M_k^{(m)}(n)$  кажется очень трудным. Авторы показывают что величина

$$M_k^{(m)}(n) / \binom{n}{m}$$

является монотонно возрастающей функцией от  $n$  и поэтому она стремится к пределу если  $n \rightarrow \infty$ . Далее,

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{k}{m}} \cong M_k^{(m)} \cong \frac{\binom{n}{m}}{\binom{k-1}{m-1}}$$

и также

$$\frac{5}{14} \binom{n}{3} \cong M_4^{(3)}(n) \cong \frac{4}{9} \binom{n}{3}.$$

## ON A GRAPH-PROBLEM OF TURÁN

G. KATONA-T. NEMETZ-M. SIMONOVITS

Put

$$E_0 = \frac{k-2}{2(k-1)} (n^2 - r^2) + \binom{r}{2}.$$

In 1941 Turán proved that there is a unique graph of  $\binom{n}{2} - E_0$  edges so that every  $k$ -tuple of its vertices spans at least one edge. The authors give two new proofs for this theorem.

Further they investigate the following problem of Turán: Denote by  $M_k^{(m)}(n)$  the smallest number of  $m$ -tuples formed from  $n$  elements  $x_1, \dots, x_n$  so that every  $k$ -tuple  $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$  should contain at least one  $m$ -tuple of our system. If  $m=2$  we obtain Turán's theorem stated above, for  $m>2$  the problem of determining  $M_k^{(m)}(n)$  seems very difficult. The authors show that

$$M_k^{(m)}(n) \binom{n}{m}$$

is a monotone increasing function of  $n$  and hence tends to a limit as  $n \rightarrow \infty$ . Further

$$\frac{\binom{n}{m}}{\binom{k}{m}} \cong M_k^m(n) \cong \frac{\binom{n}{m}}{\binom{k-1}{m-1}}$$

also

$$\frac{5}{14} \binom{m}{3} \cong M_4^{(3)}(n) \cong \frac{4}{9} \binom{m}{3}.$$