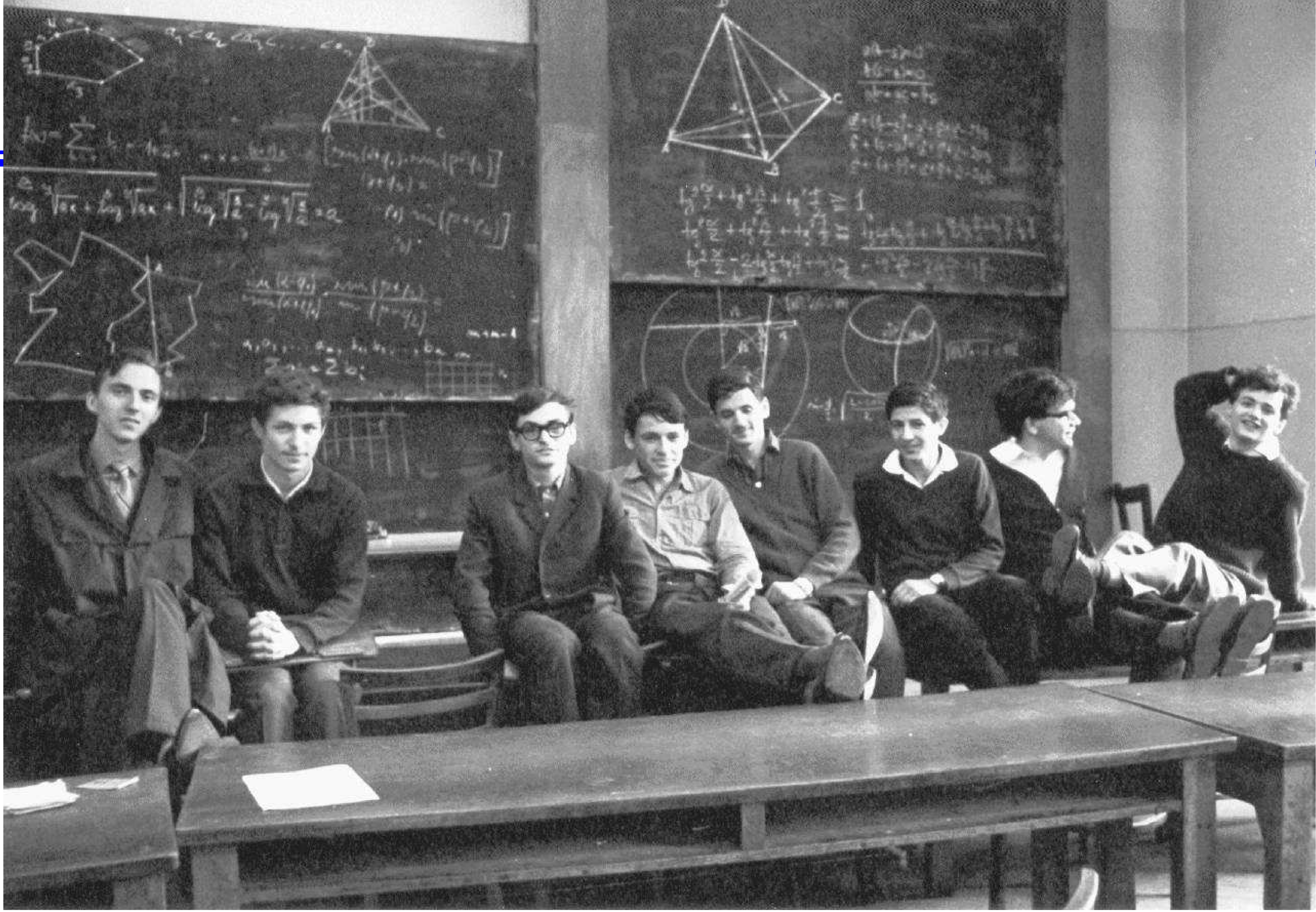
Elekes Gyuri és az illeszkedések

Simonovits M.

On the number of high multiplicity points for 1-parameter families of curves

György Elekes, **Miklós Simonovits** and Endre Szabó
Mathematical Institute of Eötvös University, Hungary
and Alfréd Rényi Mathematical Institute, Hungary
e-mail: `elekes@cs.elte.hu`, `miki@renyi.hu` and
`endre@renyi.hu`



Laborczi Zoltán, Szücs Andris, Csirmaz Laci, Elekes György, Babai Laci, Pintz János, Surányi Laci, Hoffman Kücsük

Hol találkoztunk?

Az egyetemen.
Az Analizis I tanszéken

Milyennek láttam Gyurit?

- Nagyon okos, gyors, világosfejű
- Nagyon határozott, talán kedvesen kemény?
- Nagyon kedves, nemcsak azért mert

mosolygós volt, hanem mert valóban kedves volt.

Gyuri és a matematika: "korai" hatások

- Hajnal hatása
- Erdős hatása
- Lovász hatása
  - a térfogat kiszámíthatatlansága

Gyuri és a matematika: az incidenciák

Fontos az alábbi **Szemerédi-Trotter** tétel incidenciákról:

1. Tétel. *(Szemerédi-Trotter) Létezik egy $c > 0$ konstans, melyre, akárhogy is adunk meg m pontot és n egyenest, legfeljebb*

$$cn^{2/3}m^{2/3} + c(n+m)$$

incidencia lehet közöttük.

Általánosítás: Pach-Sharir tétel

Legyen $\mathcal{P}$ egy n pontú halmaz, $\mathcal{C}$ m darab egyszerű görbe, ahol a görbék szabadsági foka k és multiplicitás típusuk s. Ekkor a közöttük fellépő incidenciaszám,

$$I(\mathcal{P},\mathcal{C}) < c(s,k)\left(n^{\frac{k}{2k-1}}m^{\frac{2k-2}{2k-1}} + n + m\right)$$

---

ahol

- k degrees of freedom = bármely k ponton át legfeljebb s görbe

---

és

- multiplicity type s

  = bármely két görbe legfeljebb s pontban metszi egymást.

Spencer-Szemerédi-Trotter, Pach-Sharir, Székely.

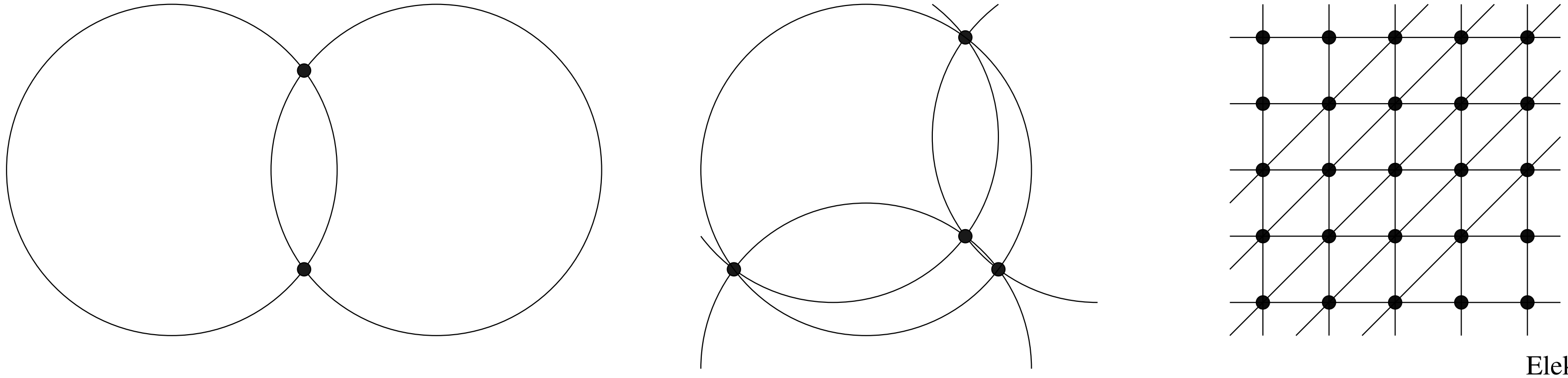
Hogyan különböztessük meg kombinatorikusan az egységköröket az egyenesektől?

(a) Hogyan tudjuk megkülönböztetni az egységköröket az egyenesektől kombinatorikusan?

(b) Lehet-e körök egy családjának kb. annyi háromszoros pontja, mint ugyanennyi egyenesnek?

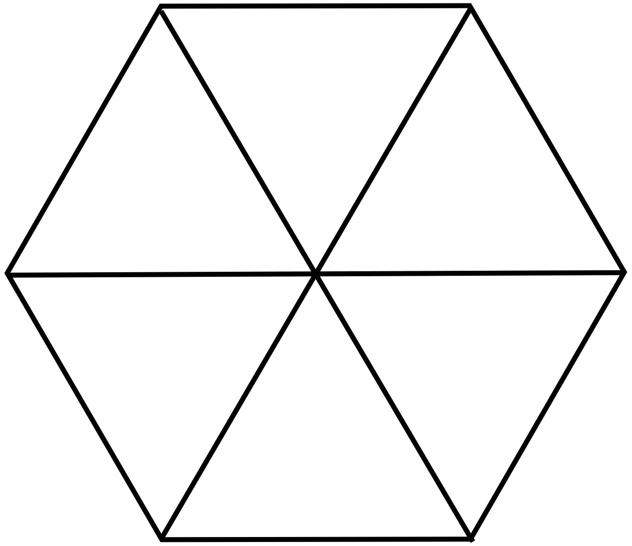
$\longrightarrow$ **IGEN**, mert „inverzióval” átvihetjük az egyeneseket körökbe

(c) De ha egységkörökre szorítkozunk? Lehet-e n egységkörnek kb olyan **sok háromszoros pontok** mint n egyenesnek?



Hogyan különböztessük meg

az egységköröket és az egyeneseket, **kombinatorikusan**?



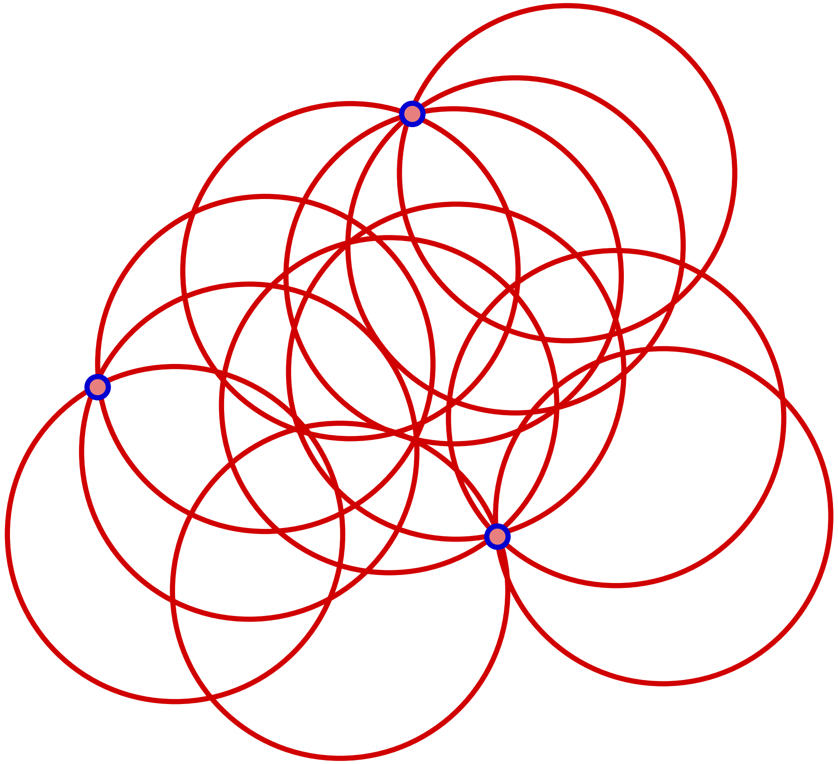
Kombinatorikusan = az incidencia mátrix alapján
= A metszet-tulajdonságok alapján.

Lehetséges-e, hogy ábráinkról csak hisszük, hogy egyeneseket, egyenesszakaszokat látunk rajtuk, de azok nagy fix sugarú körök, körívek?

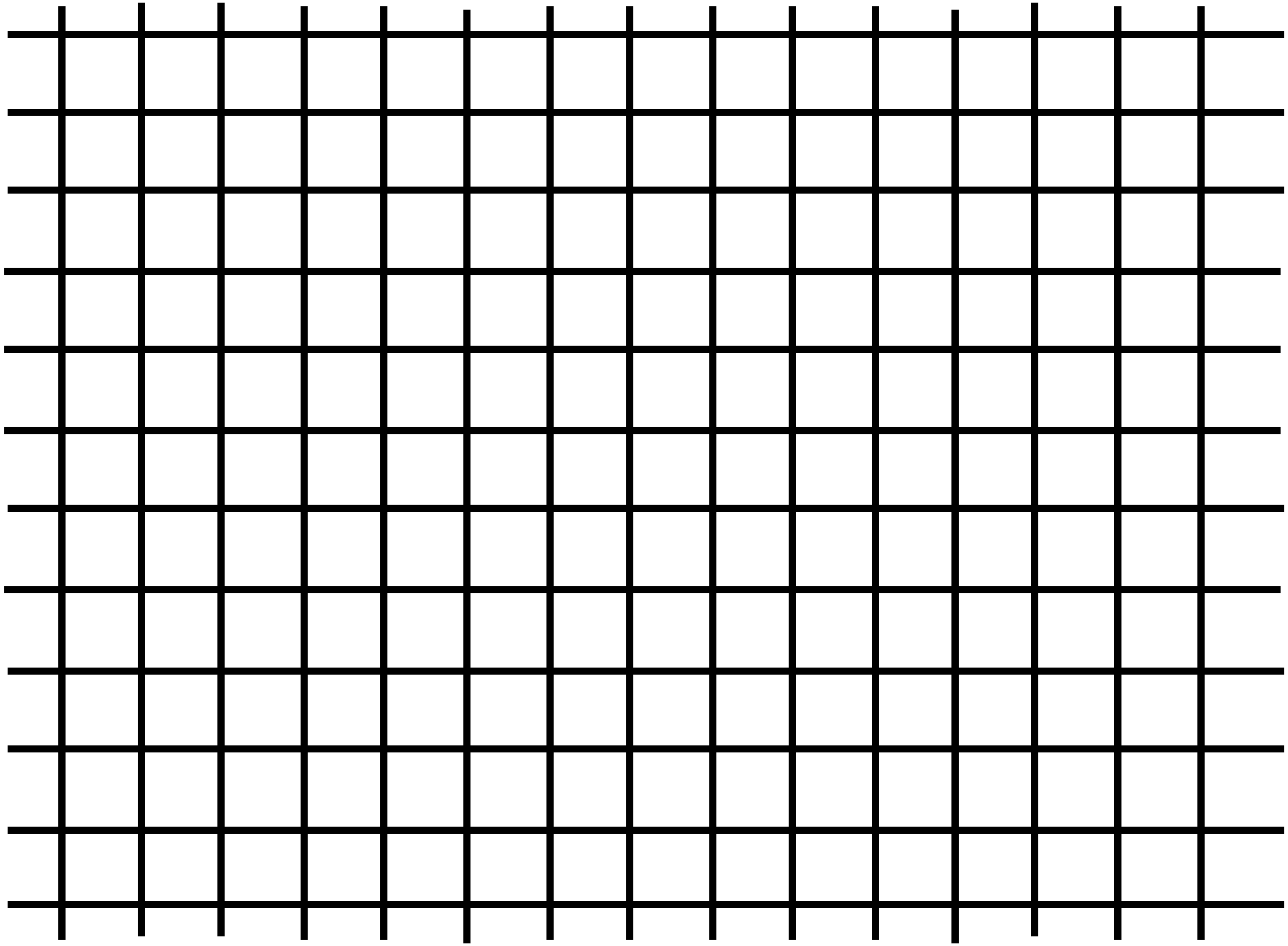
Tétel az egységkörökről, Elekes-Sim-Szabó

Van egy olyan $\eta > 0$ abszolut konstans, hogy

Ha rögzítünk 3 pontot a síkban: A, B, C-t, és a 3 pont mindegyikén keresztül n egységkört, akkor ezek legfeljebb $cn^{2-\eta}$ háromszoros pontot határoznak meg.

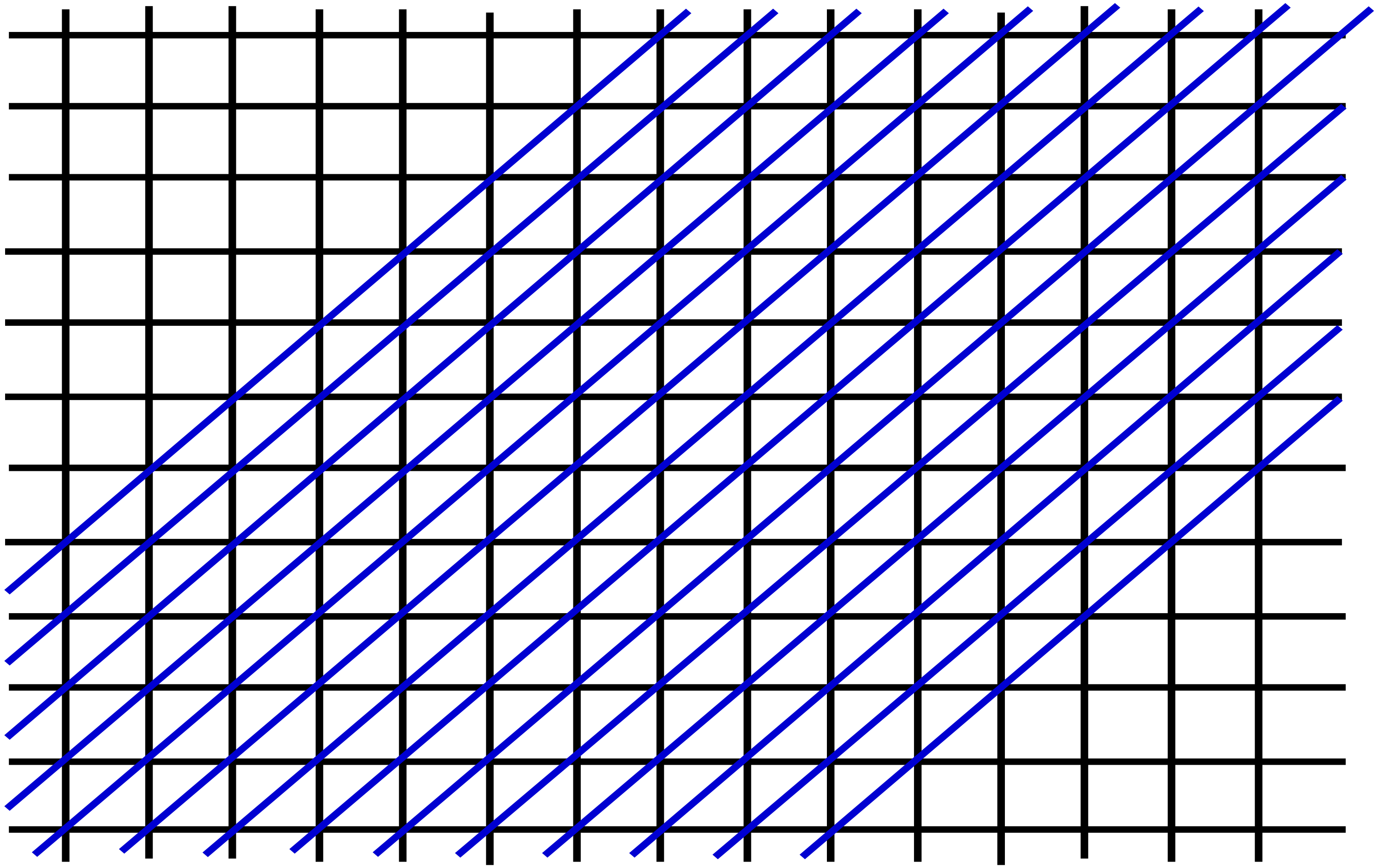


Az eredeti probléma



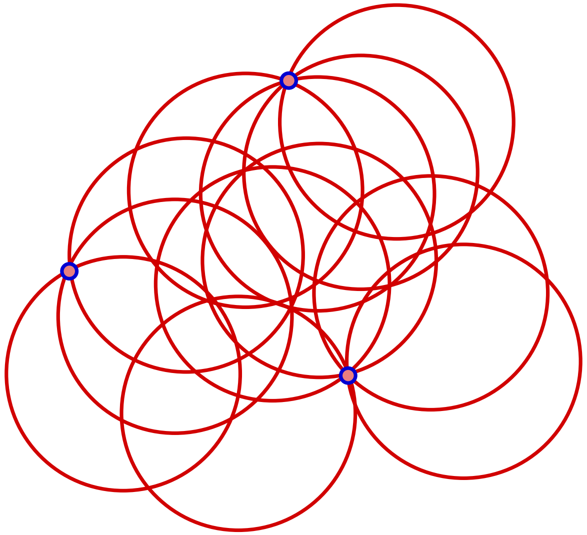
Kvadratikus metszetszám

Három görbesereg



Egyenesek esetén lehet **kvadratikus a 3-szoros pontok száma is**

Három körsereg



Tekintsünk 3 **egységkör-sereget**, 3 rögzitett ponton keresztül.

Ezen az ábrán nem látunk (?) háromszoros pontokat, (kivéve a 3 kiemelt pontot): a köröket véletlenszerűen választottuk
Kaphatunk-e $> cn^2$ háromszoros pontot?

NEM: csak $\leq n^{2-\eta}$ háromszoros pontot kaphatunk.

Van-e emögött egy általános tétel?

(a) Magasabb dimenzió?

Kérdés: Igaz-e hogy:
Ha $\mathbb{R}^d$-ben vannak s dimenziós felületeink, akkor a t-szeres pontok valamilyen értelemben kevesen vannak?

Kell valamilyen Nem-elfajulási feltétel:...

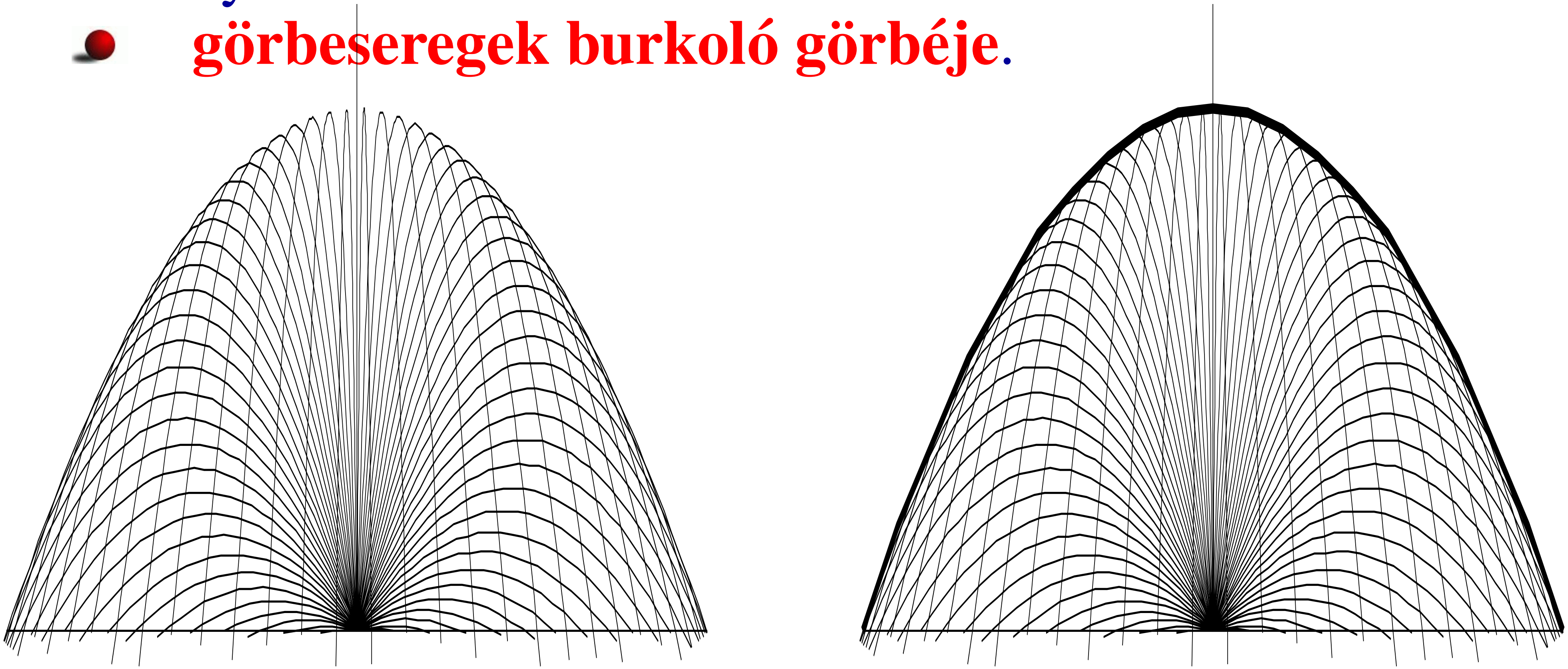
Szorítkozzunk $\mathbb{R}^2$-beli görbékre.

Gyakran az $\mathbb{R}^d$-beli kérdés vetítéssel redulálható by $\mathbb{R}^2$-re.

A burkoló görbe

Eredményünkben centrális a

- **görbeseregek burkoló görbéje**.



- 1-paraméteres görbesereg
- Impliciten, analitikusan parametrizált

A burkoló görbe analítikus leírása

A burkoló görbe bizonyos értelemben egy szingularitás:

$F(x, y, t) = 0.$	$\leftarrow$ analítikus parametrizáció
$F_t(x, y, t) = 0.$	$\leftarrow$ parciális derivált t szerint

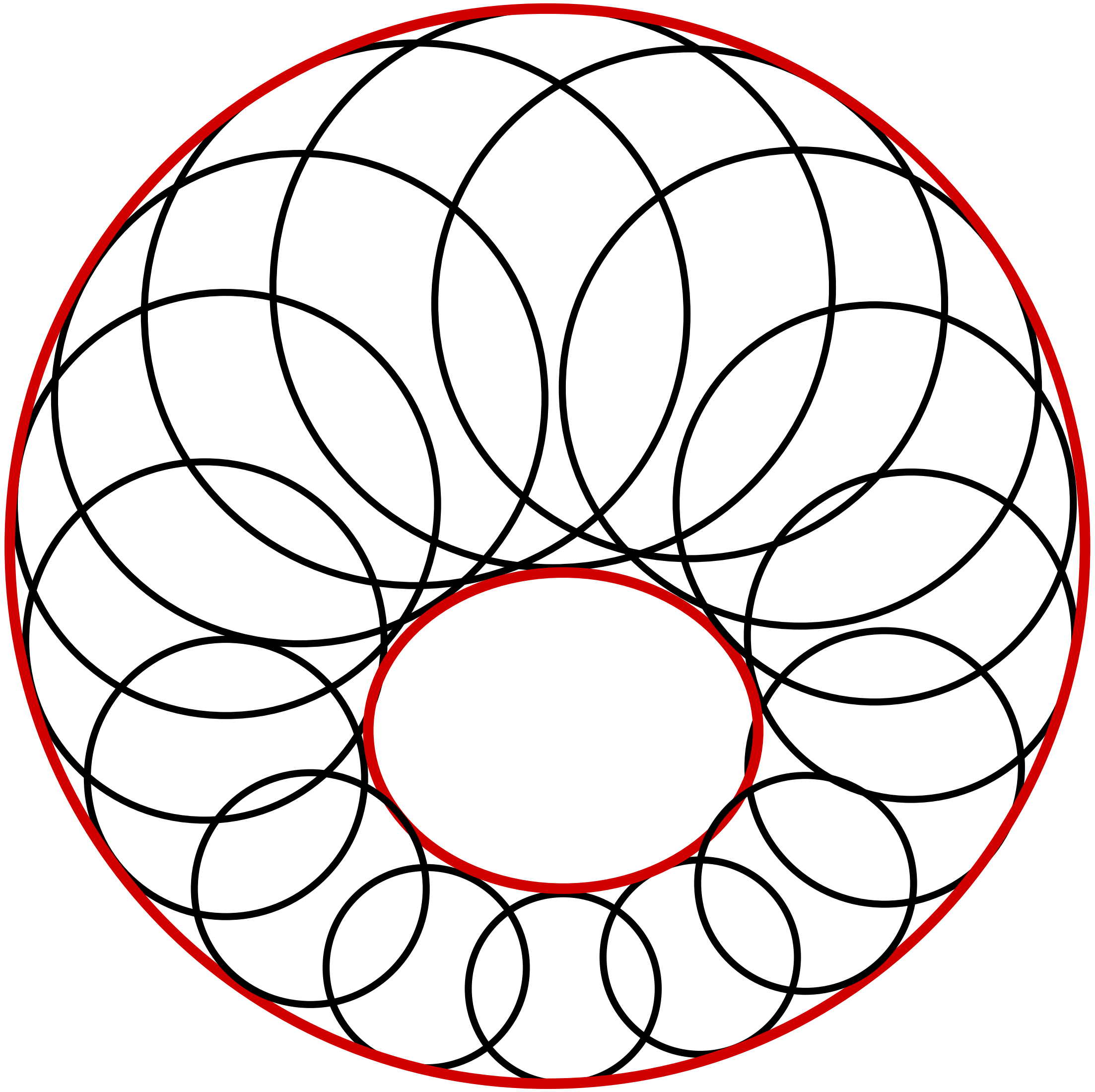
- Kiküszöbölve t-t, gyakran megkapjuk a burkoló görbét:

$$\Phi(x, y) = 0.$$

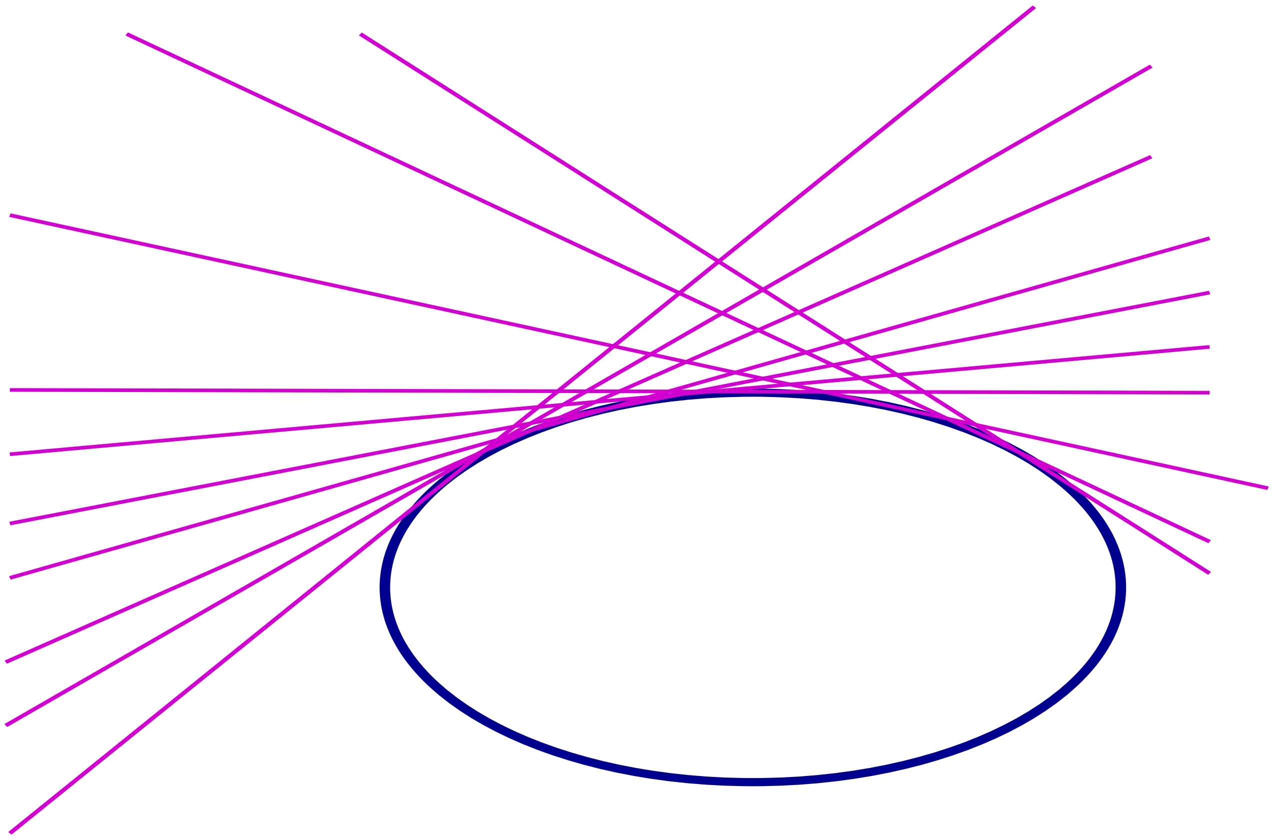
- Problémak az **analítikus ágakkal**
- Egyszerűség végett gondoljunk polinomokra vagy algebrai függvényekre.

Vigyázat: függvényekről beszélünk, nem görbékről: Állításaink függhetnek a paraméterezéstől!

1. Példa: Körök Burkoló Görbéje



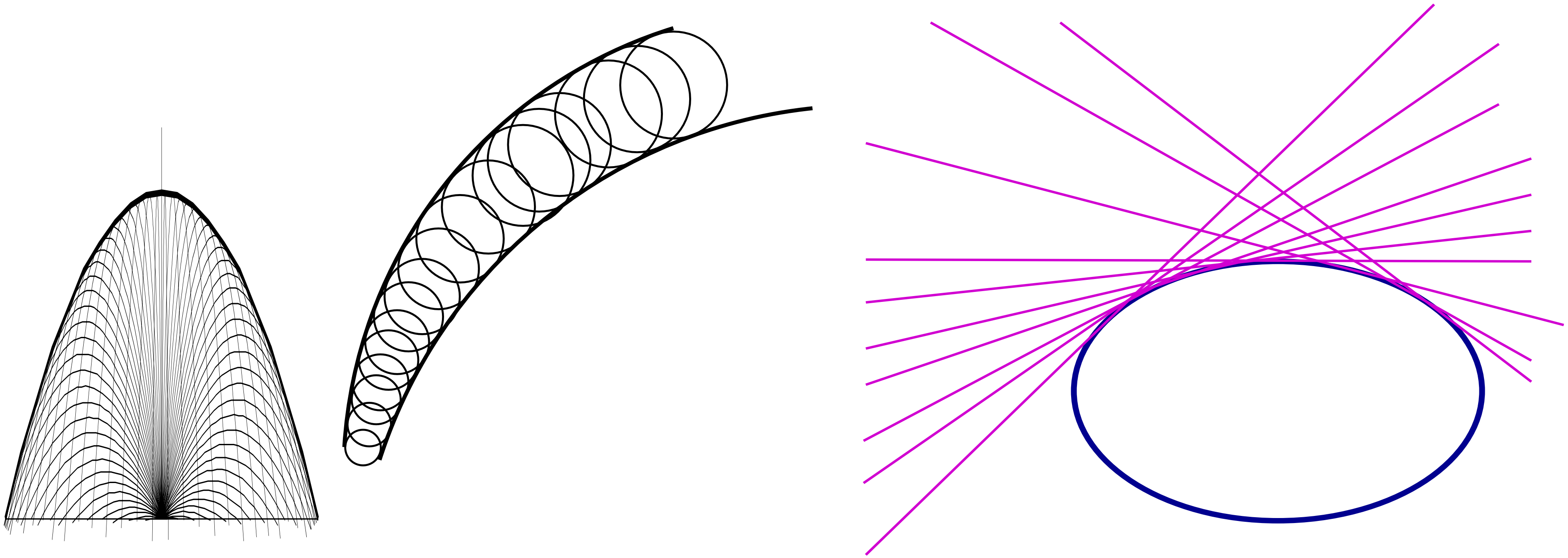
Érintő egyenesek Burkoló Görbéje



Ha egy elég sima görbét tekintünk, az érintő egyenesei egy görbesereget alkothatnak, és maga a görbe lehet ezek burkolója.

A görbesereg betakarhatja a Burkoló Görbét

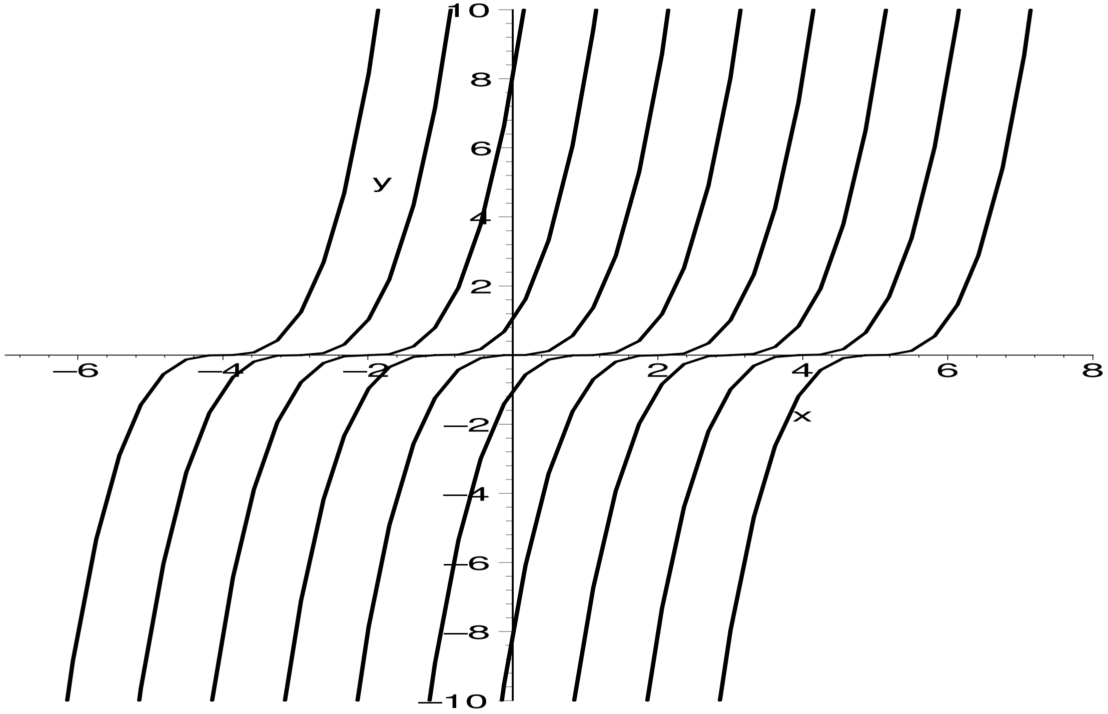
A geometriai kép: Van egy 1-paraméteres görbeseregünk, amelyik befedi a sík egy részét a maradékot pedig nem. Ekkor a **határvonal** a burkoló görbe.



$\boxed{\text{Hibás!}}$ A görbék befedhetik a burkoló görbéjüket

A görbesereg betakarhatja a Burkoló Görbét II

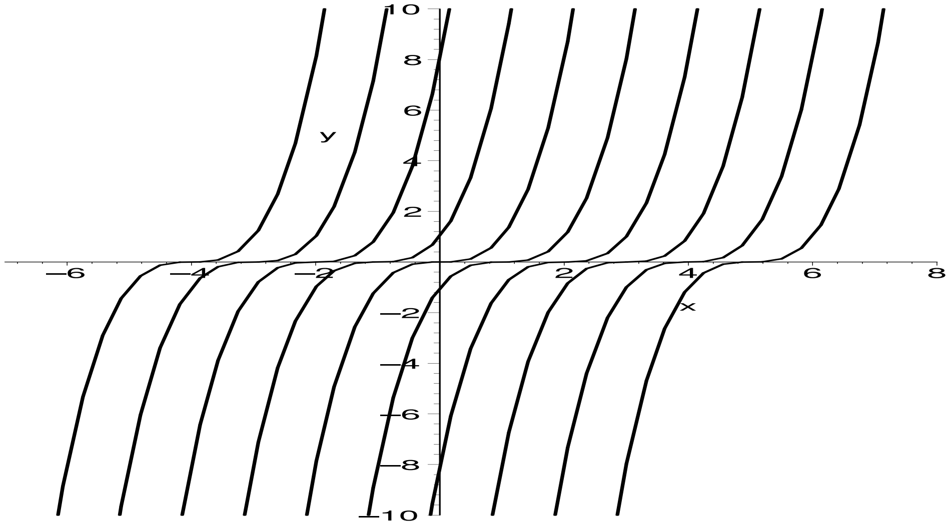
Csúsztassuk el $y = x^3$ grafikonját t-vel:



$$y = (x - t)^3;$$

Itt $y = 0$ a burkoló görbe.

Analítikus alakban:



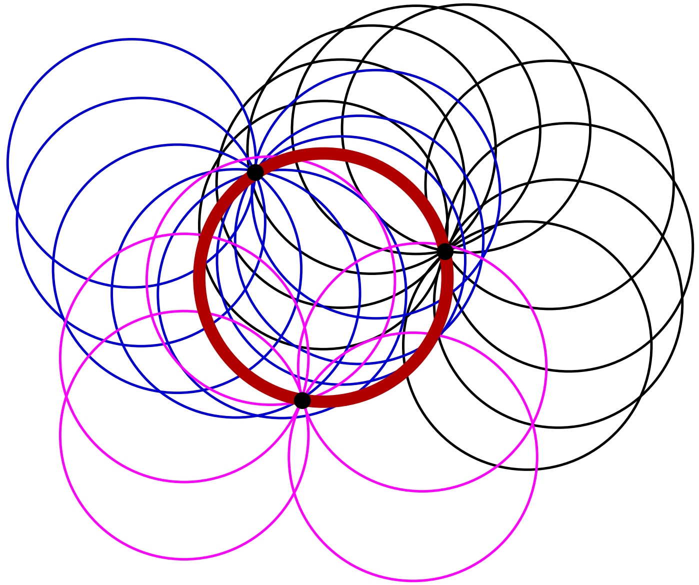
A görbék	$F(x, y, t) = 0$	$F_t(x, y, t) = 0$
$y = (x - t)^3$	$(x - t)^3 - y = 0$	$3(x - t)^2 + y = 0$
		$(x - t)^3 + (y/3)^{3/2} = 0$

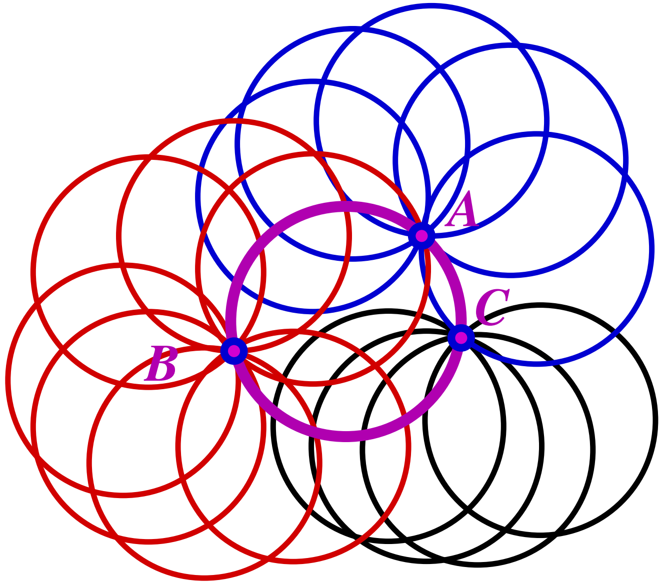
$$(y/3)^{3/2} + y = 0$$

Az x-tengely: $y = 0$ a burkoló görbe…

Elfajult esetek

Egységkörök három ponton át:





Multiplicitás nélkül számolunk

Mellékesen, a piros kör végtelen sok 3-szoros pontot ad!

Concurrency függvény: a háromszoros pontokat írja le:

Tekintsünk a 3 paraméterezést és oldjuk meg őket: **fejezzük ki a paramétereket**.

$$F_1(x,y,t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\varphi_1(x,y)$$

$$F_2(x,y,u)=0 \quad\Leftrightarrow\quad u=\varphi_2(x,y)$$

$$F_3(x,y,v)=0 \quad\Leftrightarrow\quad v=\varphi_3(x,y)$$

Többnyire 2 paraméter meghatározza (x,y)-t és az a 3. paramétert:
Három görbe közös pontjára:

$$\Psi(t,u,v)=0 \quad \text{i.e.} \quad \Psi(\varphi_1(x,y),\varphi_2(x,y),\varphi_3(x,y))\equiv 0$$

Itt $\varphi_i(x,y)$ lehet sokértékű függvény. Ez sok technikai bonyodalomra vezet, de ez a dolog lényegéhez tartozik.

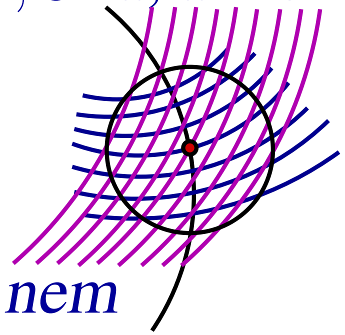
Feltesszük, hogy $\Psi(.,.,.)$ **polinom**.

Ψ a **concurrency** függvény.

Általános Tétel (kissé új jelölések)

Feltételek: *Legyenek* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ *1-paraméteres görbeseregek, implicite parametrizáltak az* F_1, F_2, F_3, *függvényekkel, melyek analítikusak a* $G_i \times T_i$ *tartományokon és folytonosak a* $\mathrm{cl}(G_i \times T_i)$*-n. Tegyük fel, hogy a concurrency függvény,* $\Psi = \Psi(t_1, t_2, t_3) \in \mathcal{C}[t_1, t_2, t_3]$ *polinom:*
Ha $t := \varphi_i(x, y)$ *az* $F_i(x, y, t) = 0$, *egy analítikus ága,* $i = 1, 2, 3$*-ra, akkor*

$$\Psi(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \varphi_3(x, y)) = 0 \tag{1}$$

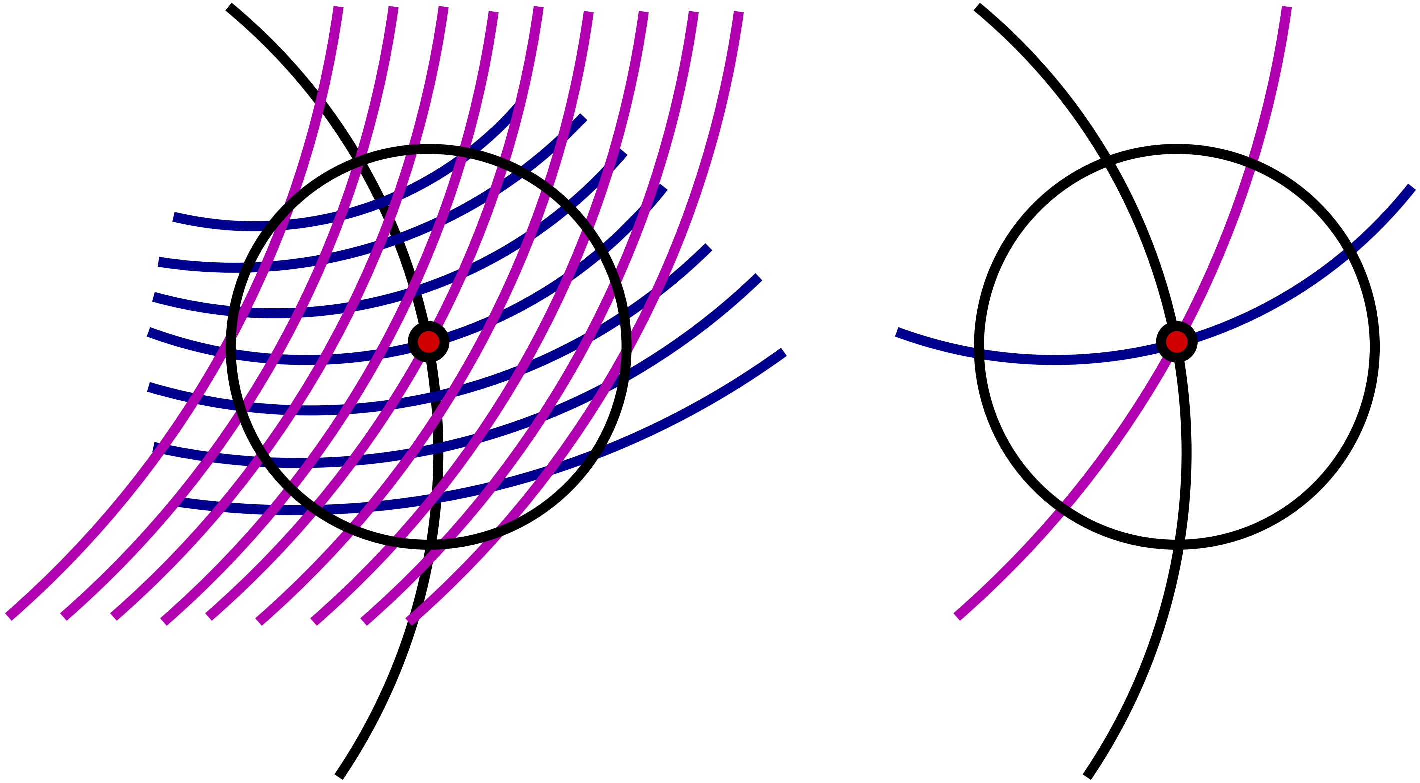


(i) Γ_3*-nak van egy parciális burkoló görbéje,* $\mathcal{E}$, *amelyik nem parciális burkoló görbéje a másik két görbeseregnek;*
(ii) $\mathcal{E} \subseteq G_1 \cap G_2 \cap \mathrm{cl}(G_3)$; *és van egy* $P \in \mathcal{E}$, *és annak egy* U *környezete, melyekre* Γ_1 *és* Γ_2 *befedi* U*-t.*
(iii) $\mathcal{E}$ *részívei nem részei valamelyik* $\gamma \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$*-nak.*

Konklúzió:

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{T}_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3}(n) = \mathcal{O}(n^{2-\eta}), \\ \textit{alkalmas } \eta = \eta(\deg(F)) \textit{ és } n > n_0 = n_0(\deg(F))\textit{-re.} \end{array}}$$

A geometriai feltételek



A geometriai feltétel az, hogy az egyik görbeseregnek van parciális burkoló görbeje, és a másik kettő ezt transzverzálisan metszi: a három érintő különböző.

$\boxed{\text{2 különböző tétel}}$

A concurrency függvény szerepe

Tekintsünk a rácsot: (a, b, c) egész koordinátákkal.

- A sík: $x + y + z = c$ sok rácspontot is tartalmazhat.

Transzformáljuk a rácsot:

- $(\log a, \log b, \log c)$ ahol a, b, c egészek. $xyz = const$ iff $\log x + \log y + \log z = const$: sok általánosított rácsponton megy át.
- Itt az összeget a logaritmussal transzformáltuk, de tetszőleges más függvényt is használhattunk volna.
- A lényeg: A megfordítás is igaz: egy sima függvény, ha sok általánosított rácsponton megy át, nagyon speciális alakú.

Elekes-Szabó tétel

Lazán!!!

Ha a $[0,1]$-en megadunk 3 n-elemű halmazt, és tekintjük ezek szorzatát: egy n^3 elemű általánosított rácsot,

Ha van egy szép $F(u,v,w)$ függvényünk, amelyik ezen n^3 pontból sokan megy át...

akkor

$$F(u,v,w)=\varphi_1(u)+\varphi_2(v)+\varphi_3(w)$$

Elekes-Szabó: Black Box

Rögzítsük $d \in \mathbb{Z}^+$-t. Léteznek egy $\eta = \eta(d) \in (0, 1)$, $k = k(d)$ és $n_0 = n_0(d)$, hogy

ha $V \subset \mathcal{C}^3$ 2-dimenziós $\leq d$ fokú algebrai felület, és végtelen sok n-re létezik $T_1, T_2, T_3 \subset \mathcal{C}$ úgy, hogy $|T_1| = |T_2| = |T_3| = n$ és

$$|V \cap (T_1 \times T_2 \times T_3)| \geq n^{2-\eta};$$

akkor vagy V "hengeres", vagy van egy $P \in V$ pont és egy $\mathcal{U}$ környezete, ahol a felület linearizálható: átírható

$$x + y + t = 0$$

alakba nemlineáris transzformációval (!?).

Persze, itt több magyarázat kéne ...pl. a rejtőzködő csoportokról

Az egységkörök és egyenesek megkülönböztetése

Létezik egy $\eta \in (0,1)$ abszolút konstans, és egy n_0 melyekre:

Ha (a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) három különböző pont a síkban és Γ_1, Γ_2, Γ_3 három egységkör-sereg, ahol $i \leq 3$, a Γ_i-beli körök átmennek (a_i, b_i)-n. Ekkor

$$\mathcal{T}_{\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3}(n) = O(n^{2-\eta}),$$

$n > n_0$ esetén.

A bizonyítás lényege:

- Ha sok 3-szoros metszéspont van, akkor alkalmazhatjuk az Elekes-Szabó Endre tételt:
  A paramétereket a 3-szoros metszéspontokban kifejezzük az egyenletekből.
  Kapunk egy

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = 0$$

polinomot, amelyik nagyon speciális alakú:

$$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) = 0$$

és ez a sík bizonyos pontjaiban ellentmondásra vezet: Ezek közül kettő analítikus, de a harmadiknak igazi szingularitása van.

Többértékű függvények, ágak

…Ez baj !!!

…Baj ez?

Historical remarks and examples

Earlier results for straight lines

Studying the incidence structures of points and straight lines (more generally, of points and certain curves) has been one of the fundamental tasks of Combinatorial Geometry for long.

140 years ago Sylvester: famous „Orchard Problem” which, in a dual form, asks for arranging n straight lines in the Euclidean plane so that **the number of triple points be maximized. Sylvester** showed that if $\mathcal{L}$ is the family of all straight lines then $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(n) = n^2/6 + \mathcal{O}(n)$.

Later on **Burr, Grünbaum and Sloan** slightly improved his lower bound.

Earlier results on unit circles

An „orchard–like" problem was posed by Erdős:

arrange n unit circles in the Euclidean plane so that the number of triple points be maximized.

Denoting the family of all unit circles by $\mathcal{U}$, an upper for the above problem by $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(n)$. Now $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(n) \leq n(n-1)$ is obvious (since, as before, already the number of *pairwise* intersections obeys this bound). Also, a lower bound of $\mathcal{T}_{\mathcal{U}}(n) \geq cn^{3/2}$ was proved by Elekes. The gap between these two estimates is still wide open.

Egységkörök és egységtávolságok

Az egységkörök speciális szerepet játszanak a Kombinatorikus Geometriában.

Itt az egyik legérdekesebb probléma:

Erdős Sejtés. *Minden $\varepsilon > 0$-ra van egy n_0, melyre, ha $n > n_0$, akkor n pont között az $\mathbb{R}^2$-ben legfeljebb $n^{1+\varepsilon}$ egységtávolság lehet.*

Az egységkörökre vonatkozó bizonyos állítások ezzel ekvivalensek.

Gyuri a Rényi Intézetben

Gyuri és Panni

Gyuri az erdőn C

Gyuri és Panni

•••