

Megjegyzések a Kombinatorika-Gráfelmélet történetéhez

Simonovits Miklós

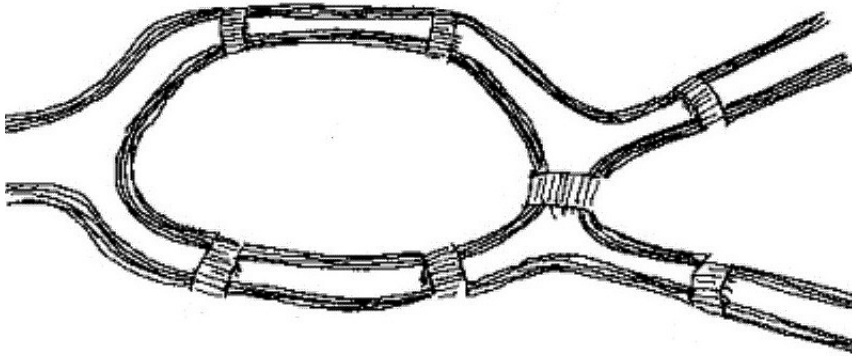
November 4, 2021

1. A kombinatorika kezdetei

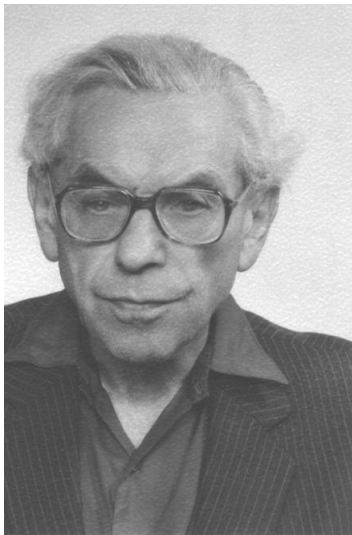
Kérdés 1. *Hol kezdődött a kombinatorika? Talán Leibniznél?*

Leibniz considered the “ars combinatoria” as a science of fundamental significance, much more extensive than the combinatorics of today. His only publications in the field were his youthful *Dissertatio de Arte Combinatoria* of 1666 and a short article on probability, but he left an extensive (hitherto unpublished and unstudied) *Nachlass* dealing with five related topics: the basic operations of combinatorics, symmetric functions in connection with theory of equations, partitions (additive theory of numbers), determinants, and theory of probability and related fields

2. Euler vonalak, Euler körök



3. Hamilton utak, Hamilton körök







3.1. Folytonos és diszkrét matematika

A geometria, és az analízis “folytonos”,

de mi a számelmélet?

Hova tegyük a véges geometriát?

3.2. A matematika csatlakozó ágai

Operáció-kutatás

Információelmélet

Kódolás-elmélet

Kereséselmélet

Markov láncok
gráfokon való bolyongás (rekurrens)
Perkoláció

4. Kombinatorika, gráfelmélet, spóradikus problémák

Erdős Sidon problémája, TOMSZK,
Véges geometriai konstrukció
Friendship theorem

4.1. Helyfüggő iskolák

Block-design
Ray-Chaudhuri - Wilson tétel

4.2. Kereséselmélet

Van 12 pénzdarabunk, az egyik könnyebb, hamis. Hány kérdéssel találjuk meg a hibásat?
Szifiliszest keresünk.
Rényi hibát keres az autójában?

4.3. Információelmélet

Claude Shannon. Véletlen kódok

5. Crossing Number és Turán Pál

6. Algoritmusok

6.1. Algoritmusok analízise

Ford algoritmus, gps,
Mi lenne, ha a program 100-szor lassabb lenne?

7. Véletlen gráfok

A 4+1 model

7.1. Klasszikus valószínűségszámítás

Kérdés 2. *Mitől fejlődik egy elmélet?*

Gyakran a nehéz feladatoktól, problémáktól, sejtésektől.

Kérdés 3. *Van-e igény a kombinatorikára?*

7.2. A kezdetek, és miért nem szeretem ezt?

Kombinatorika: Königsbergi hidak, Euler vonal

Ramsey: $R(3, 3) = 6$

Euler: Hat ezred, hat tiszt fokokozat, block designs?

Mire jók a block-design-ok?

7.3. Mi a kombinatorika, és mi a gráfelmélet?

8. A gráfelmélet kezdetei

9. A König-Hall tétel és környéke

9.1. Magyar módszer

9.2. Stabil párosítás és az mire jó?

10. Ford-Fulkerson tétel

Ez a tétel arról szól, hogy egy bizonyos úthálózaton, ahol az utaknak kapacitásuk van, mennyi árút szállíthatunk egy x pontból egy y pontba.

Induljunk ki a Menger tételből:

Tétel 1. *Max flow = Min Cut*

A tétel bizonyítása nem volt egyszerű, és az indukciós alap is hiányzott: ez tk a König-Hall tétel.

Frobenius felháborodása

11. Ramsey tétel

12. Turán tétel

Tétel 2 (Turán, 1941).

13. Menger típusú tételek

14. Véletlen objektumok megjelenése

14.1. Shannon, az információ-elmélet születése

14.2. Erdős Ramsey becslése

Erdős magic?

Tétel 3. *Van olyan graph, amelyikben és amelyik komplementereben a legnagyobb teljes legfeljebb $3 \log n$*

Véletlen módszerek konstrukciók helyett.

Tétel 4. *Minden k, ℓ -re van olyan G_n , amelyekre $\chi(G_n) \geq k$ és amelyeknek a girth-e $\geq \ell$*

14.3. Erdős-Rényi eredmények

Itt nem konstrukciót keresünk, hanem a tipikus strukturát.

Nincs szimmetria:

Tétel 5. *Majdnem minden graf automorfizmus-csoportja triviális.*

Mitől lesz egy gráf összefüggő?

14.4. A véletlen gráfok modelljei

1. A legáltalánosabb hozzáállás
2. A Hipergeometrikus model
3. A binomiális model. Mi az előnye?

4. Stopping rule model

Mikor bukkan fel a Hamilton kör? $\frac{1}{2}n \log n$ élnél.

Erdős-Rényi: On the evolution of Random Graphs

Mennyire mély valszám kell itt?

Csebishev / Bernstein / Chernoff-Hoeffding

Tétel 6 (Chernoff-Hoeffding theorem). *Suppose X_1, \dots, X_n are i.i.d. random variables, taking values in $\{0, 1\}$. Let $p = E[X_1]$ and $\varepsilon > 0$.*

$$\Pr\left(\frac{1}{n} \sum X_i \geq p + \varepsilon\right) \leq e^{-D(p+\varepsilon||p)n}$$

and

$$\Pr\left(\frac{1}{n} \sum X_i \leq p - \varepsilon\right) \leq e^{-D(p-\varepsilon||p)n}.$$

where

$$D(x||y) = x \ln \frac{x}{y} + (1-x) \ln \left(\frac{1-x}{1-y}\right)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Chernoff_bound

15. Új, mélyebb módszerek

1. Szemerédi Regularitási lemma
2. Hipergráf általánosítások (Frankl-Rödl, ...)
3. Chernoff becslés
4. Lovász local lemma
5. Martingálok
6. Markov láncok

16. Alkalmazások geometriában

17. Alkalmazások a számelméletben

Számtani sorok prímszámokból,

Erdős-Turán sejtés

18. Algoritmusok

18.1. Mitől jó egy algoritmus?

- (a) Gyorsan megírható
- (b) Gyorsan lefut (pl. polinomiális/exponenciális)
Edmonds,
- (c) Rövid algoritmus (Kolmogorov bonyolultság)
- (d) Óriási program és mégis biztonságosan működik

18.2. Egy fontos példa: az utazó ügynök

Feltehetőleg nincs rá gyors algoritmus

Alkalmazható pl. a Nyomtatott áramköröknél

18.3. Egy másik fontos példa: prímekre bontás

18.4. Véletlen algoritmusok

Sorbarakás a véletlen felhasználásával

Gyors sorbarakás

PÁRHUZAMOS SORBARAKÁS:

Miért kell ez nekünk?

18.5. Hash-elés

Miért kell ez nekünk?

18.6. Gyors algoritmusok az orvostudományban

Elektron mikroszkóp

Inverse scattering

Computer Tomography

18.7. Hálózatok, Barabási-Albert modell

19. Gráf-limeszek

Sűrű: Borgs-Chayes-Lovász-T. Sós-Vesztergombi

Ritka: Benjamini-Schramm

...és még sokan mások.

Mit használjunk irodalmazásra?

MathSciNet

Google Scholar

Arxiv