

A Feuerbach-kör érinti az érintő köröket

Füredi Zoltán *

Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana-Champaign, and
Rényi Institute of Mathematics, Hungarian Academy of Sciences

z-furedi@math.uiuc.edu and furedi@renyi.hu

Két bizonyítást ismertetünk Feuerbach fenti tételére.

Jelölések. Az ABC csúcsú háromszög három oldalának hosszát jelölje a , b és c a szokásos módon. Jelölje $\mathcal{K}$ a körülírt kört, középpontja O , sugara r , jelölje $\mathcal{B}$ a beírt kört, középpontja Q , sugara ϱ , és legyen a háromszög területe t , félkerülete s , súlypontja S , magasságpontja M , az oldalak felezőpontjai H_a , H_b és H_c . A Heron formula kifejezi a háromszög területét az oldalhosszakkal, $t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. További területképletek: $\varrho s = t = \frac{1}{2}ab \sin \gamma = abc/(4r)$. Ezekből, és a Heron képlet kifejtéséből kapjuk, hogy

$$2r\varrho = \frac{abc}{a+b+c} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varrho^2 &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \\ &= \frac{-a^3 - b^3 - c^3 - 2abc + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2}{4(a+b+c)} \end{aligned} \quad (2)$$

A Feuerbach kör. Jelölje $\mathcal{F}$ az oldalfelező pontokon átmenő kört. Mivel a $H_aH_bH_c$ háromszöget az ABC -ből az S centrumú és $-1/2$ arányú kicsinyítéssel kaphatjuk, az $\mathcal{F}$ sugara $r/2$ és centruma, F , rajta van a háromszög *Euler egyenesén*: F az OM szakasz felezőpontja, S harmadolja OM -et és OF -et. Euler (1707–1783) is tudta, hogy $\mathcal{F}$ átmegy a magasságok talppontjain és az M -et a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjain. Ami miatt $\mathcal{F}$ -et mégis Feuerbach körnek hívjuk az a következő szép tétel:

Tétel 1. *$\mathcal{F}$ érinti a beírt kört és a hozzáírt köröket.*

Feuerbach (1800–1834) 1822-ben doktori disszertációjában a körök középpontjainak távolságát számolta ki. Megmutatta, hogy $|FQ| = |\frac{1}{2}r - \varrho|$. Mivel a háromszög minden adata kifejezhető a, b, c -vel, ha másképp nem legalább implicit módon egy egyenlet(rendszer) gyökeként, ez a számolás elvileg elvégezhető. Ha az ABC pontokat egy koordinátarendszer

*Research supported in part by the Hungarian National Science Foundation under grants OTKA T 032452, T 037846 and by the National Science Foundation under grant DMS 0140692.
Version as of May 2, 2003 (slightly revised April 6, 2004).

$(0, 0)$, $(1, 0)$ és (x, y) pontjaiba tesszük, akkor csak 2 paraméterrel kell számolnunk. Azonban az egymásra épülő mennyiségek kiszámítása egyre magasabb fokú egyenlethez vezethetnek amit egyre nehezebb kezelni. Ezért az 1. Tétel legtöbb bizonyítása vektorokat használ. Az alább ismertetett számolás relatív rövidejével tűnik ki. A gondolatmenet lényegesebb elemeit (2. Lemma) több mint 30 évvel ezelőtt Reiman István feladatmegoldó szakkörén tanultam és elolvasható Reiman István: Geometria és határterületei c. könyvében (Gondolat Kiadó, Budapest, 1986).

Kényelmesebb a távolságok négyzeteinek meghatározása, elkerülhető a gyökvonás, csupán racionális törtfüggvények jönnek elő. Az (1)-ből és (2)-ből máris ismerjük az $(\frac{1}{2}r - \varrho)^2 = \frac{1}{4}r^2 - r\varrho + \varrho^2$ utolsó két tagját a, b, c -vel kifejezve. Az alábbiakban az $|FQ|^2$ kiszámításakor csupán a, b, c és r szerepel.

Vektorok. Sokat egyszerűsíthet a koordináta-rendszer centrumának szerencsés megválasztása. Esetünkben jelölje az O pontból az X -be vezető vektort $\mathbf{X}$. Ekkor $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}| = |\mathbf{C}| = r$. Bármely centrum esetén $\mathbf{S} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})$. Mivel a helyvektorok kezdőpontja O és az O , S , M és F pontok az Euler egyenesen vannak kapjuk, hogy $\mathbf{M} = 3\mathbf{S} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ és

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}). \quad (3)$$

Lemma 2.

$$\mathbf{Q} = \frac{a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}}{a + b + c}. \quad (4)$$

Bizonyítás: Jelölje $\mathbf{P}$ a (4) jobboldalán álló törtet. Belátjuk, hogy rajta van a szögfelezőkön. A $\mathbf{C} - \mathbf{A}$ vektor hossza b így az $\frac{1}{b}(\mathbf{C} - \mathbf{A})$ egy A -ból C felé mutató egységvektor. Hasonlóképp $\frac{1}{c}(\mathbf{B} - \mathbf{A})$ egy B -felé mutató egységvektor. E kettő összege, azaz $(b\mathbf{B} + c\mathbf{C} - (b+c)\mathbf{A})/bc$, az A -ból induló szögfelezőn van. A szögfelező egyenes bármely pontját megkaphatjuk mint ezen összeg egy skalárszorosát az $\mathbf{A}$ -hoz adva. A törtektől megszabadulva kapjuk az A -n átmenő belső szögfelező paraméteres vektoregyenletét:

$$\mathbf{f}_A(x) = \mathbf{A} + x(b\mathbf{B} + c\mathbf{C} - (b+c)\mathbf{A})$$

Ha x végigfut a valós számokon az $\mathbf{f}_A(x)$ vektorok a szögfelező pontjait adják. Az eredmény ismeretében könnyű az ellenőrzés, az $\mathbf{f}_A(x)$ alkotta egyenest két pontja meghatározza: $x = 0$ az A csúcspontot adja, $x = 1/(b+c)$ a BC szakasz azon pontját amely azt $c : b$ arányban osztja, azaz a szögfelező talppontját. Az $x = 1/(a+b+c)$ értéket választva látjuk, hogy $\mathbf{P}$ rajta van a szögfelezőn. $\mathbf{P}$ rajta van a többi szögfelezőn is, így szükségképpen $\mathbf{P} = \mathbf{Q}$. $\square$

A legegyszerűbb vektortulajdonságokon kívül (összeadás kommutativitása, lineáris kombináció) szükségünk lesz a **skalár szorzat** fogalmára. Mivel egy vektor önmagával vett szorzata a hossz négyzete, egy tetszőleges $|XY|$ távolság, illetve a négyzete, így számolható: $|XY|^2 = |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|^2 = \mathbf{X}^2 + \mathbf{Y}^2 - 2\mathbf{X}\mathbf{Y}$. A skalár szorzat kommutativitásán és bizonyos asszociativitásán kívül csak az $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$ és $\mathbf{BC}$ szorzatok értéket használjuk. Mivel $c^2 = |\mathbf{B} - \mathbf{A}|^2 = |\mathbf{B}|^2 + |\mathbf{A}|^2 - 2\mathbf{AB} = 2r^2 - 2\mathbf{AB}$ kapjuk, hogy

$$\mathbf{AB} = r^2 - \frac{1}{2}c^2, \quad \mathbf{AC} = r^2 - \frac{1}{2}b^2, \quad \mathbf{BC} = r^2 - \frac{1}{2}a^2. \quad (5)$$

A bizonyítás. Számoljuk ki a két középpont F és Q távolságát.

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= |\mathbf{Q}|^2 = \left(\frac{a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}}{a+b+c} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{(a+b+c)^2} (a^2\mathbf{A}^2 + b^2\mathbf{B}^2 + c^2\mathbf{C}^2 + 2ab\mathbf{AB} + 2ac\mathbf{AC} + 2bc\mathbf{BC}) = \\
 &= \frac{1}{(a+b+c)^2} (a^2r^2 + b^2r^2 + c^2r^2 + 2abr^2 - abc^2 + 2acr^2 - acb^2 + 2bcr^2 - bca^2) \\
 &= r^2 - \frac{abc}{a+b+c}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Ebből (1) adja Euler tételét, hogy

$$|\mathbf{Q}|^2 = r^2 - 2r\varrho \tag{7}$$

és ebből $\frac{1}{2}r \geq \varrho$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^2 &= |\mathbf{F}|^2 = \frac{1}{4} (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^2 = \frac{1}{4} (3r^2 + 2\mathbf{AB} + 2\mathbf{AC} + 2\mathbf{BC}) \\
 &= \frac{1}{4} (9r^2 - a^2 - b^2 - c^2)
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 2\mathbf{FQ} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) \frac{a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}}{a+b+c} \\
 &= \frac{1}{a+b+c} (a\mathbf{A}^2 + b\mathbf{B}^2 + c\mathbf{C}^2 + (a+b)\mathbf{AB} + (a+c)\mathbf{AC} + (b+c)\mathbf{BC}) = \\
 &= r^2 + \frac{1}{a+b+c} \left((a+b)(r^2 - \frac{1}{2}c^2) + (a+c)(r^2 - \frac{1}{2}b^2) + (b+c)(r^2 - \frac{1}{2}a^2) \right) \\
 &= 3r^2 - \frac{1}{2(a+b+c)} (ac^2 + bc^2 + ab^2 + cb^2 + ba^2 + ca^2)
 \end{aligned} \tag{9}$$

A (6), (8) képletek összegéből vonjuk le a (9)-t.

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{F} - \mathbf{Q}|^2 &= \mathbf{F}^2 + \mathbf{Q}^2 - 2\mathbf{FQ} \\
 &= \frac{1}{4}r^2 + \frac{-4abc - (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ac^2 + bc^2 + ab^2 + cb^2 + ba^2 + ca^2)}{4(a+b+c)} \\
 &= \frac{1}{4}r^2 - \frac{2abc}{4(a+b+c)} + \frac{-a^3 - b^3 - c^3 - 2abc + ab^2 + ac^2 + ba^2 + bc^2 + ca^2 + cb^2}{4(a+b+c)}
 \end{aligned}$$

Ebből az (1) és a (2) felhasználásával adódik, hogy

$$|\mathbf{F} - \mathbf{Q}|^2 = \frac{1}{4}r^2 - r\varrho + \varrho^2 = \left(\frac{1}{2}r - \varrho \right)^2.$$

Tehát az FQ szakasz hossza $\frac{1}{2}r - \varrho$ és így az F középpontú $\frac{1}{2}r$ sugarú kör (a Feuerbach kör) és a Q középpontú ϱ sugarú körök belülről érintik egymást. $\square$

Záró megjegyzések.

1. Lássuk be, hogy az a oldalhoz hozzáírt kör középpontjába mutató vektor

$$\mathbf{Q}_a = \frac{-a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C}}{-a + b + c}.$$

2. Készítsünk a fentiekhez hasonló bizonyítást arra, hogy a beírt kör kívülről érinti a hozzáírt köröket!

3. Poncelet (1788–1867) tétele szerint ha egy k oldalú $A_1, \dots, A_k$ poligon csúcsai egy $\mathcal{K}$ körön vannak és egyidejűleg oldalai egy $\mathcal{B}$ kört érintenek akkor a $\mathcal{K}$ tetszőleges $X = X_1$ pontjából kiindulva a $\mathcal{B}$ -hez érintőt húzva és így a $\mathcal{K}$ -ból a következő, X_2 pontot nyerve, majd ezen eljárást folytatva a k -adik lépés után a kapott töröttvonal zárodik, $X_{k+1} = X_1$.

Az Euler formulára (7) támaszkodva, lássuk be Poncelet tételét a $k = 3$ esetre!

4. A 2. Lemmához hasonló tétel (lényegében ugyanolyan egyszerű bizonyítással) minden dimenzióban igaz, pl. ha A_1, A_2, A_3, A_4 egy tetraéder csúcsai, és $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ a körírt gömb középpontjából odamutató helyvektorok, és $\mathbf{Q}$ a beírt gömb középpontjába, Q -ba mutató helyvektor akkor

$$\mathbf{Q} = \sum_{1 \leq i \leq 4} \frac{t_i}{t_1 + \dots + t_4} \mathbf{A}_i,$$

ahol t_i az A_i -vel szemközti lap területe.

5. A (8) egyenletet használva bizonyítsuk, hogy $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$ akkor és csak akkor ha a háromszög derékszögű!

6. Igazoljuk, hogy az $\mathcal{F}$ Feuerbach kör érinti az ABM , ACM és BCM háromszögek beírt és hozzáírt köreit is. (Ez további 12 kör!)

Bizonyítás inverzióval.

Ismertetjük a Feuerbach tétel legegyszerűbb bizonyítását, amelyet egymástól függetlenül M'Clelland (1891) és Lachlan (1893) talált és amelyet a legtöbb tankönyv átvett (pl. D. Pedoe: Circles, MAA publication, 1957, 1979, 1995). A fő gondolat (a Lemma 3) alábbi bizonyítása új, a szokásosnál valamelyest egyszerűbb.

Jelölje A_0 az a oldalon a $\mathcal{B}$ beírt kör érintési pontját, jelölje A_1 az a oldalhoz hozzáírt $\mathcal{H}$ kör érintési pontját, és jelölje f e két kör közös szimmetriatengelyét, az A ponton átmenő belső szögfelezőt. E két körnek 4 közös érintője van, az ℓ_a, ℓ_b, ℓ_c oldalegyenesek, és egy negyedik ℓ'_a egyenes amely az ℓ_a tükörképe f -re. Legyen B' és C' a B és C csúcsok f -re vonatkozó tükörképei, $B', C' \in \ell'_a$.

Mivel $|CA_0| = s - c$ és $|BA_1| = s - c$ az A_0A_1 szakasz felezőpontja H_a és hossza $|a - 2(s - c)| = |c - b|$. Tegyük fel, hogy $b \neq c$ és jelölje i az A_0A_1 átmérőjű körre vonatkozó inverziót. Ekkor $i(A_0) = A_0$, $i(A_1) = A_1$, $i(\ell_a) = \ell_a$.

Lemma 3. $i(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, $i(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ és $i(\ell'_a) = \mathcal{F}$.

Bizonyítás. Az inverzió megtartja az érintkezést, így $i(\mathcal{B})$ érinti $i(\ell_a)$ -t az $i(A_0)$ pontban. Kapjuk, hogy $\mathcal{B}$ képe önmaga. Hasonlóképp adódik, hogy $i(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

Azt kell még bizonyítanunk, hogy $i(\mathcal{F}) = \ell'_a$. Mivel $\mathcal{F}$ tartalmazza az inverzió centrumát, H_a -t, így képe egy egyenes. Belátjuk, hogy H_b és H_c képei az ℓ'_a egyenesre kerülnek. Tekintsük H_b -t, a H_c esete analóg. Legyen X a H_aH_b és ℓ'_a egyenesek metszéspontja. A $B'AC'$ és $B'H_bX$ háromszögek hasonlósága adja, hogy

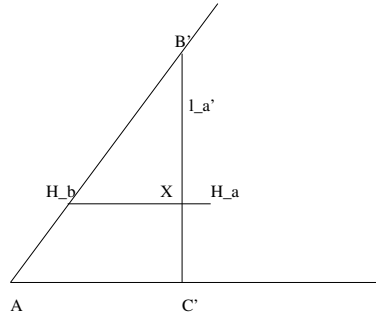
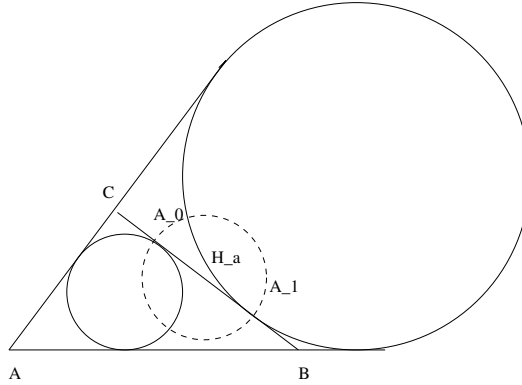
$$|H_bX| = |AC'| \frac{|H_bB'|}{|AB'|} = |AC'| \frac{|AB'| - |AH_b|}{|AB'|} = b \frac{c - b/2}{c}.$$

Ha itt $c - b/2$ negatív, akkor X a $[H_bH_a]$ szakaszon kívül van. Kapjuk, hogy $|H_bX| < c/2$ és így X a $[H_aH_b]$ félegyenesre kerül. Továbbá

$$|H_bH_a||XH_a| = |H_bH_a|(|H_bH_a| - |H_bX|) = \frac{c}{2} \left(\frac{c}{2} - b \frac{c - b/2}{c} \right) = \frac{1}{4}(c - b)^2.$$

Tehát $i(H_b) = X$ így $i(H_b) \in \ell'_a$. □

Végül, mivel az ℓ'_a a $\mathcal{B}$ és $\mathcal{H}$ közös érintője, így $\mathcal{F}$ közös érintő (köre) ezen körök képének. Mivel $\mathcal{H}$ helyett más hozzáírt kör is állhat, így $\mathcal{F}$ mind a négy érintő kört érinti.



Appendix, az inverzió néhány tulajdonsága

Az O középpontú r sugarú körre vonatkozó i inverzió a sík O -n kívüli pontjainak egy bijekciója, oly módon, hogy a P pont képe rajta van az O -ból induló P -n átmenő félegyenesen, és $|OP| \times |Oi(P)| = r^2$. Ez egy involúció, azaz $i(i(P)) = P$.

- Egy O -n átmenő ℓ egyenes képe önmaga (pontosabban $i(\ell \setminus \{O\}) = \ell \setminus \{O\}$.)
 - Ha $O \notin \ell$ akkor képe egy O -n átmenő kör.
 - Egy O -t tartalmazó kör képe egy a centrumot elkerülő egyenes.
 - Egy O -t elkerülő kör képe egy másik kör, közös hasonlóságpontjuk O .
 - Az inverzió megtartja az érintést, érintő egyenesek és körök képe érintik egymást.
- (Valójában több igaz, az inverzió szögtartó).