

Gráfok lokális színezései

Füredi Zoltán

2002. szeptember 16.

E dolgozat a Komjáth Péter tiszteletére tartott Akadémiai előadás kibővített változata. Célünk néhány fontos és nehéz kombinatorikai probléma között új kapcsolatokra rámutatni. A következő témákat említjük:

- Hogyan függ egy gráf kromatikus száma, $\chi(G)$, a lokális kromatikus számtól és a ténylegesen használt színek számától.
- Keverő permutációk és részben rendezett halmazok Dushnik-Miller dimenziója.
- Gráfok gyors színezése párhuzamos processzorokkal.
- A Kneser gráf, $K(n, k)$, Prága dimenziója.

1. A LOKÁLIS (m, r) SZÍNEZÉS

Egy G gráf f színezését, $f : V(G) \rightarrow [n]$, **lokális (n, r) -színezésnek** hívjuk ha egyfelől egy jó színezés n színnel, másfelől minden pont környezete legfeljebb r színt kap. Azaz, ha $xy \in E(G)$ egy él, akkor $f(x) \neq f(y)$, és $|f(N(x))| \leq r$, ahol $N(x) := \{y : xy \in E(G)\}$ az x szomszédainak halmaza.

Erdős kérdezte, hogy milyen összefüggés lehet egy gráf kromatikus száma, $\chi(G)$, a lokális kromatikus szám és a ténylegesen használt színek száma között. Nyilván $\chi(G) \leq n$. Jelölje $C(n, r)$ az (n, r) -színezhető gráfok maximális kromatikus számát. Ha $r = 1$ akkor a gráf nem tartalmazhat páratlan kört, így $\chi(G) = 2$ azaz $C(n, 1) = 2$.

Egy fontos példa az Erdős és Hajnal [3] által sokat vizsgált **shift gráf**, $S_3(n)$. Ennek csúcsai az $[n] := \{1, 2, 3, \dots, n\}$ háromelemű sorbarendezett részhalmazai, $V := \{(a, b, c) : 1 \leq a < b < c \leq n\}$. Két csúcs (a, b, c) és (x, y, z) között megy él ha $b = x$ és $c = y$, azaz (x_1, x_2, x_3) összekötött az (x_2, x_3, x_4) -gyel. Mint ismeretes, a gráf kromatikus száma $(1 + o(1)) \log \log n$. Az $f((a, b, c)) = b$ függvény egy természetesen adódó $(n, 2)$ színezés. E példa mutatja, hogy $C(n, 2) \geq (1 + o(1)) \log \log n$.

Erdős és Komjáth bizonyították, hogy a fenti becslés aszimptotikusan optimális.

$$C(n, 2) = (1 + o(1)) \log \log n.$$

Ez az eredmény megnyitotta a lokális kromatikus szám pontosabb leírásához vezető vizsgálatokat amelyeket röviden összefoglalunk a következő fejezetben.

2. A NAGY SZINEZŐ MÁTRIX

Hajnal András és Komjáth Péter egy univerzális gráf problémára redukálta a $C(n, r)$ meghatározását. Defináljuk az $U(n, r) = (V, E)$ gráfot a következőképp

$$\begin{aligned} V &:= \{(\alpha, A) : 1 \leq \alpha \leq n, \alpha \notin A, A \subset [n], |A| \leq r\} \\ E &:= \{(\alpha, A) \text{ összekötött } (\beta, B) \text{ -vel ha } \alpha \in B \text{ és } \beta \in A\}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$C(n, r) = \chi(U(n, r)). \quad (1)$$

Ez átfogalmazható a következő mátrix alakban. A nagy **szinező mátrix** $M_c(n, r)$ egy $n \times n$ mátrix melynek elemei a $[c]$ részhalmazai a következő feltétellel. Bármely $1 \leq i_0 < \dots < i_a < \dots < i_r \leq n$ esetén

$$\left[\bigcap \{A_{i_u, i_a} : 0 \leq u < a\} \right] \setminus \left[\bigcup \{A_{i_a, i_v} : a < v \leq r\} \right] \neq \emptyset. \quad (2)$$

Ekkor (ld. Erdős et al. [2]) létezik nagy szinező mátrix akkor és csak akkor ha $C(n, r) \leq c$.

E mátrix alkalmazható egy tetszőleges (n, r) -szinezett gráf, speciálisan az univerzális gráf $U(n, r)$, c szinnel való átszinezésére. Nevezetesen, (α, A) szine a (2) definícióban említett nemüres halmaz bármelyik eleme lehet.

E két összefüggés, és az extrémális halmazrendszerek elméletének segítségével egy egész sor egyenlőtlenséget és aszimptotikát sikerült bizonyítani, pl.

$$C(n, r) \leq r 2^r \log \log n. \quad (3)$$

$$\min \left\{ \frac{1}{4} \log n, 2^{r-2} (\log \log n - 1) \right\} \leq C(n, r). \quad (4)$$

Ha $\log n < r < \sqrt{n}$ akkor

$$C(n, r) \leq 8r^2 \log n. \quad (5)$$

Továbbá az $r > \sqrt{n}$ sávban pontos formulát sikerült találni.

3. KEVERŐ PERMUTÁCIÓK ÉS DIMENZIÓ

A $\pi_1, \dots, \pi_d \in \text{Sym}_n$ permutációkat $r + 1$ -**keverőnek** nevezzük, ha bármely r elemű $A \subset [n]$ részhalmazra és bármely $x \in [n] \setminus A$ elemre van közöttük olyan π_i permutáció amelyben x megelőzi A összes elemét. Legyen $d(n, r)$ a minimális d amire ez lehetséges. Mivel $d \leq n$, a $d(n, r)$ jól definiált. Nyilván $d(n, 1) = 2$ (ha $n \geq 2$).

Hajnal és Spencer [13] meghatározták $d(n, r)$ nagyságát, nevezetesen

$$\log_2 \log_2 n \leq d(n, r) \leq (1 + o(1))3r2^r \log \log n, \quad (6)$$

ha $r \geq 2$ fix és $n \rightarrow \infty$.

Egy részben rendezett halmaz ('poset') P dimenziója, $\dim(P)$, az a minimális d amelyre P rendezéstartó módon beágyazható az Euklideszi térbe, R^d -be. Más szóval, a minimális olyan d amelyre létezik d darab lineáris kiterjesztése P -nek, $\pi_1, \dots, \pi_d$, amely minden $x, y \in P$, $x \not\prec y$ párt megfordít, azaz valamely i -re $x <_i y$. E dimenzióról további fogalmak, definíciók találhatók a [15] monográfiában.

Trotter észrevette, hogy a Hajnal és Spencer által fent vizsgált probléma ekvivalens a Boole háló első és r -edik szintje által alkotott poset dimenziójával,

$$d(n, r) = \dim(B_n(1, r)).$$

Így $d(n, r)$ -re alkalmazhatóak mindazon újabb becslések, melyek elsősorban Kierstead, Brightwell, Talysheva, Kostochka, Hurlbert, Trotter és mások nevéhez kapcsolhatóak. Lásd pl. Füredi és Kahn

$$d(n, r) \leq (r + 1)^2 \log n.$$

Egy fontos áttekintés (és lényeges új eredményeket is tartalmaz) Kierstead [8] cikke.

Tétel $C(n, r) \leq d(n, r)$.

Ezen észrevétel tulajdonképpen nyilvánvaló, de mindenesetre egy új reláció a sokat vizsgált poset dimenzió és a lokális kromatikus szám probléma között. Bizonyításához színezzük az $U(n, r)$ univerzális gráf (α, A) pontját azon i színnel, $1 \leq i \leq d$, amelyre a keverő permutációrendszerben $\alpha <_i A$.

4. EGY ALKALMAZÁS: PÁRHUZAMOS PROCESSZOROK

A párhuzamos processzorokkal való számítás határait vizsgálva N. Linial [10] a következő modellt definiálta. Tegyük fel, hogy egy n csúcsú G gráf minden csúcsában van egy végtelen kapacitású processzor, amely azonban csak a szomszédos processzorokkal tud kommunikálni. Belátta, hogy ez a lokalitási korlátozás egy olyan globális paramétert mint pl. a kromatikus szám csak meglehetősen nagy számú iteráció után tud jól approximálni.

A kiindulási állapotban az i -edik csúcs értéke i . Linial megmutatta, hogy az i -edik processzor bármilyen algoritmus esetén is legalább $O(\log \log n)$ szín szükséges ahhoz, hogy egy Δ maximális fokú gráfot lokálisan színezhessük és azután ezen színezést $O(\log^*)$ iterációval így módon a gráfot Δ^2 színnel színezhessük. Természetesen a szokásos szekvenciális algoritmus $O(n)$ lépésben ad egy jó $\Delta + 1$ színezést. Másfelől meg is adott egy $O(\Delta^2 \log n)$ lokális szint használó eljárást. Ezen eljárásokat Szegedy és Vishwanathan [14] élesítették egy olyan lokális színezést definiálva amely csak $O(\Delta^2 \log \log n)$ szint használ.

Természetesen a nagy színező mátrixot használva a fenti színezés létezése nyilvánvaló, és a [2] eredmények az algoritmust annyira gyorsítják amennyira az ebben a modellben csak lehetséges. Az algoritmus implementálásában hasznosnak tűnik a színező mátrix helyett a keverő permutációk alkalmazása.

A tárgykörben további eredményekért ld. pl. [1, 7].

5. EGY TOVÁBBI ALKALMAZÁS: GRÁFOK PRÁGA DIMENZIÓJA

A **Kneser gráf** $K(n, k)$ csúcshalmaza az $[n]$ k -elemű részhalmazai ahol két csúcs össze van kötve ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. A (V_1, E_1) és (V_2, E_2) **gráfok szorzata** egy olyan gráf melynek csúcshalmaza a Descartes szorzat $V_1 \times V_2$ és a szorzatgráf két csúcsa (v_1, v_2) és (w_1, w_2) össze van kötve ha (v_1, w_1) össze van kötve G_1 -ben és (v_2, w_2) össze van kötve G_2 -ben. Tehát a v_i és w_i csúcsoknak különbözniük kell. A G gráf **Prága dimenziója** (más szóval szorzat dimenziója), $\dim_P(G)$, az a minimális d amelyre a G beágyazható indukált részgráfként d darab teljes gráf szorzatába. Más formában az a minimális d melyre a G gráf csúcsai oly módon reprezentálhatóak a d dimenziós valós tér különböző vektoraival, hogy az x -et reprezentáló $v(x) = (v_1(x), \dots, v_d(x))$ vektorra az igaz, hogy az (x, y) akkor és csak akkor él ha $v_i(x) \neq v_i(y)$ minden koordinátában $1 \leq i \leq d$. Ismét egy más formában az a legkisebb d amelyre található a G -nek $\varphi_1, \dots, \varphi_d$ jószínezései (nem feltétlenül minimális számú színnel) oly módon, hogy minden két csúcs megkülönböztethető legyen és minden (a, b) párra melyek nincsenek összekötve legyen egy olyan i melyre $\varphi_i(a) = \varphi_i(b)$.

A Prága dimenziót Nešetřil, Pultr és más cseh matematikusok vezettek be. Poljak, Pultr és Rödl belátták, hogy

$$\log_2 \log_2(n/(k-1)) \leq \dim_P(K(n, k)) \leq C_k \lceil \log_2 \lceil \log_2 n \rceil \rceil \quad (7)$$

ahol $C_k \leq (k-1)^2 k$. Később (elegendően nagy n -re) belátták, hogy $C_k \leq (81/64)k^2/\ln k$, ld. [12]. Legutóbb Körner (ld. [9]) mutatta meg, hogy $C_k \leq (k/2) + o(1)$ ha $n \rightarrow \infty$, amelyről azt sejtik, hogy már a lehető legjobb. Az $n = 2k$ esetet pontosan meghatározta Lovász, Nešetřil és Pultr [11]. Többek között megmutatták, hogy d (nemtrivialis) teljes gráf szorzata valóban d . Ennek következménye, hogy $\dim_P(K(2k, k)) = \lceil \log_2 \binom{2k}{k} \rceil = 2k - O(\log k)$.

A fenti bizonyítások meglehetősen bonyolultak. Azonban az [5] következő eredménye azonnal megadja a $\dim_P(K(n, k))$ korrekt nagyságrendjét.

$$\dim_P(K(n, k)) \leq d(n, 2k-2).$$

Bár ezen eredmény nem javítja a Körner féle felső becslést, sőt C_k -ra meglehetősen gyenge korlátot ad, abban az esetben amikor k gyengén tart végtelenhez, akkor a Kierstead féle becslések egy sor új felső becslésre vezetnek. Például, $\dim_P(K(n, \log n)) = O(\log^3 n / \log \log n)$.

Hivatkozások

- [1] N. ALON, A. BAR-NOY, N. LINIAL AND D. PELEG, A lower bound for radio broadcast, *J. of Computer and System Sci.* **43** (1991), 290–298.
- [2] P. ERDŐS, Z. FÜREDI, A. HAJNAL, P. KOMJÁTH, V. RÖDL AND Á. SERESS, Coloring graphs with locally few colors, *Discrete Mathematics* **59** (1986), 21–34.
- [3] P. ERDŐS AND A. HAJNAL, On chromatic number of graphs and set-systems, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **17** (1966), 61–99.
- [4] Z. FÜREDI, Scrambling permutations and entropy of hypergraphs, *Random Structures and Algorithms* **8** (1996), 97–104.
- [5] Z. FÜREDI, On the Prague dimension of Kneser graphs, *in: Numbers, Information and Complexity*, (Bielefeld, 1998), pp. 125–128. (Ingo Althöfer, Ning Cai, Gunter Dueck, Levon Khachatrian, Mark S. Pinsker, Andras Sarközy, Ingo Wegener and Zhen Zhang, Eds.), Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 2000.

- [6] Z. FÜREDI AND J. KAHN, On the dimension of ordered sets of bounded degree, *Order* **3** (1986), 15–20.
- [7] A. V. GOLDBERG AND S. A. PLOTKIN, Efficient parallel algorithms for $(\Delta + 1)$ -coloring and maximal independent set problems, *Proc. 19th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1987, pp. 315–324.
- [8] H. A. KIERSTEAD, On the order dimension of 1-sets versus k -sets, *J. Combin. Theory Ser. A* **73** (1996), 219–228.
- [9] J. KÖRNER AND A. MONTI, Compact representations of the intersection structure of families of finite sets, *SIAM J. Discrete Math.* **14** (2001), 181–192.
- [10] NATHAN LINIAL, Locality in distributed graph algorithms, *SIAM J. Comput.* **21** (1992), 193–201.
- [11] L. LOVÁSZ, J. NEŠETŘIL AND A. PULTR, On the product dimension of graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **29** (1980), 47–67.
- [12] S. POLJAK, A. PULTR AND V. RÖDL, On qualitatively independent partitions and related problems, *Discrete Applied Math.* **6** (1983), 193–205.
- [13] J. SPENCER, Minimal scrambling sets of simple orders, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* **22** (1971), 349–353.
- [14] M. SZEGEDY AND SUNDAR VISHWANATHAN, Locally based graph coloring, *Proc. 25th ACM Symposium on Theory of Computing*, 1993, pp. 201–207.
- [15] W. T. TROTTER, *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1991.
 Also see: Progress and new directions in dimension theory for finite partially ordered sets, *in: Extremal Problems for Finite Sets*, Proc. Colloq., Visegrád, Hungary, 1991 (P. Frankl et al., Eds.), *Bolyai Soc. Math. Studies* **3** (1994), 457–477.