E. BOROS – F. FÜREDI

SU UN TEOREMA DI KÁRTESZI NELLA GEOMETRIA COMBINATORIA

Estratto da «Archimede» – Fasc. 2 (1977)

FIRENZE
CASA EDITRICE FELICE LE MONNIER
1977

SU UN TEOREMA DI KÁRTESZI NELLA GEOMETRIA COMBINATORIA (*)

1. – Nella presente nota proviamo un teorema di Kárteszi [1], sfruttando un teorema relativo ai grafi completi orientati [2]; inoltre siamo riusciti a trovare una certa semplificazione della dimostrazione originale di Kárteszi.

Consideriamo un insieme di n punti di un piano euclideo, $\boldsymbol{P} = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ che non contenga nessuna terna di punti allineati. Diremo che tal insieme è un *sistema generale* di n punti. Sia $\boldsymbol{P} \cup \{X\}$ un sistema generale di $n + 1$ punti. Il numero dei triangoli determinati da punti di $\boldsymbol{P}$ che contengono il punto X per punto interno ad essi sia indicato con simbolo $f(\boldsymbol{P}, X)$. Questo numero verrà chiamato *moltiplicità di ricoprimento* del punto X mediante $\boldsymbol{P}$.

Se $\boldsymbol{P}$ è prefissato mentre X è un punto variante, il massimo valore di $f(\boldsymbol{P}, X)$ sia indicato con $f(\boldsymbol{P})$. Variando $\boldsymbol{P}$, se n è prefissato, il massimo valore di $f(\boldsymbol{P})$ – maximum maximorum – sia indicato con $U(n)$, il minimo valore di $f(\boldsymbol{P})$ – minimum maximorum – sia indicato con $u(n)$.

Un teorema di Kárteszi:

$$(1.1)\quad U(n) = \frac{n^3 - n}{24}, \text{ se } n \text{ è dispari}; \qquad U(n) = \frac{n^3 - 4n}{24}, \text{ se } n \text{ è pari}.$$

Egli ha trovato ancora alcuni risultati particolari:

$$(1.2)\qquad u(4) = U(4),\ u(5) = U(5),\ u(6) = U(6),\ u(7) < U(7).$$

Qui ci occuperemo del teorema (1.1) e daremo due dimostrazioni di esso.

2. – Un grafo completo orientato sia denotato con $\boldsymbol{T}(n)$ o brevemente $\boldsymbol{T}$. Se tre spigoli (orientati) di $\boldsymbol{T}$ formano un circuito orientato si dice *triangolo ciclico* di $\boldsymbol{T}$. Prefissando i vertici e gli spigoli di un grafo completo disegnato, si può variare la sua orientazione. Ad ogni orientazione appartiene un numero $c(\boldsymbol{T})$, il numero dei triangoli ciclici di $\boldsymbol{T}$. Prefissando il numero n, il maggiore dei numeri $c(\boldsymbol{T})$ sia denotato con $C(n)$. Come è noto – cfr. [2] –:

$$(2.1)\qquad C(n) = \frac{n^3 - n}{24}, \text{ se } n \text{ è dispari};$$

$$(2.2)\qquad C(n) = \frac{n^3 - 4n}{24}, \text{ se } n \text{ è pari}.$$

(*) Gli autori sono studenti di 3° anno dell'Università di Budapest.

Mostreremo ora un modello speciale che ha la proprietà: $c(\boldsymbol{T}) = C(n)$. A tale scopo consideriamo un $2n$-gono regolare $S_1S_2 \ldots S_{2n} = S$ inscritto in una circonferenza Γ di centro X. Ne sia ricavato un sottopoligono di n vertici

$$S_{v_1}S_{v_2} \ldots S_{v_n} = P_1P_2 \ldots P_n = \boldsymbol{P}$$

che non abbia due vertici diametralmente opposti. Siano i vertici di $\boldsymbol{P}$ e le corde P_jP_k di Γ vertici e spigoli di un grafo completo di n vertici. Dal grafo si può derivare un grafo orientato $\boldsymbol{T}(n)$ nel modo seguente: percorrendo qualunque delle corde secondo la sua direzione assegnata, il punto X stia sempre a destra. Il grafo in tal modo orientato sia denotato con $(\boldsymbol{P})^X$, cioè $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{P})^X$. Poggiando su queste convenzioni, descriveremo il modello in questione.

Se n è dispari (fig. 1) consideriamo il sottopoligono di $\boldsymbol{S}$:

$$S_1S_3 \ldots S_{2n-1} = P_1P_2 \ldots P_n = \boldsymbol{P}.$$

Con un calcolo combinatorio relativo a $\boldsymbol{P}$ si ottiene che:

$$f(P, X) = \frac{n^3 - n}{24}. \tag{2.3}$$

Se n è pari (fig. 2) consideriamo il sottopoligono

$$S_1S_3 \ldots S_{n-1}S_{n+2}S_{n+4} \ldots S_{2n} = P_1P_2 \ldots P_n = \boldsymbol{P}.$$

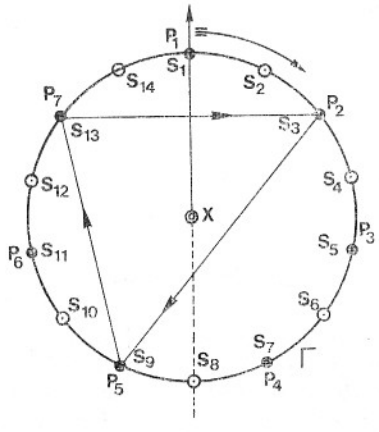

Fig. 1.

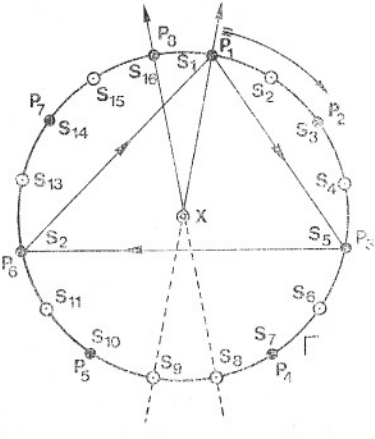

Fig. 2.

Con un calcolo simile si risulta che:

$$f(\boldsymbol{P}, X) = \frac{n^3 - 4n}{24}. \tag{2.4}$$

Confrontando le (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) e le definizioni di $\boldsymbol{P}$ e di $(\boldsymbol{P})^X$, si vede facilmente che infatti $c(\boldsymbol{T}) = c((P)^X) = C(n)$.

3. – Ci resta da esaminare l'eventualità generale, cioè il caso in cui non esista una circonferenza di centro X, che passi per ogni punto di X. Tuttavia, nel caso generale esiste una circonferenza Γ di centro X, che contiene all'interno tutti i punti di $\boldsymbol{P}$ (fig. 3); e faremo vedere come si possa ricondurre il caso generale al suddetto caso speciale (n. 2).

Indicheremo per brevità con $[AB\rangle$ la semiretta di punto iniziale A passante per B; la semiretta complementare di $[AB\rangle$ sia denotata con $[\overline{AB}\rangle$; $[AB\rangle \cup [\overline{AB}\rangle = \langle AB\rangle$, cioè $\langle AB\rangle$ è la retta che passa per A e per B.

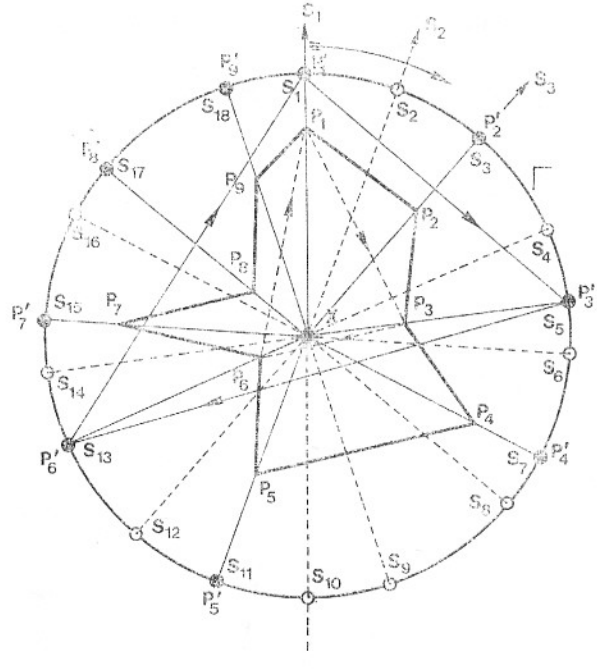

Fig. 3.

Facendo rotare $[XP_1\rangle$ – dove $P_1 \in \boldsymbol{P}$ – intorno ad X, essa tocca – ad uno ad uno – i punti di $\boldsymbol{P}$. La permutazione ciclica così ottenuta sia denotata con $P_1P_2 \ldots P_n$. I segmenti $P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_nP_1$ formano il contorno di una *stella* (poligono) *di nucleo* X. Se facciamo rotare la retta totale $\langle XP_1\rangle$, allora l'ordine delle toccate fornisce sulla circonferenza una successione di coppie di punti opposti:

$$S_1, S_{1+n};\ S_2, S_{2+n};\ \ldots;\ S_n, S_{2n}.$$

Il poligono

$$S_{v_1}, S_{v_2} \ldots S_{v_n} = P'_1P'_2 \ldots P'_n = \boldsymbol{P}'$$

non ha coppie di vertici diametralmente opposti, essendo $\boldsymbol{P} \cup \{X\}$ un sistema generale di $n+1$ punti. L'applicazione che muta $(\boldsymbol{P}, X)$ in $(\boldsymbol{P}', X)$ (fig. 3) sia denotata con Θ. Se $\boldsymbol{S}^*$ è un $2n$-gono regolare di centro X^*, allora Ω denoti l'ap-

plicazione che muta $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}', X)$ in $(\boldsymbol{S}^*, \boldsymbol{P}'^*, X)$. Se un triangolo ciclico è parte di $(\boldsymbol{P})^X$, allora l'immagine di esso secondo $\Theta\Omega$ – come si vede facilmente – sarà anche triangolo ciclico in $(\boldsymbol{P}'^*)^{X^*}$, e viceversa. Dunque – mediante la trasformazione $\Theta\Omega$ – si vede che dalle (2.1), (2.2) discende (1.1).

4. – Per svolgere il presente studio è opportuno premettere alcune proposizioni, in parte note. Cfr. Kárteszi [1], Harary [2], Busacker-Saaty [3].

Sfruttando l'applicazione $\Theta\Omega\Gamma$ (dove Γ denota la simmetria centrale di centro X^*) si può dimostrare il teorema (1.1) indipendentemente dal teorema (2.1), (2.2).

Per ottenere il risultato nel caso generale, basta considerare il caso particolare:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^*, X^* = X, \boldsymbol{P}'^* = \boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}, (\boldsymbol{P}'^*)^{X^*}$$

(fig. 4), dove $\boldsymbol{S}$ è un $2n$-gono regolare e

$$S_{v_1} S_{v_2} \ldots S_{v_n} = P_1 P_2 \ldots P_n = \boldsymbol{P},$$

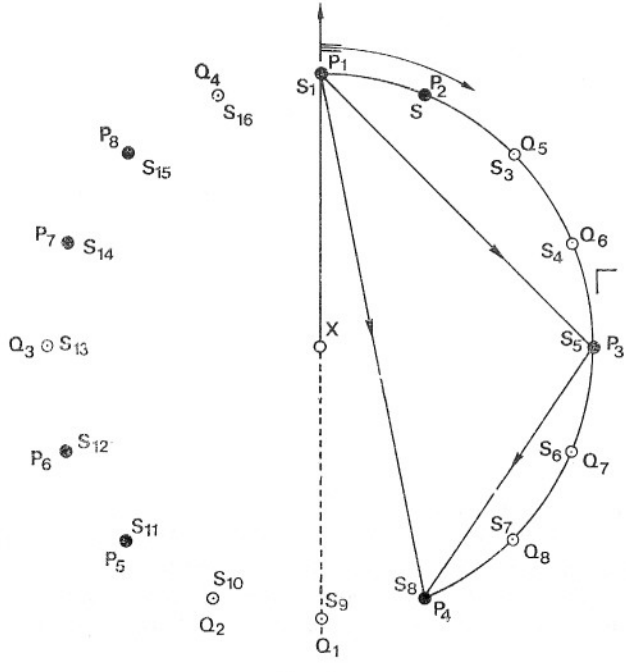

Fig. 4.

inoltre Q_k indica il punto opposto di P_k. Gli spigoli del grafo completo orientato $(\boldsymbol{P})^X$ sono le corde orientate $P_j P_k$ $(j \neq k)$ di Γ.

In un grafo orientato vi sono due tipi di spigoli per ogni vertice P_k. Corrispondentemente avremo due gradi locali: il numero $\varrho^+(k)$ di spigoli *uscenti* e il numero $\varrho^-(k)$ di spigoli *entranti*. Si vede facilmente che:

$$\varrho^+(k) + \varrho(k) = n - 1, \; n \geq k \geq 1; \tag{4.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \varrho^{+}(k) = \sum_{k=1}^{n} \varrho^{-}(k) = \binom{n}{2}. \tag{4.2}$$

Un triangolo transitivo possiede precisamente un vertice in cui s'incontrano due spigoli uscenti (lati del triangolo); similmente, esso possiede precisamente un vertice in cui s'incontrano due spigoli entranti. Contando punto per punto le coppie di tali spigoli, si ottiene il numero dei triangoli transitivi in $(\boldsymbol{P})^{X}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{\varrho^{+}(k)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \binom{\varrho^{-}(k)}{2}. \tag{4.3}$$

I triangoli ciclici, e soltanto essi, contengono all'interno il centro X. Abbiamo dunque la relazione:

$$f(\boldsymbol{P}, X) = \binom{n}{3} - \sum_{k=1}^{n} \binom{\varrho^{+}(k)}{2}. \tag{4.4}$$

Ora introduciamo un certo numero che poi ci verrà utile.

Sia $\boldsymbol{S}^{(k)} = \{S_k, S_{k+1}, \ldots, S_{k+n-1}\}$ – se $t > 2n$, allora è lecito scrivere $S_t = S_{t-2n}$ – e consideriamo il numero dei punti di $\boldsymbol{P} \cap \boldsymbol{S}^{(k)}$, che verrà denotato con $g(k)$ – $k = 1, 2, \ldots, 2n$ –.

Dalla definizione di $g(n)$ si vede facilmente che:

$$g(k) + g(k+n) = n, \quad n \geq k \geq 1; \tag{4.5}$$

$$|\, g(k+1) - g(k) \,| = 1, \quad 2n \geq k \geq 1; \tag{4.6}$$

$$g(k) = \varrho^{+}(l) + 1, \quad \text{se } S_k = P_l; \tag{4.7}$$

$$g(k) = \varrho^{-}(l), \quad \text{se } S_k = Q_l. \tag{4.8}$$

Sfruttando le (4.3) e (4.4), con un breve calcolo risulta

$$f(\boldsymbol{P}, X) = \binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{\varrho^{+}(k)}{2} + \binom{\varrho^{-}(k)}{2} \right) =$$

$$= \binom{n}{3} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} (\varrho^{+2}(k) + \varrho^{-2}(k) - \varrho^{+}(k) - \varrho^{-}(k)).$$

Tenuto conto delle (4.1), (4.7), (4.8), si può scrivere questa relazione nella forma:

$$f(\boldsymbol{P}, X) = \binom{n+1}{3} + \frac{1}{4} \left(n - \sum_{k=1}^{n} g^2(k) \right). \tag{4.9}$$

Da (4.5) segue:

$$\sum_{k=1}^{n} g(k) = n^2. \tag{4.10}$$

Poggiando sulle precedenti convenzioni e relazioni, si vede che la somma dei numeri $g^2(k)$ per $k = 1, 2, \ldots, 2n$ ammette il minimo valore – in virtù di (4.5) – se la decomposizione del numero n^2 in $2n$ parti risulta al massimo grado equabile. Ne discende senza difficoltà il teorema (1.1).

E. Boros e F. Füredi.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. Kárteszi, *Extremalaufgaben über endlichen Punktsysteme*, « Publicationes Mathematicae », Debrecen, 4, 1955.
[2] F. Harary, *The theory of tournaments: a miniature mathematical system*, « Colloquium Math. », XV, 1, 1966.
[3] R. G. Busacker e T. L. Saaty, *Finite Graphs and Networks an Introduction with Applications*, Mc Graw-Hill Book Company, New York.

Alternarsi della certezza e del dubbio.

« *L'uomo che comincia con certezze, finisce nel dubbio. Ma colui che comincia nel dubbio finisce con la certezza* ».

Francis Bacon.