PhD Értekezés Tézisei

Logika és Relativitáselmélet

(a definicióelmélet fényében)

Madarász Judit

ELTE, Budapest, 2002 február

1. Bevezetés, célok és előzmények

A matematikai logika és a relativitáselmélet összekapcsolása, együttvizsgálása nem újkeletű. Egyrészt: (1) Már a kezdetek kezdetén, tehát 1920-23 táján Einstein barátja Hans Reichenbach logikai keretek között, tisztán logikai elméletként próbálta felépíteni a relativitáselméletet máig is ható [28] könyvében. Hasonlóan, Carnap is ugyanerre törekedett pl. [8, 9]-ben már kidolgozottabb logikai apparátussal. A logika egyik legfontosabb ága a definicióelmélet lényegében a relativitáselmélet logikai igényei miatt jött létre Reichenbach [28] könyvében,[1] majd a logika hasonló szellemű tudománymetodológiai alkalmazását szorgalmazó Tarski hatására érte el modern alakját (ld. Tarski referenciák a disszertációban). Másrészt: (2) A logika felépítése előfeltételez egyfajta világképet, mely kihat a logikai fogalmak és tételek későbbi alakulására. Ebben az értelemben a relativitáselmélet és annak legújabb fejleményei (pl. Gödel téridő, Kerr téridő stb) új világképnek minősülnek[2] és visszahatnak a logika alakulására, ld. pl. Hogarth [17, 18], Etesi-Németi [11].

Jelen dolgozatban a fenti (1)-es vonulatot folytatjuk. Ebben az irányban Reichenbach és Carnap után meg kell említenünk Tarski, Gödel, Suppes, Goldblatt és mások úttörő munkáját. A közös vonás az, hogy a relativitáselméletet az elsőrendű logika esetleg többszortú (több univerzumot megengedő) változatának keretein belül kívánjuk felépíteni. Tehát a relativitáselméletet úgy képzeljük el mint a (többszortú) elsőrendű logika egy elméletét. Egy ilyen elmélet felépítése nem a vizsgálat végpontját, hanem kezdetét jelenti. Az egyik cél például a relativitáselmélet logikai szerkezetének felderítése, nyilván ezt a vizsgálatot csak a logikai felépítése után lehet elkezdeni. A célokat [2, §1.1]-ben foglaltuk össze, itt helyhiány miatt nem idézzük őket fel. Egyet azonban említenénk: Moduláris, másnéven „lego-játék" szerkezetű elméletet szeretnénk kapni, melynek hajlékonysága lehetővé teszi, hogy új szempontok felmerülésekor változtatni tudjunk az elmélet újraépítése nélkül.

Ezen relativitáselméleti vizsgálatokhoz, először a definicióelmélet továbbfejlesztésére volt szükség. A definicióelmélet új iránya Makkai Mihály akadémikus úttörő munkáira (60-as évek) továbbá Shelah, Pillay és társaik ehhez kapcsolodó frissebb eredményeire épül. Ld. [15, 27]. A lényeges nóvum a disszertációban az, hogy itt új univerzumok (új szortok) definiálását is megengedjük. A hagyományos definicióelméletben új relációkat definiáltunk régi individuumokon, míg most teljesen új individuumtartományok azaz új univerzumok definiálásán van a hangsúly.

2. Definicióelmélet új univerzumokkal

Legyen $\mathfrak{M} = \langle U_0, \ldots, U_n; R_1, \ldots, R_k \rangle$ egy modell. (U_i-k univerzumok míg R_j-k relációk [ill. függvények].) Legyen $\mathfrak{M}^+ = \langle \mathfrak{M}, U^+, \bar{R}^+ \rangle$ expanziója $\mathfrak{M}$-nek (ahol $\bar{R}^+ = \langle R_1^+, \ldots, R_r^+ \rangle$). A Σ formulahalmaz implicit definiciója $\mathfrak{M}^+$-nak $\mathfrak{M}$ felett, ha minden más hasonló $\mathfrak{M}' = \langle \mathfrak{M}, U', \bar{R}' \rangle$ expanzióra igaz, hogy ha $\mathfrak{M}' \models \Sigma$, akkor van egyetlen $h : \mathfrak{M}^+ \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{M}'$ izomorfizmus, mely identitás $\mathfrak{M}$-en.

[1] Pontosabban, Padoa már 1900-ban bejelentett egy definicióelméleti eredményt, utána Reichenbach 1920-1923, Tarski 1926, Tarski 1931 stb. (ld. 2. Tétel alatt ill. a disszertációban).

[2] Ld. pl. Gödel [13] és Yourgrau [29].

A definició általánosítása modellekről modellosztályokra a természetes módon történik. Tehát K egy modellosztály melynek K^+ expanzióját Σ impliciten definiálja K fölött ha a fenti feltétel értelemszerű általánosítása teljesül.

Legyen K, L két modellosztály (nem feltétlenül közös nyelvű). Azt modjuk, hogy K és L definiciósan ekvivalens, jelben $\mathsf{K} \equiv_\Delta \mathsf{L}$, ha van közös K^+ definiciós expanziójuk, azaz van K^+ osztály mely impliciten definiálható mind K mind L fölött. $Fm(\mathsf{K})$ jelöli a K nyelvén felírható formulákat. Tehát K-nak $\mathsf{Th}(\mathsf{K})$ elméletére igaz, hogy $\mathsf{Th}(\mathsf{K}) \subseteq Fm(\mathsf{K})$.

1. Tétel. (4.3.45, 4.3.48) *Tegyük fel, hogy* $\mathsf{K} \equiv_\Delta \mathsf{L}$ *és* K, L *axiomatizálható osztályok. Ekkor van két interpretáció* $\mathsf{tr}_1 : Fm(\mathsf{K}) \longrightarrow Fm(\mathsf{L})$ *és* $\mathsf{tr}_2 : Fm(\mathsf{L}) \longrightarrow Fm(\mathsf{K})$ *úgy, hogy ezek „igazságtartóak", jelentéstartóak, és egymás inverzei* ($\mathsf{K} \models \varphi \leftrightarrow \mathsf{tr}_1(\mathsf{tr}_2(\varphi))$), *ugyanez* L*-re, sőt* $\mathsf{K}^+ \models \{\varphi \leftrightarrow \mathsf{tr}_1(\varphi), \psi \leftrightarrow \mathsf{tr}_2(\psi) : \varphi \in Fm(\mathsf{K}), \psi \in Fm(\mathsf{L})\}$).

Intuitíve a fenti tétel azt állítja, hogy $\mathsf{K} \equiv_\Delta \mathsf{L}$ esetén $\mathsf{Th}(\mathsf{K})$ és $\mathsf{Th}(\mathsf{L})$ valójában egyetlen elmélet két különböző jelölésrendszerben felírva. A klasszikus esetben példa erre a Boole algebrák elmélete és az egységelemes Boole gyűrűk elmélete, vagy a véges halmazelmélet és a Peano Aritmetika.

Megjegyezzük, hogy a konklúzióból nem következik $\mathsf{K} \equiv_\Delta \mathsf{L}$ (míg a klasszikus esetben következett). Nyilván az implicit definiálás fenti verziója általánosítása a szokásosnak (ld. pl. Hodges [15]). Analóg módon definiáljuk az új helyzetre, hogy Σ mikor explicit definiciója K^+-nak K felett. Nem idézzük fel a részleteket, de megjegyezzük, hogy minden explicit definició egyben implicit definició is. A tradicionális explicit definició fogalomhoz hasonlóan, egy új univerzum explicit definiciója lényegében az új univerzum explicit, konkrét megkonstruálása régiekből. Pl. ha U és V régi univerzumok, akkor expliciten definiálható az $U \times V$ új univerzum. A következő Beth híres tételének általánosítása.

2. Tétel. (4.3.31, 4.3.49) *Tegyük fel, hogy* K^+ *axiomatizálható expanziója* K*-nak. Ekkor* K^+ *expliciten definiálható* K *fölött csakkor ha*
K^+ *impliciten definiálható* K *fölött.*

Fenti 2. Tétellel kapcsolatban felidézzük, hogy Hodges-Hodkinson-Macpherson [16] első oldala alján a szerzők azt írják, hogy jó lenne a (klasszikus) Beth tételt kiterjeszteni olyan esetre, ahol nemcsak új relációk, hanem új elemek is meg vannak engedve. (Jelen munkában meg vannak engedve.) Lásd még Hodges [14].

Intuitíve, a 2. Tétel szerint az explicit és az implicit definiálhatóság ekvivalens (egybeesik). Ezért a klasszikus Beth tétellel kapcsolatos „jelmondat" igaz marad az új, általánosabb szituációban is: Az impliciten definiált szimbólumok/fogalmak eliminálhatók (bármely elméletből). Ez nagymértékben megnöveli az implicit definiciók hasznosságát.

Talán illusztrálja a Beth tétel jelentőségét, hogy a kutatók (matematikusokon kivül fizika- ill. tudománymetodológusok is) régóta foglalkoznak vele. 1900-ban Padoa bizonyítás nélkül jelentette be a tételt. Tarski 1926-ban bizonyította Whitehead of Russell logikájára. 1953-ban Beth bizonyította klasszikus alakját, később Makkai Mihály, Chang és a már korábban említett modellelméleszek foglalkoztak általánosításával.

A disszertáció most tárgyalt részével kapcsolatban megemlítjük, hogy jelen szerző definicióelmélettel kapcsolatos megjelent publikációi pl. [19, 20, 21, 22, 23, 24].

3. Relativitáselmélet logikai analízise

Legegyszerűbb relativitáselméleteink egy tipikus modellje kétszortú:

$$\mathfrak{M} = \langle B, \mathfrak{F}; Obs, Ph, Ib, W \rangle,$$

ahol $\mathfrak{F}$ egy rendezett test, az univerzumok B és F, a relációk pedig Obs, Ph, $Ib \subseteq B$ és $W \subseteq B \times {}^nF \times B$ (az $\mathfrak{F}$ relációival együtt, persze), ahol F a $\mathfrak{F}$ univerzuma. Intuitíve, B a mozgó objektumok („body"-k) halmaza, ${}^nF$ az a koordinátarendszer, mellyel (vagy melynek részével) a megfigyelők koordinátázzák az események $Mn \subseteq \mathcal{P}(B)$ halmazát, Ib az inerciális „body"-k halmaza, Ph a fotonok halmaza és Obs a megfigyelők halmaza. Minden $m \in Obs$-hoz W indukál egy $w_m : {}^nF \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ függvényt, $w_m(p) := \{b \in B : W(m,p,b)\}$. Itt n a téridő dimenzióinak száma és a legfontosabb az $n = 4$ eset. $\mathcal{P}(B)$ a B hatványhalmaza. Legyen $m \in Obs$ és $b \in B$. Ekkor $tr_m(b) := \{p \in {}^nF : b \in w_m(p)\}$ a b body életútja az m megfigyelő szerint.

Törekszünk minél kevesebb, intuitíve meggyőző axiomából minél többet bizonyítani. **Pax** nevű elméletünk definiciója

$$\mathbf{Pax} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{Ax2}, \mathbf{Ax3_0}, \mathbf{Ax4}, \mathbf{Ax5_{Obs}}^{--}, \mathbf{Ax6}_{00}, \mathbf{Ax6}_{01}\},$$

ahol

Ax2 $Obs \cup Ph \subseteq Ib$
(azaz a megfigyelők[3] és a fotonok inerciálisak).

Ax3$_0$ Minden m megfigyelő az inerciális body-k életútját egyenesnek látja w_m segítségével (amelyeket lát egyáltalán).

Ax4 Minden megfigyelő a saját életútját ${}^nF$ időtengelyén látja
(azaz $W(m,p,m) \Leftrightarrow p = \langle p_0, 0, 0, \ldots \rangle$).

Ax5$_{\mathbf{Obs}}^{--}$ Intuitíve, minden irányban lehet mozogni de nem feltétlenül túl gyorsan. Részletesen: Minden m megfigyelőhöz és d irányhoz van olyan $\lambda \in {}^+F$ küszöbsebesség, hogy a λ-nál kisebb d iranyú sebességeket m minden $p \in {}^nF$ pontban realizálva látja valamely k megfigyelő által.

Ax6$_{00}$ Minden olyan eseményt, amit m lát k-val megtörténni, k is lát, ha m, k megfigyelők. Itt a „lát" azt jelenti, hogy koordinátáz w_m által. Formálisan:
$k \in e \in Rng(w_m) \;\Rightarrow\; e \in Rng(w_k)$.

Definició: $\mathsf{f}_{mk} \stackrel{\text{def}}{=} w_m \circ (w_k)^{-1}$, ha $m, k \in Obs$. Tehát
$\mathsf{f}_{mk} = \{\langle p, q \rangle \in {}^nF \times {}^nF : w_m(p) = w_k(q)\}$.
Intuitíve, f_{mk} az m világképét átviszi a k világképébe.

Ax6$_{01}$ $Dom(\mathsf{f}_{mk})$ nyílt halmaz ${}^nF$-ben, minden $m, k \in Obs$-ra.

[3]Később a gyorsuló megfigyelők vizsgálatánál ezt az axiomát kicseréljük $Ph \subseteq Ib$-re.

Később, általános relativitáselmélet irányú általánosításoknál ezeket az axiomákat alkalmasan módosítani fogjuk, pl. egyenesek helyett geodetikus vonalakat használunk (ld. §4.7 „Geodesics") és lokális alakjukat mondjuk csak ki (ld. §3 vége). A disszertáció leghajlékonyabb axiomarendszerei lokálisak az általános relativitáselmélet értelmében, pl. $\mathbf{Par}(\mathbf{Bax}^{-\oplus})$ a §3 végén és az A-27 – A-28 oldalon. Ezeknek modelljei pl. a Charette et al. [10]-ben szerkesztett CTC-s sokaságok is. Ezt itt nem idézzük fel részletesebben.

3. Tétel. (3.2.6)

(i) $\mathbf{Pax} \models$ *„az f_{mk} világképtranszformációk bijektív kollineációk ${}^nF$-en (ha m látja k-t)".*

(ii) *Ezért ha $\mathfrak{F}$-nek nincsenek automorfizmusai, akkor az f_{mk}-k affin transzformációk (lineáris + eltolás).*

Fenti tétel konklúzióját alapposztulátumként teszik fel a speciális relativitáselmélet szokásos felépítéseinél, pedig a fenti tétel szerint a speciális relativitáselmélet szokásos maradék posztulátumainak egész kicsi töredékéből már bizonyítható.

A disszertációból kiderül, hogy **Pax** annyira gyenge, hogy közös töredéke a következő elméletek mindegyikének: (i) newtoni mechanika, (ii) einsteini specrel, (iii) Lorenz-féle specrel, (iv) Reichenbach-Grünbaum féle specrel. A disszertációhoz kapcsolodó [2] publikációban az (i)-(iv) elméletek logikai kapcsolatát részletesen kivizsgáljuk, pl. adunk egy ún. transzfer-elvet, amellyel (iv) minden modellje előáll (ii) egy modelljéből (egy nagyon természetes algebrai átalakítással) es megfordítva.

Vegyük észre, hogy **Pax**-ban fotonokról vagy bármilyen elektromágneses jelenségről nem mondtunk semmit. Ezzel kapcsolatban: (i) Szerző kiterjesztette **Pax**-ot egy természetes, szemléletes es könnyen érthető **Relnoph** nevű elméletté (p.A-30), melyből már a specrel szokásos predikciói[4] mind levezethetők és mely továbbra sem beszél elektromosságról vagy fotonokról. (ii) Bővítsük **Pax**-ot néhány továbbra is gyenge foton axiomával a következő módon.

$\mathbf{Ax5_{Ph}}$ Minden megfigyelő minden irányban lát fotont mozogni (pozitív sebességgel), minden $p \in {}^nF$ pontban.

AxP1 A fotonok nem olyanok mint a „puskagolyók", nem versenyeznek. Formálisan, ha m egyirányba látja mozogni ph_1, ph_2 fotonokat ugyanabban a $p \in {}^nF$ pontban, akkor egyforma gyorsnak látja őket.

$\mathbf{Ax5_{Obs}}$ Fenti $\mathbf{Ax5_{Obs}}^{--}$-ban szereplő λ egy (d irányban p-n keresztül mozgó) fotonnak a sebessége (természetesen m „szerint").

$$\mathbf{Bax}^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Pax} \cup \{\mathbf{Ax5_{Ph}}, \mathbf{AxP1}, \mathbf{Ax5_{Obs}}\}.$$

Bármely Th elméletre
$Th^{\oplus} \stackrel{\text{def}}{=} Th +$ *„(minden foton sebessége véges minden megfigyelő szerint)".*

[4]Persze csak a foton-mentes predikciókra gondolunk.

4. Tétel. (3.2.13, 3.2.14) *Tegyük fel, hogy $n > 2$ és $\mathfrak{F}$ pozitív elemeiből lehet négyzetgyököt vonni. Ekkor:*

(i) $\mathbf{Bax}^{-\oplus} \models$ *„nincs fénynél gyorsabb (FTL) megfigyelő”.*

(ii) $\mathbf{Bax}^{-}$*-ra nem igaz (i) konklúziója.*

Fenti tételből továbblépve a disszertációban megkeressük, hogy melyek azok a leggyengébb elméletek, melyekben még bizonyítható, hogy nincs FTL megfigyelő. Ez valamilyen értelemben arra is választ ad, hogy „miért” nincs FTL megfigyelő.

A relativitáselmélet szokásos felépítéseinél a fenti 4. Tétel (i) konklúzióját axiomának szokás feltenni olyan indoklásokra támaszkodva, melyek jogosságáról, logikusságáról máig is elég intenzív vita van az irodalomban. Fenti 4. Tétel (i) alapján ezt az axiomát fölösleges feltenni, hiszen a többi nemvitatott axioma egy kis töredékéből már tételként bizonyítható. Érdekes módon, még a nagyon gondosan axiomatikus szellemű Reichenbach [28] is felteszi ezt az axiomát. Szerző fentiekkel kapcsolatos dolgozatai: pl. [1, 2, 6].

4. Relativisztikus geometria, dualitáselmélet

A relativitáselméletben tradicionálisan nagy szerepet játszik az ún. megfigyelés orientált fogalmak és elméleti fogalmak közti különbségtétel. Utóbbiakkal szemben tradicionális igény, hogy a megfigyelés orientált fogalmakból valamilyen módon definiálhatók legyenek. Ez motiválta Reichenbachot 1920 táján a (logikai) definicióelmélet kezdeményezésére. A „megfigyelhető/elméleti” megkülönböztetés mai irodalmát pl. Friedman [12] illusztrálja.

Nálunk a fentiekben tárgyalt $\mathfrak{M} \in \mathsf{Mod}(\mathbf{Pax})$ modellek felelnek meg a megfigyelés orientált fogalmak rendszerének vagy megfigyelő orientált világképnek.

A disszertációban (4.4.1 Definició) minden $\mathfrak{M}$ modell felett definiálunk egy

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle Mn, \mathsf{Lines}; \in Bw, eq, \perp, \prec, g \rangle$$

geometriát. Itt $Mn \subseteq \mathcal{P}(B)$ az események halmaza, $\in$ a szokásos illeszkedés reláció, tehát $\langle Mn, \mathsf{Lines}; \in \rangle$ ismerős geometria. $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$ definiálása ($\mathfrak{M}$ fölött) a következő szellemben történik. Ha $e, e_1 \in Mn$ rajta van egy m megfigyelő életútján, akkor $g(e, e_1)$ az az időtartam, amit m e és e_1 között lát eltelni. Pontosabban, mivel több ilyen megfigyelő lehet, ezen időtartamok minimuma $g(e, e_1)$ feltéve, hogy ez létezik. A g ilyen definiciója a Reichenbach féle relativitáselmélet szellemének felel meg. (Ezt használja pl. Busemann [7] is.) Az einsteini szellemben vett geometriát úgy kapjuk meg, hogy $g(e, e_1)$ lényegében akkor van definiálva ha van olyan m megfigyelő, amelyik valamelyik koordinátatengelyen látja e, e_1 mindegyikét (vagy ha egy foton életútján vannak, ekkor $g(e, e_1) := 0$). Ekkor az így mért távolságok minimuma $g(e, e_1)$ (feltéve ha ez létezik, különben definiálatlan). Tehát g egy „metrika” Mn-en, amit egy bizonyos szellemben származtatunk a megfigyelőkből, azaz $\mathfrak{M}$-ből. $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$ többi részét is hasonló szellemben definiáljuk $\mathfrak{M}$-ből. Pl. $e \prec e_1$ csakkor ha van m megfigyelő, aki a saját életútján látja mindkét eseményt és e-t hamarabb látja mint e_1-et. Az e, e_1 és e_2, e_3 intervallumok egybevágóak eq_0 szerint, azaz $\langle e, e_1 \rangle \, eq_0 \, \langle e_2, e_3 \rangle$ fennáll, csakkor ha van $m \in Obs$ hogy

m mindkét intervallumot tengelyen látja (nem feltétlenül ugyanazon) és egyformának „méri". Az $eq \subseteq {}^2Mn \times {}^2Mn$ binér reláció a legkisebb eq_0-at tartalmazó ekvivalencia-reláció.

Visszatérve a „megfigyelhető/elméleti" megkülönböztetésre, nálunk $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$ tartalmazza az $\mathfrak{M}$-hez asszociálható elméleti fogalmakat. Valamely Th relativitáselmélethez $\mathsf{Mod}(Th)$ a Th modelljeinek osztálya, míg $\mathsf{Ge}(Th) = \mathbf{I}\{\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}} : \mathfrak{M} \models Th\}$. Tehát $\mathsf{Ge}(Th)$ a Th-hoz asszociálható relativisztikus geometriák izomorf képeinek osztálya.

$\mathbf{Bax}^{\star}$-t úgy kapjuk $\mathbf{Bax}^{-\oplus}$-ból, hogy feltesszük, hogy a fény sebessége minden irányban egyforma (de különböző megfigyelőknek lehet különböző) és feltesszünk még néhány nagyon egyszerű egyszerűsítő vagy segéd-axiomát, pl. hogy $\mathfrak{F}$ pozitív elemeiből lehet négyzetgyököt vonni ($\mathbf{Ax}(\sqrt{\ })$), vagy hogy ha m és k életútja közös, akkor f_{mk} izometria.

5. Tétel. (4.3.38)

$$\mathsf{Mod}(Th) \equiv_{\Delta} \mathsf{Ge}(Th),$$

feltéve, hogy $Th \models \mathbf{Bax}^{\star}$ *és* $n > 2$.

Fenti tétel azt mondja, hogy nemcsak az elméleti fogalmak $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$ világa definiálható a megfigyelés orientált $\mathfrak{M}$ világból, hanem maga az egész $\mathfrak{M}$ visszadefiniálható $\mathfrak{G}_{\mathfrak{M}}$-ből. Ez az irodalomról azt mondja, hogy a relativitáselmélet ún. alulról felfelé építkező es felülről lefelé építkező közelítésmódja ekvivalens (ha feltesszük $\mathbf{Bax}^{\star}$-t). Pl. az 1. Tétel miatt van két fordítófüggvény, melyek e két elméletet egymásra lefordítják jelentéstartó módon és további szép tulajdonságokkal rendelkeznek. A 2. Tétel miatt expliciten is definiálható a két világ $(\mathsf{Mod}(Th), \mathsf{Ge}(Th))$ egymás felett.

A disszertációban fenti 5. Tétel további általanosításait és élesítéseit nyerjük. Pl. a $Th \models \mathbf{Bax}^{\star}$ feltételt erősen legyengítve még mindig kapunk egy ún. dualitáselméletet

$$\mathcal{G} : \mathsf{Mod}(Th) \longrightarrow \mathsf{Ge}(Th) \quad \text{és} \quad \mathcal{M} : \mathsf{Ge}(Th) \longrightarrow \mathsf{Mod}(Th),$$

ahol $\mathcal{G}$ és $\mathcal{M}$ két olyan „funktor", melyek ún. gyenge inverzei egymásnak. Itt a „gyenge inverz" valami olyasmit jelent, hogy a $\mathsf{Mod}(Th)$ és $\mathsf{Ge}(Th)$ világ között még mindig van egy jól használható és erős összeköttetésünk, de ez az összeköttetés már kevésbé „feszes" mint a definiciós ekvivalencia ($\equiv_{\Delta}$) az 5. Tételben. A gyenge inverz egy általános matematikai fogalom, mely kategóriaelméletben pl. adjungált funktorpárként jelenik meg, algebrai logikában pedig reprezentáció tételként (vagy reziduált párként) jelenik meg. Jelen szerző e témabeli publikált cikkei pl. [4, 5, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

Az általános relativitáselmélet irányában való általánosítás előkészületei a geodetikus fejezet (§4.7), a lokális verziók (§3 vége), a gyorsuló megfigyelők, einsteini ekvivalencia elv ([3]) és a reichenbachi verzió ([2, §4.5]).

Hivatkozások

[1] H. Andréka, J.X. Madarász, and I. Németi. Logical analysis of special relativity. In J. Gerbrandy, M. Marx, M. de Rijke, and Y. Venema, editors, *JFAK. Essays Dedicated to Johan van Benthem on the Occasion of his 50th Birthday*, http://www.wins.uva.nl/~j50/cdrom, 1999. Vossiuspers, Amsterdam University Press. CD-ROM, ISBN: 90 5629 104 1.

[2] H. Andréka, J.X. Madarász, and I. Németi. On the logical structure of relativity theories. Research report, Alfréd Rényi Institute of Mathematics, Hungar. Acad. Sci., Budapest, 2001. With contributions from A. Andai, G. Sági, I. Sain and Cs. Tőke. http://www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/Contents.html.

[3] H. Andréka, J.X. Madarász, and I. Németi. with contributions from A. Andai, G. Sági, I. Sain and Cs. Tőke. On the logical structure of relativity theories, 2001. Future edition of [2].

[4] H. Andréka, J.X. Madarász, and I. Németi. Algebraic Logic. In *Encyclopaedia of Mathematics, Supplement III*, pages 31–34. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[5] H. Andréka, J.X. Madarász, and I. Németi. Relational algebra. In A.V. Mikhalev and G.F. Pilz, editors, *Handbook on the Core of Algebra*. Kluwer, to appear.

[6] H. Andréka, J.X. Madarász, I. Németi, G. Sági, and I. Sain. Analyzing the logical structure of relativity theory via model theoretic logic. Lecture notes for A'dam course., 1998 December 12. http:www.math-inst.hu/pub/algebraic-logic/relativity1.ps, relativity2.ps.

[7] H. Busemann. *Time like spaces.* Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Math). Mathematical Istitute of Polish Academy of Sci., Warsaw, 1967.

[8] R. Carnap. *Foundations of logic and mathematics.* Chicago University Press, Chicago, 1939.

[9] R. Carnap. *The logical structure of the world.* University of California Press, Berkeley, 1967. Translated by R. G. George (Original German edition published in 1928).

[10] V. Charette, T. A. Drumm, and D. Brill. Closed timelike curves in flat Lorentz spacetimes, January 2002. arXiv:mathDG/0201199.

[11] G. Etesi and I. Németi. On the effective computability of non-recursive functions via Malament-Hogarth space-times. *International Journal of Theoretical Physics*, 2002. http://www.bu.edu/wcp/Papers/Scie/ScieDarv.htm.

[12] M. Friedman. *Foundations of Space-Time Theories. Relativistic Physics and Philosophy of Science.* Princeton University Press, 1983.

[13] K. Gödel. Lecture on rotating universes. In *Kurt Gödel Collected Works, Vol. III.*, pages 261–289. Ed. Feferman, S. Dawson, J.W. Goldfarb, W. Parsons, C. Solovay, R. N., Oxford University Press, New York Oxford, 1995.

[14] W. Hodges. Extending beth's theorem. In *Proc. 6th Easter Conference in Model Theory, Humboldt University, East Berlin (1988)*, pages 57–64, 1988.

[15] W. Hodges. *Model Theory.* Cambridge University Press, 1993.

[16] W.A. Hodges, I. Hodkinson, and H.D. Macpherson. Omega-categoricity, relative categoricity and coordinatisation. *Annals of Pure and Applied Logic*, 46(4):169–199, 1990.

[17] M. Hogarth. *Predictability, Computability, and Spacetime.* PhD thesis, Cambridge, 2000.

[18] M. Hogarth. Deciding arithmetic in Malament-Hogarth spacetimes. 2001.

[19] J.X. Madarász. The Craig interpolation theorem in multi-modal logics (extended abstract). *Bulletin of the Section of Logic*, 24(3):147–154, 1995.

[20] J.X. Madarász. Epimorphisms in discriminator varieties. In *Proc. of Workshop on Abstract Algebraic Logic*, 1998. Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra (Spain), Quaderns nùm 10/ gener 1998, pp. 106-108.

[21] J.X. Madarász. Interpolation and amalgamation; pushing the limits, Part I. *Studia Logica*, 61(3):311–345, 1998.

[22] J.X. Madarász. Interpolation in algebraizable logics; semantics for non-normal multi-modal logic. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 8(1-2):67–105, 1998.

[23] J.X. Madarász. Interpolation and amalgamation; pushing the limits, Part II. *Studia Logica*, 62(1):1–19, 1999.

[24] J.X. Madarász. Equivalence theorems, Section 6 in Chapter Algebraic Logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner, editors, *Handbook of Philosophical Logic*, volume 2, pages 208–215. Kluwer Academic Publishers, Second edition, 2001.

[25] J.X. Madarász and I. Németi. Free Boolean algebras with closure operators and a conjecture of Henkin, Monk, and Tarski. *Studia Sci. Math. Hungar. (Special issue on the 50th anniversary of the Alfréd Rényi Institute of Mathematics)*, 38:273–278, 2001.

[26] J.X. Madarász, I. Németi, and G. Sági. On the finitization problem of relation algebras. *Bulletin of the Section of Logic*, 26(3):pp. 140–145, 1997.

[27] A. Pillay and S. Shelah. Classification theory over a predicate I. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 26(4):361–376, 1985.

[28] H. Reichenbach. *Axiomatization of the theory of relativity.* University of California Press, Berkeley, 1969. Translated by M. Reichenbach. Original German edition published in 1924.

[29] P. Yourgrau. *Gödel meets Einstein. (Time travel in the Gödel universe.).* Open Court, Chicago and LaSalle, Illinois, 1999.