Relativitáselmélet Logikus Alapon

Andréka Hajnal és Németi István

Előadásjegyzet, 2010.

A jelen előadásjegyzet több ember munkájára épül, a két előadóén kívül. Madarász Judit, Németi Péter, Székely Gergely és Tordai Renáta áldozatos és lelkes munkájának gyümölcseit használjuk.

Bevezető

Relativitáselmélet. De miért logikus alapon? Minden tudományterületet érdemes logikus alapon vizsgálni, de a relativitáselméletet különösen. Azért, mert a relativitáselmélet egyetlen jól érthető szemléletes állításra épül, ennek a következményeit bontja ki. Érdemes kiépíteni tehát a relativitáselmélet logikai apparátusát, mert ezután a relativitáselmélet nyitott könyvként fog előttünk heverni.

Mi ez az egyetlen állítás? Ebben a kurzusban mindent a Fényaxiómából vezetünk le. Nem kell elhinni a Fényaxiómát, mert azzal foglalkozunk, hogy ha elfogadjuk, hogy igaz a Fényaxióma, akkor mi mindent kell még elfogadnunk, mi következik belőle. Mellesleg, meggyőző kísérletek támasztják alá, hogy elfogadjuk a Fényaxiómát mint (valószínűleg) igaz állítást. A Michelson-Morley kísérlet óta (1848) egyfolytában ellenőrzik különböző kísérletekkel a Fényaxiómát és ennek következményeit (a gyakorlati életben is, mint például a GPS rendszerrel).

Megjegyezzük, hogy Einstein a relativitáselméletet egy másik, ambiciózusabb axiómából, a Relativitás Elvéből vezette le. Többet erről ld. [1].

Miről lesz szó jelen kurzusban? Speciális relativitáselmélet, erre építve általános relativitáselmélet, beszélünk majd fekete lyukakról, féreglyukakról, téridőalagutakról, időutazásról, Baby Univerzumokról. Szó lesz még a következőkről: Einstein egyenlet, $E = mc^2$, kozmológia, gyorsulva táguló világegyetem, Lambda, és hiper-számítógép (relativistic hypercomputing), melynek működése az általános relativitáselméleten alapszik.

1. Speciális relativitáselmélet

(Formális speciális relativitáselmélet Kinematikája)

A speciális relativitáselméletet az elsőrendű logika elméleteként építjük fel, úgy mint ahogyan a halmazelmélet, csoportelmélet, vagy például a cilindrikus algebrák elmélete is elsőrendű logikai elméletek.

1.1. A formális speciális relativitáselmélet nyelve

Mik lesznek az alapfogalmaink (amiket nem analizálunk, nem bontunk több még kisebb részre ebben a nyelvben)? Mozgásról akarunk beszélni. A mozgás időbeli helyváltoztatás. Az időt és helyet koordinátákkal jelöljük meg. A mozgást különböző „megfigyelők nézik", a „megfigyelő" hangulatkeltő/színes szó arra, hogy koordinátarendszer és „nézi", „látja", „megfigyeli" színes szavak arra, hogy „koordinátázza", ayay hogy a koordinátarendszerben így van. Azokat a dolgokat, amiknek mozgását figyeljük, színes szóval „próbatesteknek" vagy „bodiknak" hivjuk (B). Ezek bármik lehetnek, amik mozoghatnak, például koordinátarendszerek (űrhajók), elképzelt eldobott absztrakt kövek (próbatestek), súlypont, fényjelek, elektromágneses hullámok (fotonok), stb. Kitűntetett testek a koordinátarendszerek (IOb, inerciális megfigyelők), és fotonok (Ph). A világképreláció (W) mondja meg, hogy egy megfigyelő mely bodikat mely koordinátapontokon „lát". A másik fajta dolog, amiről beszélünk, azok a mennyiségek, amivel koordinátázunk és a rajtuk levő műveletek (Q,+,$\cdot$). Ez fizikában legtöbbször a valós számok és a rajta értelmezett műveletek az összeadás, szorzás. Tehát a mennyiságek halmazát Q (quantities) jelöli.

Hogyan reprezentálunk mozgast? A mozgó testet berajzoljuk a (t, x, y, z) koordinátájú pontba, ha a koordinátarendszer szerinti t időpontban a b test a koordinátarendszer szerinti (x, y, z) helyen volt. Ha ezt minden t időpontra berajzoljuk, akkor kapjuk a b test *életútját* vagy *világvonalát* (komolykásabb szóval). Az életút előnye, hogy a mozgást geometriailag ábrázoltuk (annak árán, hogy egy extra dimenziót, az időt, fel kellett venni a rajzba). Gyakorlott nyomolvasó az életútból könnyen rekonstruálja a mozgást. Egyenes vonal egyenletes mozgást jelent, függőleges vonal mozgás hiánya (a megfigyelőhöz képest), minél meredekebb a vonal, annál gyorsabb mozgást ábrázol. A megfigyelő *világképe* a koordinátarendszerbe berajzolt összes életútat jelenti.

Nyelvünk alapfogalmai tehát B (bodik, próbatestek), IOb (megfigyelők), Ph (fotonok), W (világképreláció), Q (mennyiségek), + (összeadás), · (szorzás). Ezeknek az alapfogalmaknak „jelentést” majd az axiómák adnak (ugyanúgy mint pl. ahogyan a geometriában a pontoknak és egyeneseknek a jelentését az axiómák adják meg, amiket róluk kikötünk). Arról ebben az elméletben nem beszélünk, hogy a koordinátarendszerek stb. hogyan keletkeznek, hogyan épülnek fel más, elemibb fogalmakból. Később, más elméletekben majd beszélünk arról is, hogy hogyan „keletkezik” egy koordinátarendszer.

Ezekkel az alapfogalmakkal felírt elsőrendű formulákat fogunk használni. Azaz: az alapfogalmakkal mondjuk ki a tőmondatokat (pl. B(x), vagy x+y=z), és ezeket az *és*, *nem*, *következik*, *vagy* mondattani kapcsolókkal kötjük össze összetett mondatokká. A *létezik* és *minden* kvantorokkal új mondatokat csinálunk régiekből.

Összefoglalva a matematikai logika terminológiájával:

Kétszortú (kétuniverzumú) nyelvet használunk.

Szortok (univerzumok): B (bodik, „próbatestek”), Q (mennyiségek).

Reláció és függvényjelek:

Ph, IOb B-szortú egyargumentumú relációjelek (tehát $\mathsf{Ph}, \mathsf{IOb} \subseteq \mathsf{B}$),

$+, \cdot$ Q-szortú 2-argumentumú függvényjelek, azaz
$+, \cdot : \mathsf{Q} \times \mathsf{Q} \to \mathsf{Q}$,

W hatargumentumú relációjel, melynek első és utolsó argumentuma B szortú, a többi Q szortú, azaz $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{B} \times \mathsf{Q}^4 \times \mathsf{B}$.

A formulák halmaza tehát a következő:

B ill. Q szortú változójelek halmaza: $\mathsf{V}_B, \mathsf{V}_Q$ két végtelen halmaz.

Kifejezések:

B szortú kifejezések: V_B elemei.

Q szortú kifejezések: V_Q elemeiből a $+, \cdot$-el felírt kifejezések (pl. $(x+y)\cdot x$ ha $x, y \in \mathsf{V}_Q$).

Atomi formulák: $\mathsf{Ph}(x)$, $\mathsf{IOb}(x)$, $\mathsf{W}(x,u,v,w,z,y)$, $x = y$, $u = v$ ha x, y B szortú és u, v, w, z pedig Q szortú kifejezések.

Formulák: Atomi formulákból az $\wedge$ (és), $\neg$ (nem), $(\forall x)$ (minden) kvantorokkal felírt formulák (ahol x változójel).

Rövidítések: Ahelyett, hogy bevezetnénk külön B ill. Q szortú változójeleket, $(\forall b \in \mathsf{B})$ ill. $(\forall x \in \mathsf{Q})$ alakú kvantorokat használunk. Általában x, y, z, t Q szortú és b, m, k pedig B szortú változójelek. Rövidítésként használjuk a $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists x$ formulafelépítő jeleket is a szokásos módon: $\varphi \vee \psi := \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \rightarrow \psi := \neg(\varphi \wedge \neg\psi), \varphi \leftrightarrow \psi := (\neg(\varphi \wedge \neg\psi) \wedge \neg(\neg\varphi \wedge \psi)), (\exists x)\varphi := \neg\forall x \neg\varphi$. Rövidítésként használjuk majd a $+, \cdot, \leq$-ből definiált $0, 1, -, /, <, \geq, >$ stb. jeleket is, a szokásos módon.

A fenti nyelv a 4-dimenziós spec.rel nyelve. Tetszőleges $n \geq 2$ dimenziós spec.rel-ről is fogunk beszélni. Akkor a nyelven W egy $2+n$-argumentumú relációjel, $\mathsf{W} \subseteq \mathsf{B} \times \mathsf{Q}^n \times \mathsf{B}$.
Megjegyzés: Ha szokásos (nem több-szortú) nyelvet használnánk, akkor a fentivel egyenértékű lenne: $\mathsf{B}, \mathsf{Ph}, \mathsf{IOb}, \mathsf{Q}$ egyargumentumú relációjelek stb., és állandóan feltesszük a következő elméletet: $\forall x(\mathsf{B}(x) \vee \mathsf{Q}(x))$, $\mathsf{Ph}(x) \rightarrow \mathsf{B}(x), \ldots, \mathsf{W}(x,z,v,w,u,y) \rightarrow [\mathsf{B}(x) \wedge \mathsf{B}(y) \wedge \mathsf{Q}(z) \wedge \ldots \wedge \mathsf{Q}(u)]$.

Jőjjenek hát az axiómák. Érdemes lesz odafigyelni az axiómákra és egy kicsit körüljárni őket, mert ezekkel fogunk együttélni 3 hónapig.

Hivatkozások

[1] Andréka, H., Németi, I. és Tordai, R., A relativitás története. Ugyanezen a honlapon.