Házi Feladatok.

1. Házi Feladat Bizonyítsuk be, hogy Specrel független axiómarendszer. Azaz mutassuk meg, hogy
Specrel - TestAxióma $\nvdash$ TestAxióma,
Specrel - EgoAxióma $\nvdash$ EgoAxióma,
Specrel - FényAxióma $\nvdash$ FényAxióma,
Specrel - EseményAxióma $\nvdash$ EseményAxióma,
Specrel - GondKisAxióma $\nvdash$ GondKisAxióma,
Specrel - SimDistAxióma $\nvdash$ SimDistAxióma.

2. Házi Feladat Legyen

AxEvent$^-$
Az összes megfigyelő ugyanazokat a 3-as találkozásokat látja (koordinátázza):
$(\forall m, k \in \mathsf{Obs})(\forall b_1, b_2, b_3 \in \mathsf{B})(\forall p \in \mathsf{Q}^n)(\exists q)$
$[\{b_1, b_2, b_3\} \subseteq \mathsf{es}_m(p) \quad \Rightarrow \quad \{b_1, b_2, b_3\} \subseteq \mathsf{es}_k(q)$.

AxEvent^{--}
Az összes megfigyelő ugyanazokat a 2-es találkozásokat látja (koordinátázza):
$(\forall m, k \in \mathsf{Obs})(\forall b_1, b_2 \in \mathsf{B})(\forall p \in \mathsf{Q}^n)(\exists q)$
$[\{b_1, b_2\} \subseteq \mathsf{es}_m(p) \quad \Rightarrow \quad \{b_1, b_2\} \subseteq \mathsf{es}_k(q)$.

Bizonyítsuk be, hogy Specrel $-$ AxEvent $+$ AxEvent$^-$ $\vdash$ AxEvent. Melyik axiómákat kell ehhez Specrel-ből használni? Mi a helyzet AxEvent^{--}-el? (Hint: ugyanaz igaz rá.)

3. Házi Feladat Legyen Q tetszőleges lineárisan rendezett gyökvonásos (másnéven Euklidészi) test. Legyen $n \geq 2$ és $R \subseteq \mathsf{Q}^n \times \mathsf{Q}^n$ olyan, hogy $\forall abcd(R(a,b) \wedge R(c,b) \wedge R(c,d) \rightarrow R(a,d))$ (azaz $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$). Adj modellt, ahol $(\exists m,k) f_{mk} = R$. Lehet-e mindig olyan modellt is adni, amelyben AxPh igaz? Milyen R-ekre van olyan modell is, hogy $(\exists m,k) f_{mk} = f_{km} = R$?

4. Házi Feladat (Aszinkron Tétel diszkutálása)

(i) Szükséges a $v_m(k) \neq 0$ feltétel a tételben? Ha $v_m(k) = 0$, akkor Aszinkron Tétel hogyan néz ki? Ha $v_m(k) > 1$?

(ii) Bizonyítsuk Aszinkron Tételt AxField helyett a gyengébb "$\langle \mathsf{Q}, +, * \rangle$ nem 2-karakterisztikájú test" feltétel mellett (nincs rendezés, nincs $\sqrt{\ }$, de $1+1 \neq 0$). Mi van a 2 karakterisztika mellett? Mi van $\neq 2$ karakterisztikájú nullosztómentes gyűrűkben?

(iii) Aszinkron Tétel hogyan változik, ha AxPh helyett csak AxPh$^-$-t használunk (ez volt az intuitív foton axióma):

Ax3$^-$(Intuitív Fény Axióma, AxPh$^-$)
Minden megfigyelőhöz van egy pozitív c szám, hogy a megfigyelő világképében a fotonok életútjai pontosan a c dőlésszögű (azaz c sebességű) egyenesek:

$(\forall m \in \mathsf{Obs})(\exists c_m \in \mathsf{Q}, c_m > 0)(\forall \ell \subseteq \mathsf{Q}^n)$
$[(\exists ph \in \mathsf{Ph})\ell = \mathsf{ut}_m(ph) \;\Leftrightarrow\; (\ell \text{ egyenes} \wedge \mathsf{slope}(\ell) = c_m)]$.

(Hint: Ha az Aszinkron Tételben AxPh helyett AxPh$^-$-t használunk akkor a k szimultanitásainak dőlésszöge az m világképebeli mozgássíkban v/c_m^2.)

5. Házi Feladat Tegyük fel, hogy $n > 2$, és felhasználhatjuk, hogy $\mathsf{Specrel}_0 \vdash (\forall m, k \in \mathsf{Obs})(\mathsf{ut}_m(k)$ egyenes). Bizonyítsuk a következőket.

(1) $\mathsf{Specrel} \vdash$ "f_{mk} affin (azaz lineáris komponálva eltolás) transzformáció", minden $m, k \in \mathsf{Obs}$-ra.

(2) $\mathsf{Specrel} \vdash (\forall m, k \in \mathsf{Obs})v_m(k) = v_k(m)$.

(3) $\mathsf{Specrel}_0 \vdash (\forall m, k \in \mathsf{Obs})v_m(k) < 1$.

(4) $\mathsf{Specrel}_0 \nvdash$ "f_{mk} affin (azaz lineáris komponálva eltolás) transzformáció", minden $m, k \in \mathsf{Obs}$-ra.

(5) $\mathsf{Specrel}_0 \nvdash (\forall m, k \in \mathsf{Obs})v_m(k) = v_k(m)$.

6. Házi Feladat Bizonyítsuk be, hogy a Relativisztikus Távolság Tétel nem igaz az $n \geq 3$ feltétel nélkül. Milyen változtatással marad igaz az $n = 2$ esetre is?

7. Házi Feladat Tfh. $n \geq 3$, $\mathfrak{M} \models \mathsf{Specrel}$, és e, e' különböző események. Legyen $I = \{\mathsf{ikül}_m(e, e') : m \in \mathsf{Obs}\}$ és $T = \{\mathsf{ttáv}_m(e, e') : m \in \mathsf{Obs}\}$. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi 3 eset valamelyike fennáll.

(a) $I = T = \{a \in \mathsf{Q} : a > 0\}$.

(b) $I = \{a \in \mathsf{Q} : a \geq 0\}$ és $T = \{a \in \mathsf{Q} : a \geq b\}$ valamely $b > 0, b \in \mathsf{Q}$-ra.

(b) $I = \{a \in \mathsf{Q} : a \geq b\}$ és $T = \{a \in \mathsf{Q} : a \geq 0\}$ valamely $b > 0, b \in \mathsf{Q}$-ra.

8. Házi Feladat Bizonyítsuk be, hogy a $\mathsf{Specrel}$–AxEv elméletben a "megfigyelőfüggetlen struktúra" csak a fényegyenesekből áll. (Tehát majdnem semmitmondó.) Mondjuk ki a tételt! (Ez a nehezebb része a HF-nek.) Mi történik, ha a szimmetria axiómát is elhagyjuk?

9. Házi Feladat Bizonyítsuk be, hogy az a sugarú Minkowski-kör belső gyorsulása $1/a$!

10. Házi Feladat Bizonyítsuk be, hogy az állandó gyorsulású megfigyelő világképében igaz az Együttmozgó Axióma!

11. Házi Feladat Bizonyítsuk be, hogy az állandó gyorsulású megfigyelő világképében igaz, hogy

$$\mathsf{együtt}(m, h, e) \to a_m(h)(\mathsf{loc}_m e) = a_h(m)(\mathsf{loc}_h e)\,.$$

Tehát a gravitációt (ill. belső gyorsulást) lehet elengedett almák gyorsulásával mérni.

12. Házi Feladat Rajzoljuk meg, hogy az állandó gyorsulású megfigyelő hogyan látja az együttmozgó inerciális megfigyelő koordinatavonalait a világképében! Rajzoljuk meg először, hogy az inerciális megfigyelő $\overline{t}$-vel párhuzamos koordinatavonalait hogyan látja a gyorsuló megfigyelő világképében. Aztán rajzoljuk meg, hogy az inerciális megfigyelő "vizszintes" koordinatavonalait hogyan látja a gyorsuló megfigyelő. Aztán rajzoljuk fel az egesz négyzetrácsot a gyorsuló megfigyelő világképében!