Fekete lyukak elmélete

Idáig a gyorsuló megfigyelők világképét vizsgáltuk, ez sugallta az áltrel téridők definícióját. Most rátérünk a fekete lyukak téridejének vizsgálatára.

Miért fontos a fekete lyukak elmélete?

- tipikus áltrel téridő
- sok más téridő épül erre
- relativisztikus gravitáció legegyszerűbb formája (1 pontban van az összes gravitáló tömeg)
- gravitációs tere idealizációja a napénak.

Hangsúlyozzuk: sokfajta fekete lyuk van, most a legegyszerűbbet nézzük (az un. Schwarzschild fekete lyukat). Érdekesebb fekete lyukakat tárgyalunk később.

Schwarzschild fekete lyuk térideje a gyorsuló világképéből

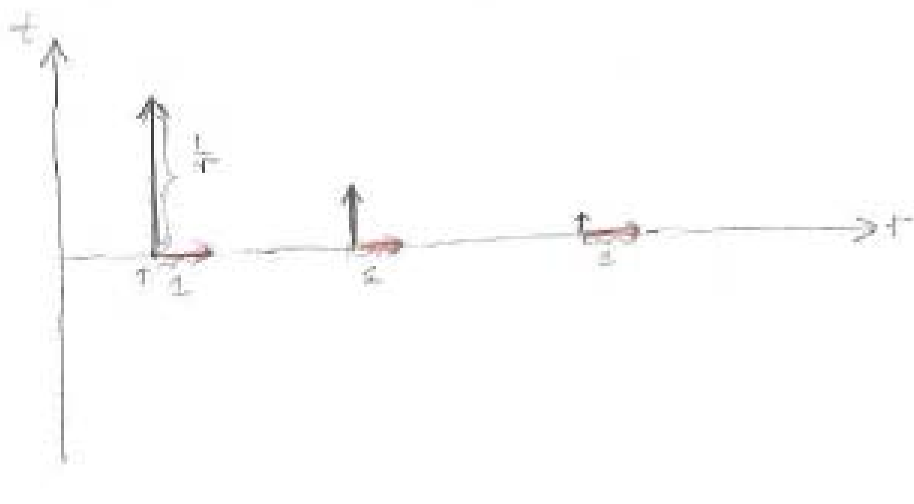
Idézzük fel a gyorsuló megfigyelő téridejét, mert az lesz a kapaszkodó a különböző fekete lyukak téridejének kiépítéséhez.

Az állandó gyorsulású megfigyelő világképét azért tanulmányoztuk, mert az Einsteini Ekvivalencia Elv (EEP) szerint „gravitáció = gyorsulás”. Egyenesvonalú mozgásokat néztünk, ezért lényegében 2 dimenziós világképeket kaptunk. Az ebből legyártott téridő ez volt:

(M, G_t, G_r), ahol $M=\{ (t,r)\in R^2 \ : \ r>0\}$ és

$G_t(t,r)=(1/r,0)$, $G_r(t,r)=(0,1)$.

Azaz, $G_t(p)$ a t idő-tengellyel párhuzamos $1/|\text{tér}(p)|$ hosszú vektor, és $G_r(p)$ sugárirányú 1 hosszú vektor (az x koordinátát r –el jelöltük, hogy emlékeztessen arra, hogy majd ez a sugárirányú viselkedést írja le, 4 dimenzióban is).



Most a 2 dimenzióból megyünk a 4 dimenzió felé. Gömbszimmetrikus pontszerű gravitáló tömeget vizsgálunk. Legtermészetesebb folytatás az lenne, hogy az eddig kapott 2 dimenziós gyorsuló világképet egyszerűen megforgatnánk az origó körül. Így azt a téridőt kapnánk ahol $G_t(p)$, $G_x(p)$ olyan mint eddig, azaz $G_t(p)$ a t tengellyel párhuzamos $1/|tér(p)|$ hosszú vektor, $G_x(p)$ sugárirányú 1 hosszú vektor, továbbá azt akarjuk, hogy csak a sugárirányban történjen valami, a sugár-időtengely síkra merőlegesen „ne történjen semmi", azaz $G_y(p)$, $G_z(p)$ 1 hosszú vektorok, melyek merőlegesek egymásra és a t időtengelyt és p pontot tartalmazó S síkra is.

Így a következő téridőt kapnánk:

(M, G_t, G_x, G_y, G_z), ahol $M=\{ (t,x,y,z)\in R^4 \ : \ x\neq 0\}$ és

ha $p=(t,x,y,z)$, akkor

$G_t(p)$ hossza $1/|tér(p)|$, iránya párhuzamos a t idő-tengellyel,

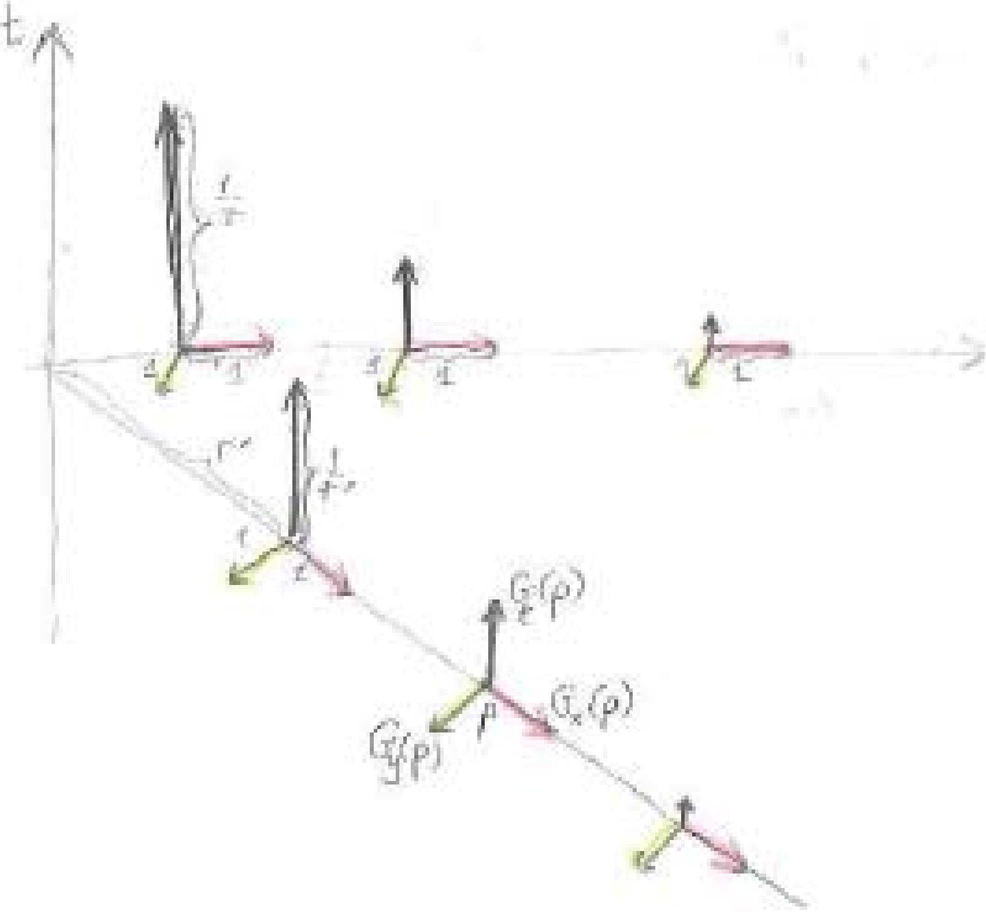
$G_x(p)$ hossza 1, iránya megegyezik az origót a p –vel összekötő egyenesével,

$G_y(p)$, $G_z(p)$ hossza 1, merőlegesek egymásra, a t időtengelyre, és az 0p-sugárra.

(Ha számszerűen akarjuk felírni, akkor pl. a következő jó lesz:

$G_t(p)=(1/r,0,0,0)$, $G_x(p)=(0,x/r,y/r,z/r)$,
$G_y(p)=(0,-y/r,x/r,0)$, $G_z(p)=z^2/(r^2(r^2-z^2))(-x,-y,(r^2-z^2)/z)$,

ahol $r=|\text{tér}(p)|$.) Ld. a rajzot.



A fenti téridőt három módon meg kell változtatni.

Az alábbiakban csak a G_t és G_x vektormezőket fogjuk változtatni. Sőt, az itteni vektoroknak is csak a hosszát fogjuk változtatni, irányát nem.

1. Tudjuk, hogy az eseményhorizont-gömb sugara nem zérus. Változtatás: Az eseményhorizontot tegyük az $r=1$ helyre (eddig az $r=0$ helyen volt). (Az egyszerűség kedvéért itt a $2m$ tömeget 1 –nek vettük.) Az így kapott téridőben:

$$|G_t(p)| = 1/|r-1|, \qquad |G_x(p)| = 1 \qquad \text{és}$$

$$M=\{ (t,x,y,z)\in R^4 \ : \ x\neq 0,1\} .$$

2. Gömbszimmetria miatt a gravitáció hatása gömb felületén oszlik szét, ezért $1/r^2$ –el kéne lecsengjen (itt $1/r$ –el cseng le), és limeszben („végtelen távol a fekete lyuktól) a Minkowski téridőhöz kéne tartson. Jelenleg a G_t vektor limeszben 0-hoz tart. Változtatás: A G_t vektor hosszát $1/|r-1|$ –ről $1/|r-1| + 1 = r/|r-1|$ -re változtatjuk. Az így kapott téridőben:

$$|G_t(p)| = r/|r-1|, \qquad |G_x(p)| = 1.$$

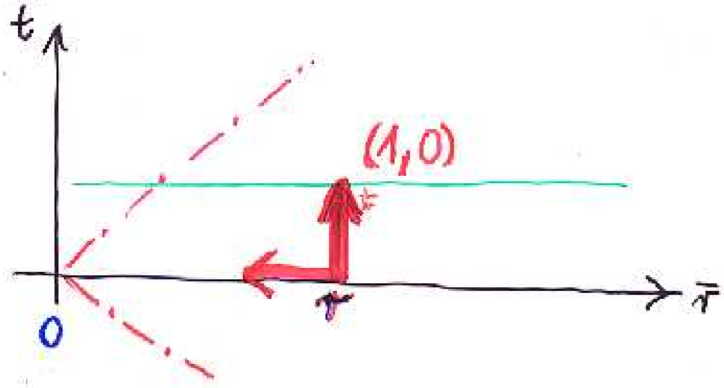
3. A G_x, G_y, G_z vektorok hossza jelenleg mindenütt mereven 1, azaz a „tér rész” Euklideszi. Tudjuk, hogy ez nem így van. Idáig minden változtatást a G_t vektorra „terheltünk”. Változtatás: a „terhelést elosztjuk” a G_t és G_x vektorok között, azaz mindkettőt elosztjuk $(r/|r-1|)^{1/2}$ –el. Az így kapott téridő:

$$|G_t(p)| = (r/|r-1|)^{1/2}, \qquad |G_x(p)| = (r/|r-1|)^{-1/2} .$$

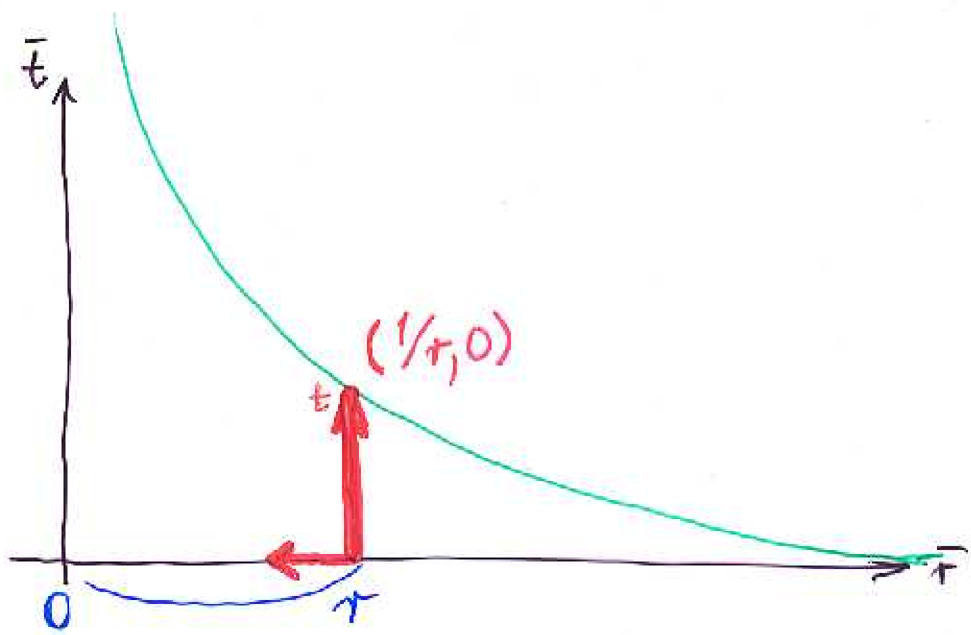
Amit így kaptunk, az a Schwarzschild fekete lyuk téridеje. Ez az egyetlen gömbszimmetrikus és statikus („időben nem változó”) megoldása az Einstein vákuum-egyenletnek (Birkhoff tétel).

A Schwarzschild téridő megadása metrikus alakban és cilindrikus-polár koordinátákban

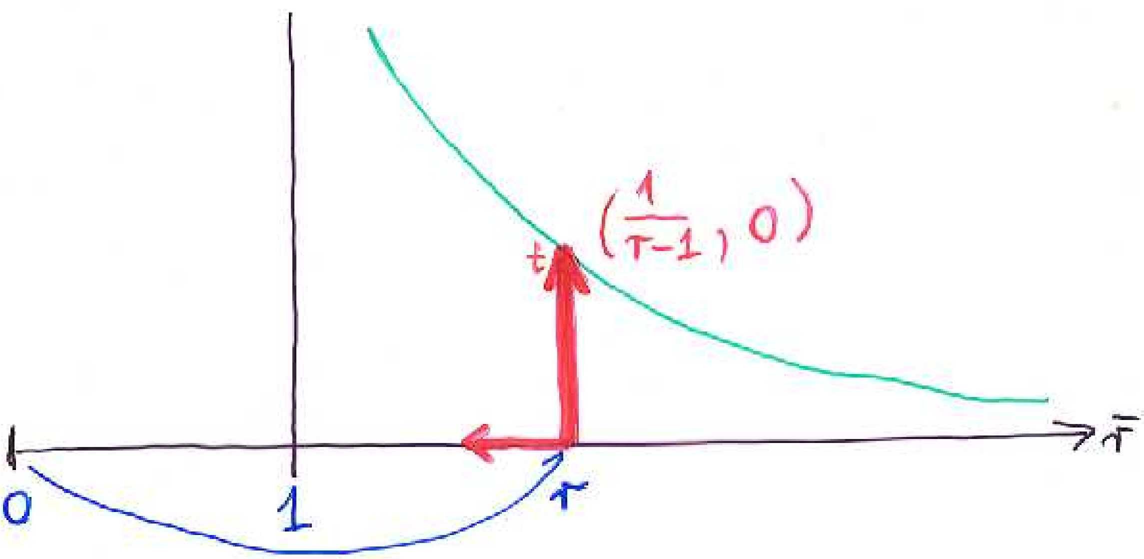
$$ds^2 = (1-1/r)dt^2 - (1-1/r)^{-1}dr^2 - r^2d\varphi^2.$$



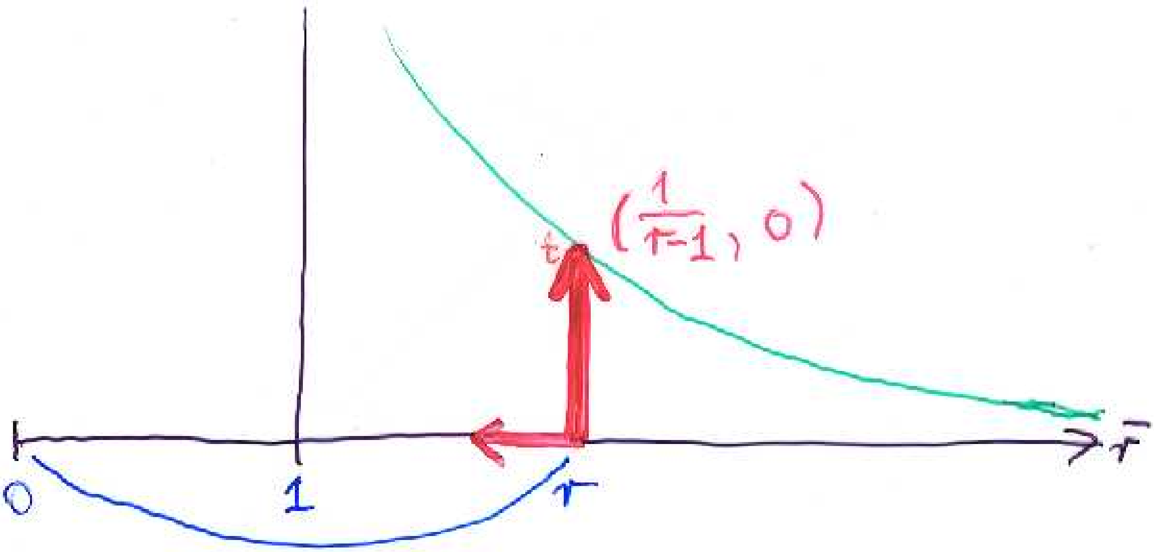
$\bar{t}$
$(1,0)$
t
0
r
$\bar{r}$



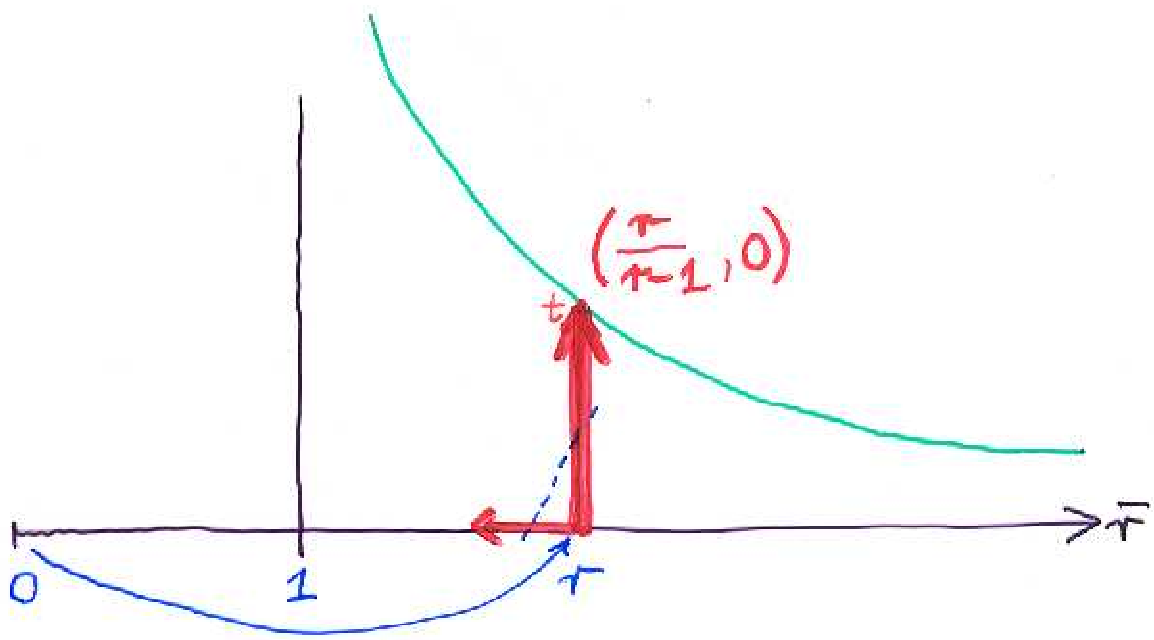
$\bar{t}$
$(1/r, 0)$
t
0
r
$\bar{r}$



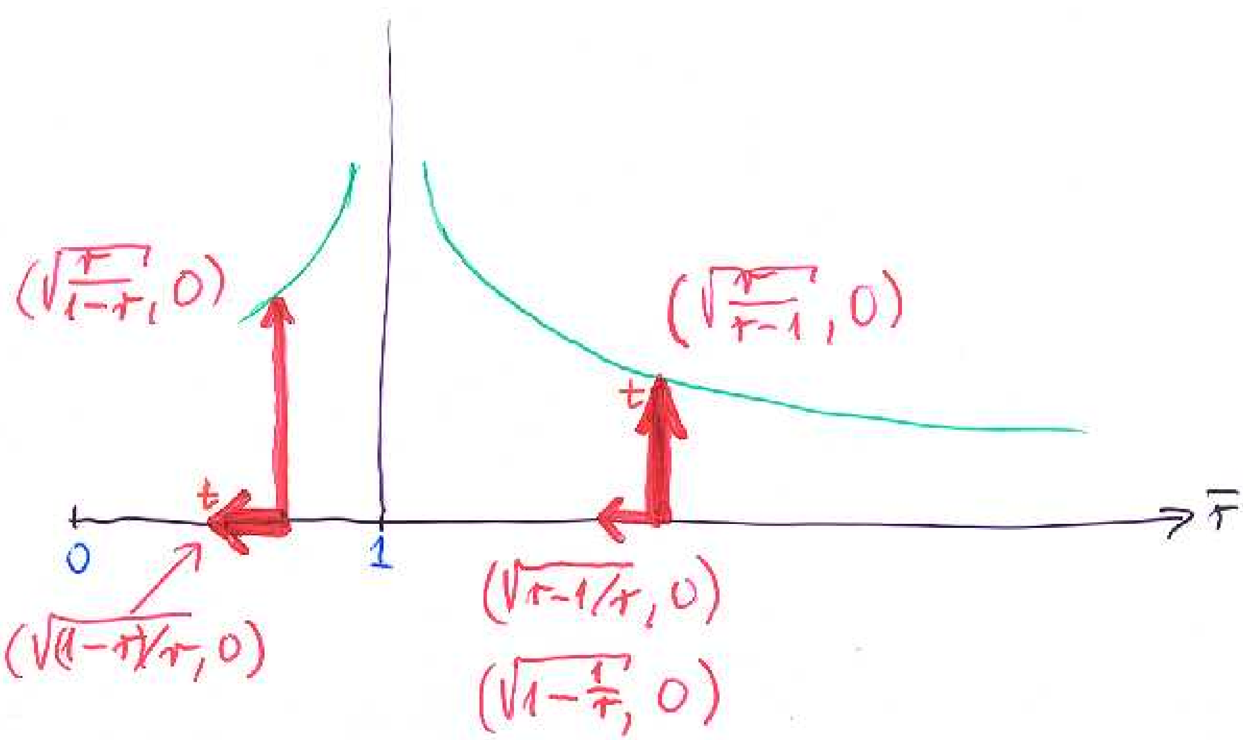
$\left(\frac{1}{r-1}, 0\right)$
t
$\bar{r}$
0
1
r



$\left(\frac{1}{r-1}, 0\right)$
t
0
1
r
$\bar{r}$



$\left(\frac{r}{r-1}, 0\right)$
t
0
1
r
$\bar{r}$



$\left(\sqrt{\frac{r}{1-r}}, 0\right)$
$\left(\sqrt{\frac{r}{r-1}}, 0\right)$
t
t
0
1
$\bar{r}$
$\left(\sqrt{(1-r)/r}, 0\right)$
$\left(\sqrt{r-1/r}, 0\right)$
$\left(\sqrt{1-\frac{1}{r}}, 0\right)$

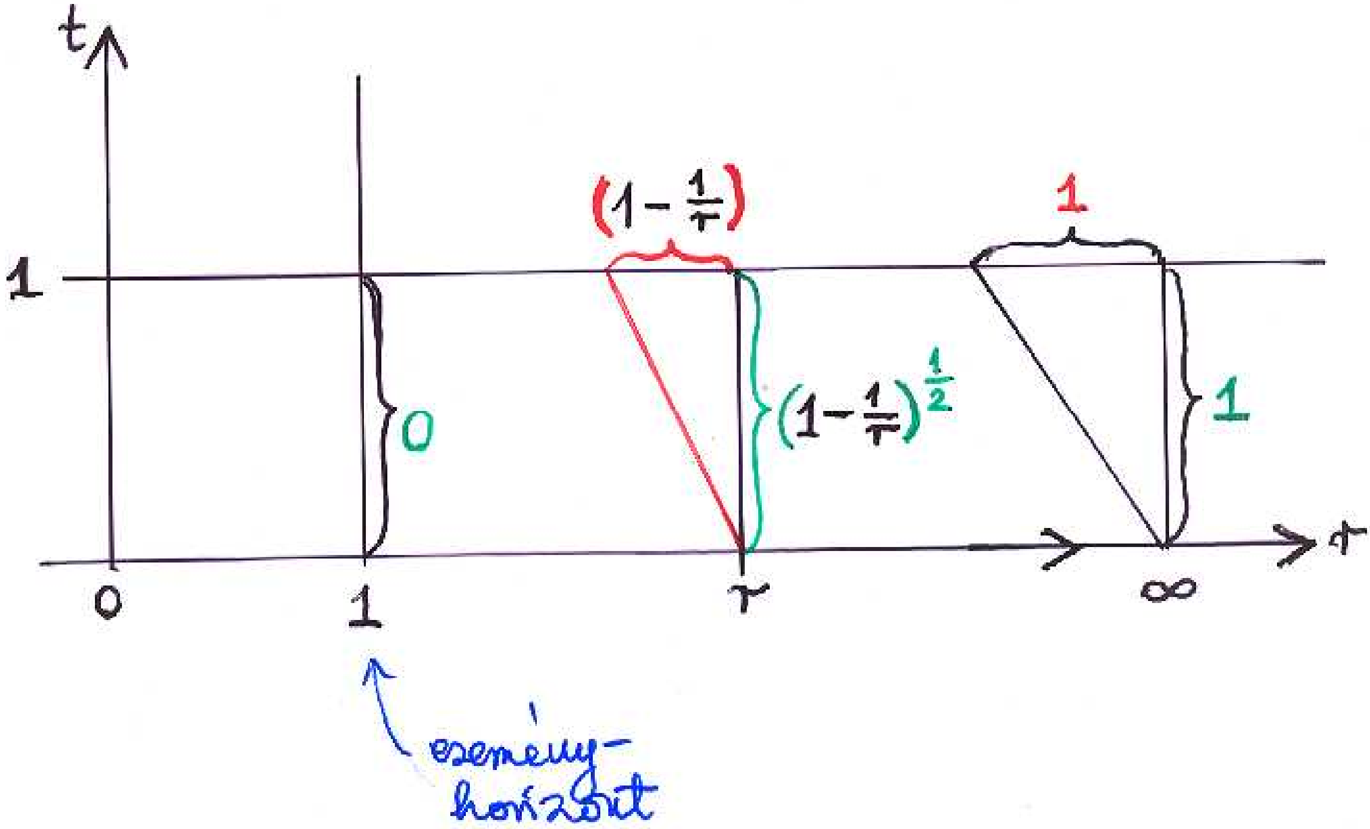
SCHW FEKETE LYUK METRIKÁJA

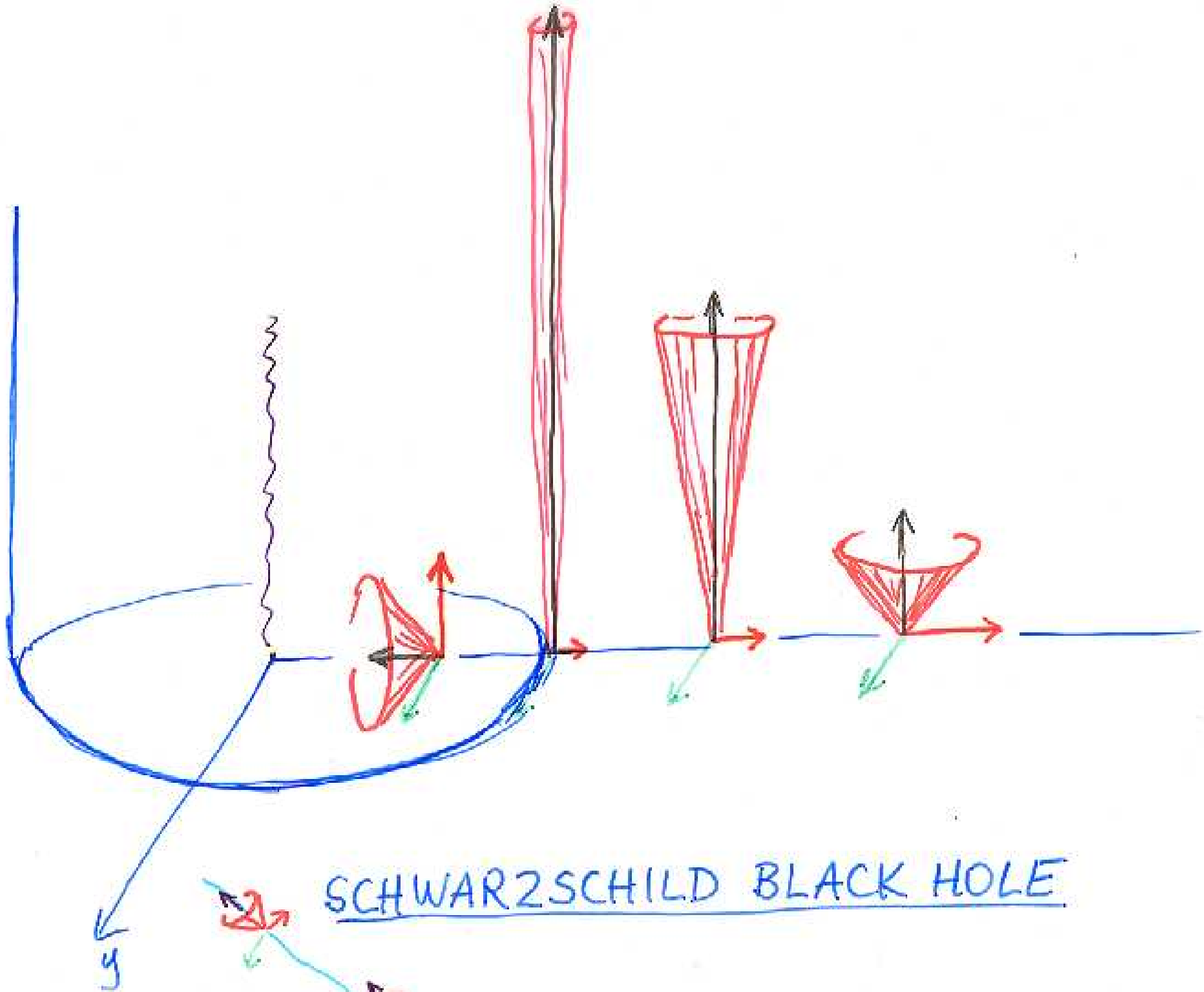
$$ds^2 = \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{r}\right)}dt^2 - \underbrace{\left(1-\tfrac{1}{r}\right)^{-1}}dr^2 - \underbrace{r^2 d\varphi^2}$$

megmondja, h. mennyit mutat a lokális hangya órája 1 órakor

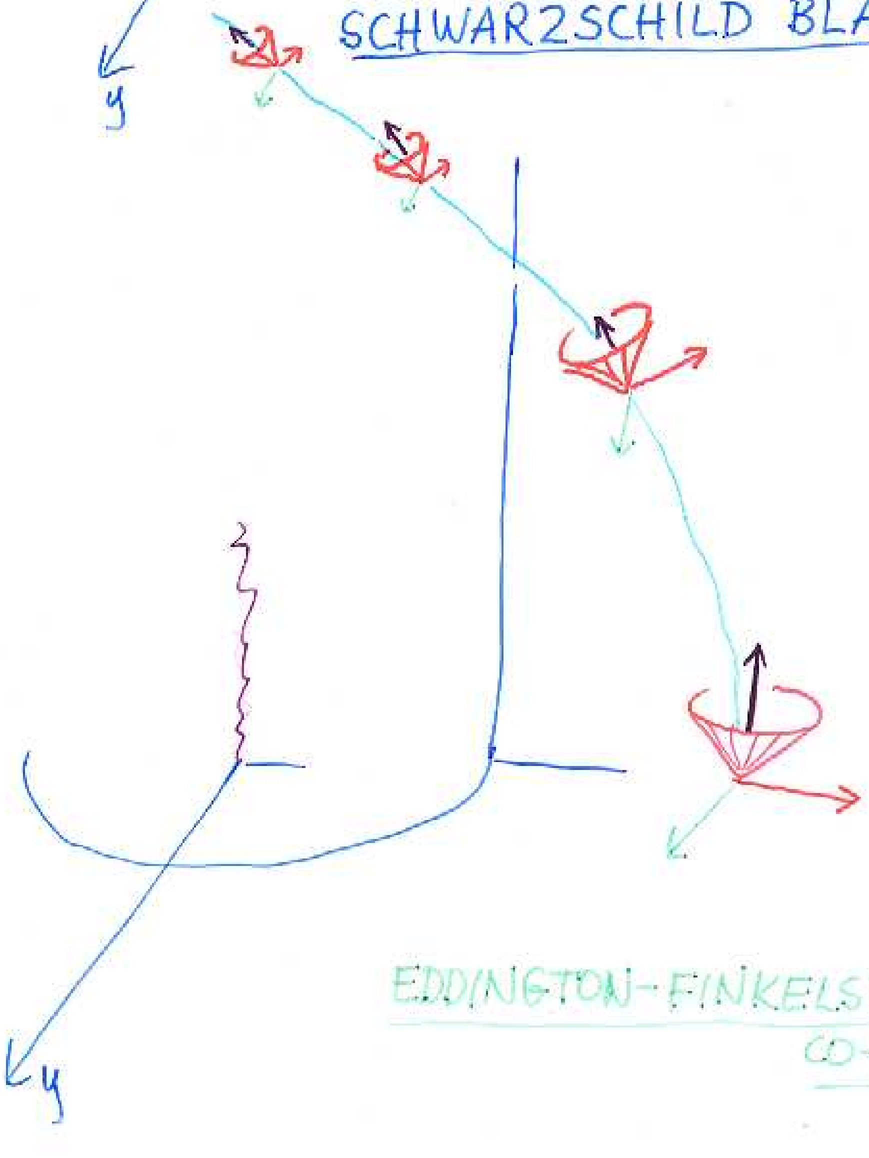
megmondja, h. milyen "szűk" a helyi fénykúp

triviális: Euklideszi

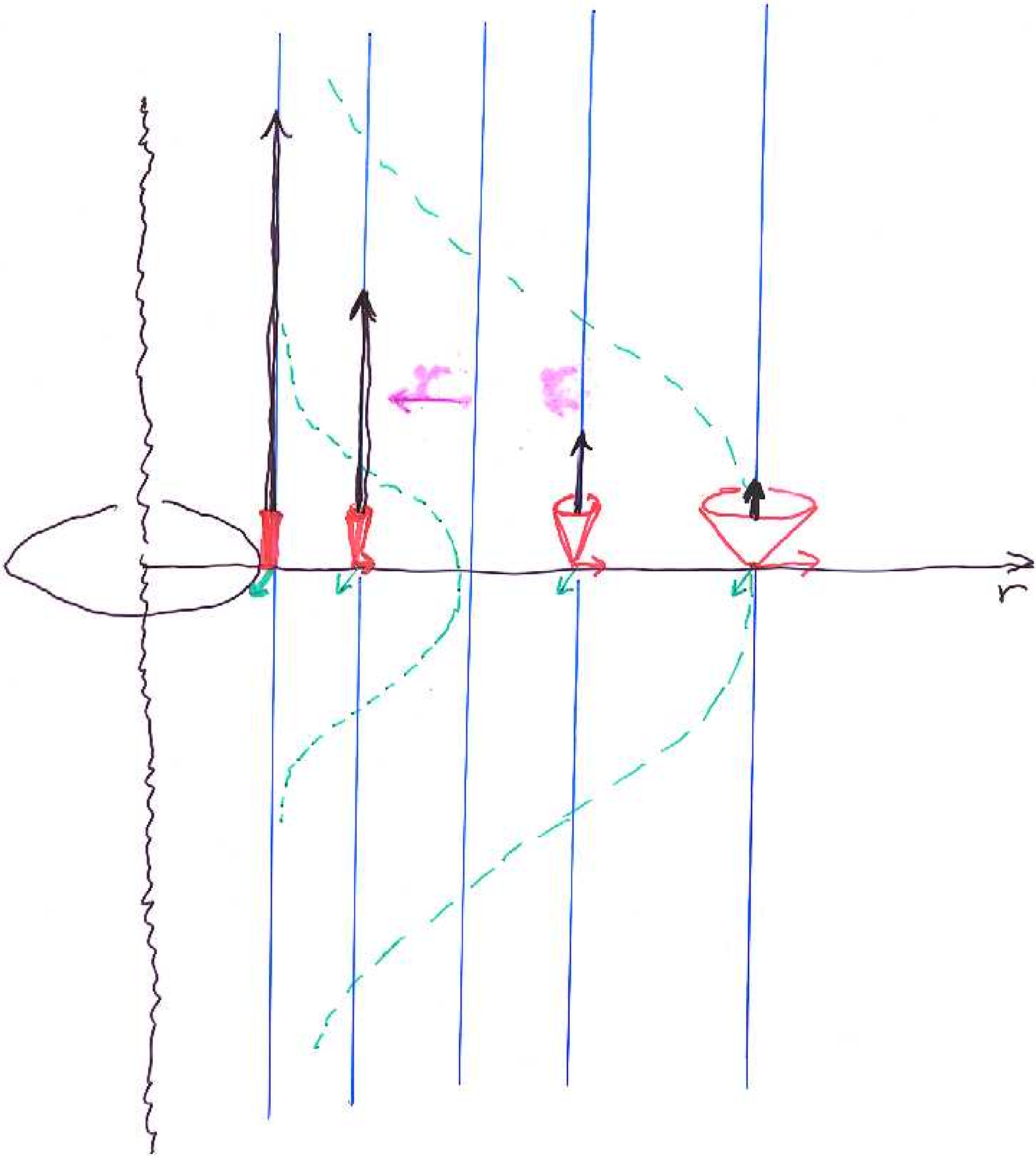


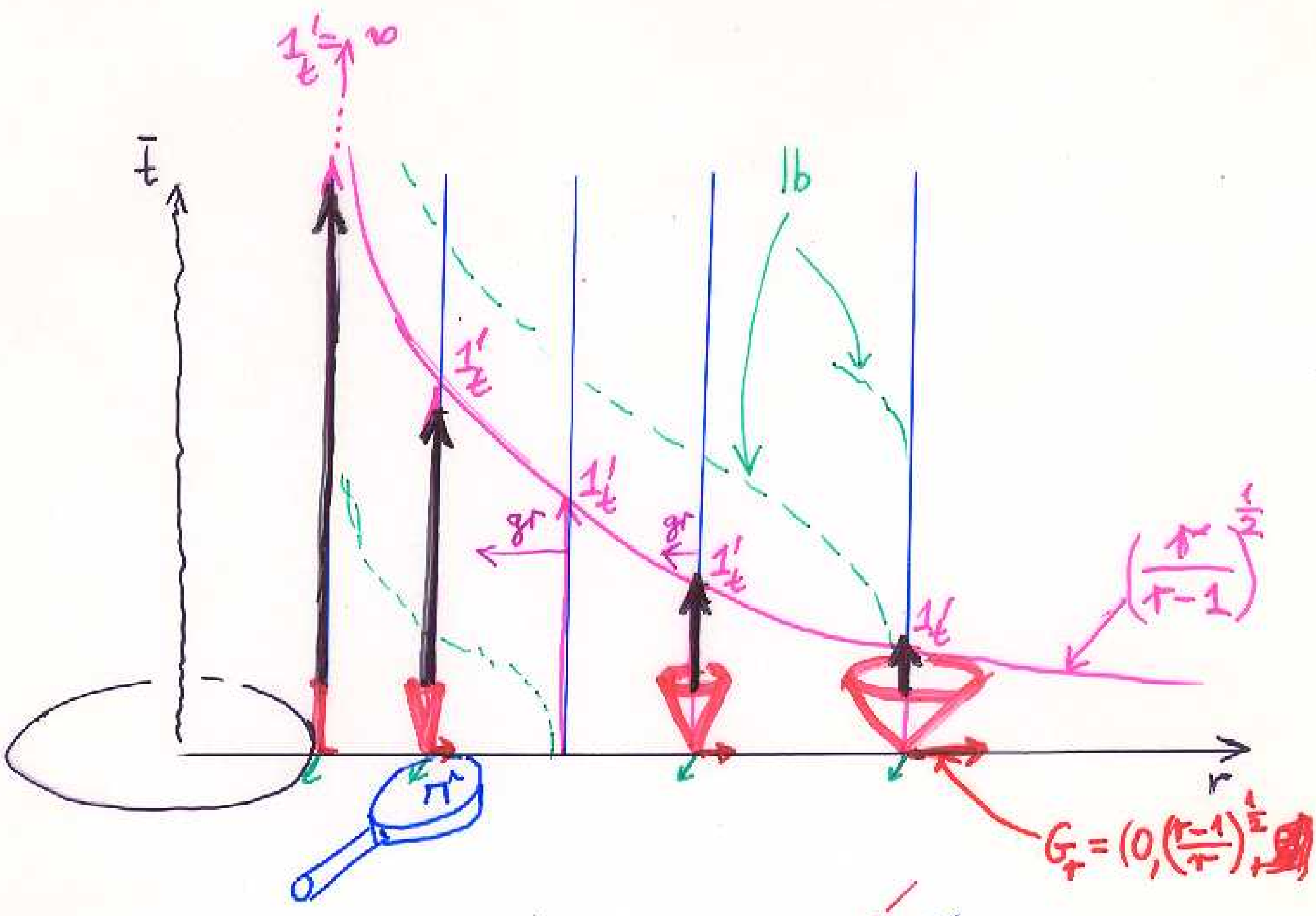


SCHWARZSCHILD BLACK HOLE

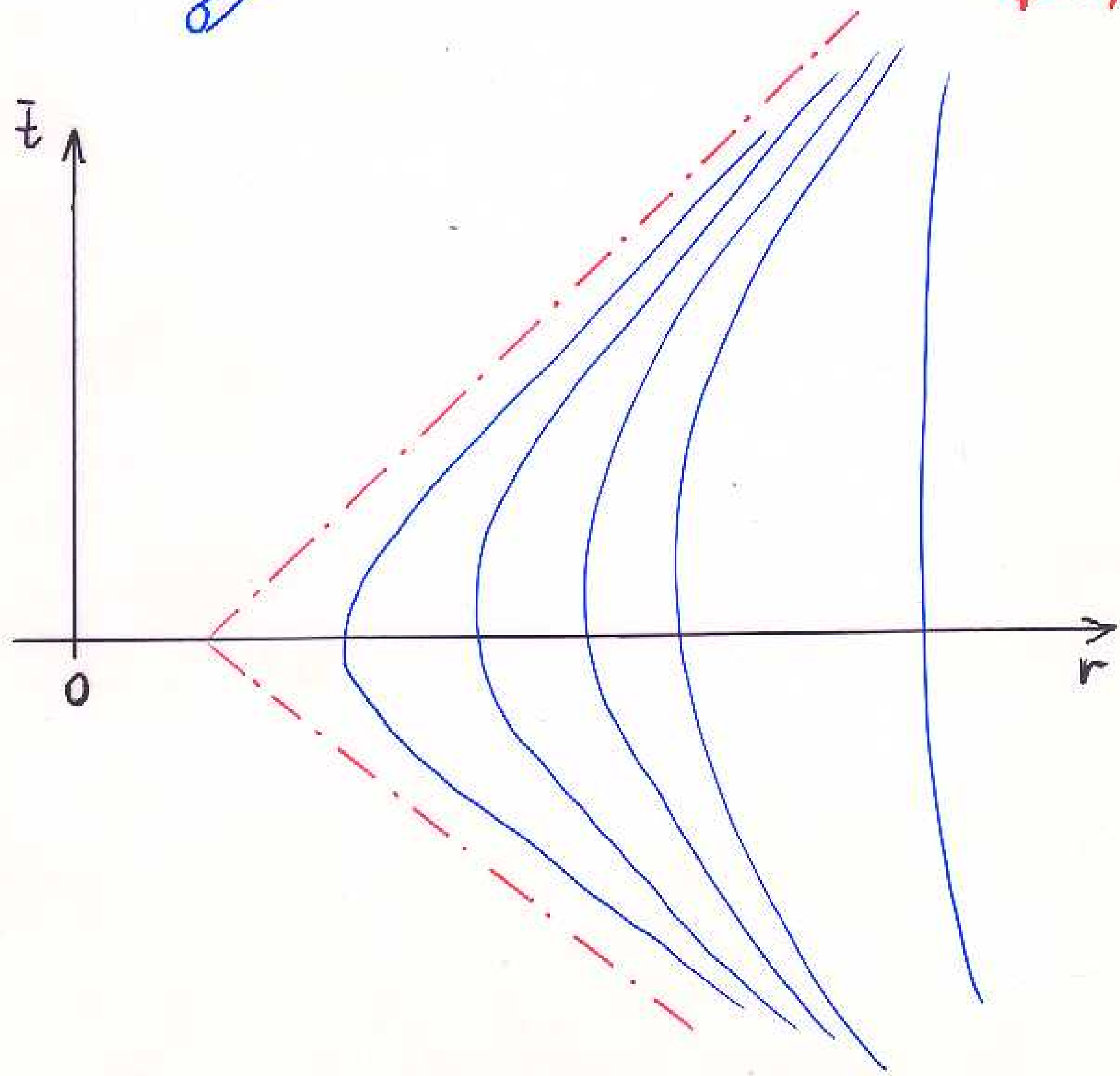


EDDINGTON-FINKELSTEIN CO-ORDINATIZATION


r



$1'_t = \infty$
$\bar{t}$
lb
$1'_t$
gr
$\left(\frac{r}{r-1}\right)^{\frac{1}{2}}$
r



$\bar{t}$
0
r