Áltrel Téridőmodell

Idea: lokálisan Specrel.

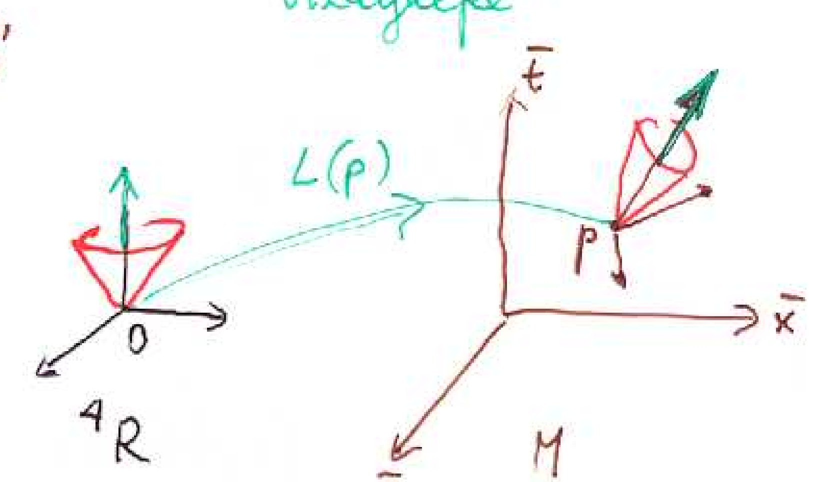
<u>Def.</u> Áltrel téridőmodellnek egy (M, L) párt nevezünk, ahol
$M \subseteq {}^4\mathbb{R}$ nyílt részhalmaz és
L minden $p \in M$-hez megad egy
$L(p): {}^4\mathbb{R} \to {}^4\mathbb{R}$ bijektív affin leképezést, mely az origót p-be viszi, és L "sima". $\square$

"sima" = "akárhányszor deriválható"

(M, L)

"fogas", "nagy, globális koordináta-rács" "közös nevező"

"lokális Specrel megfigyelők világképe"



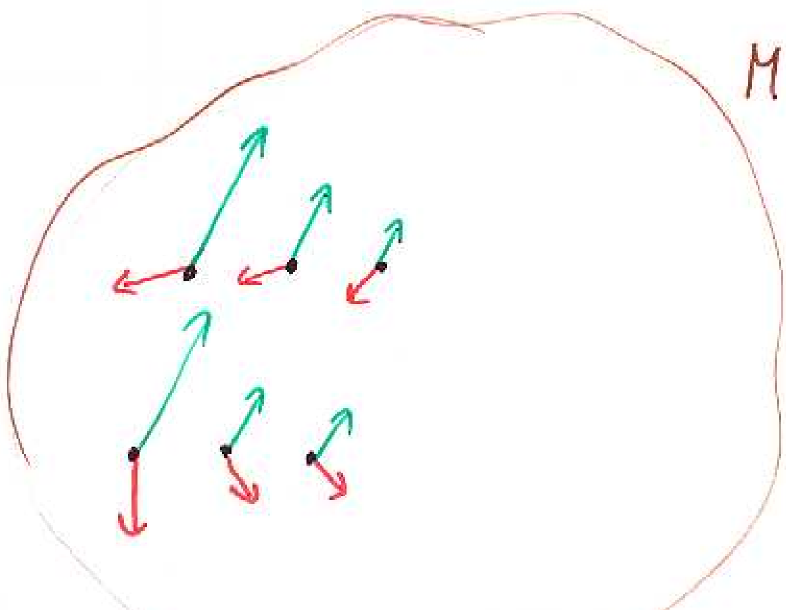
$L(p)$ megadja lokális fénykúpot és hogy idő hogyan telik lokális $\bar{t}$ tengelyen.

Ekvivalens definíció:

$L(p)$ ekvivalens azzal, hogy megadjuk az $1_t, 1_x, 1_y, 1_z$ egységvektorok képét. Tehát

L megadása ekvivalens azzal, hogy megadunk 4 sima vektormezőt M-en úgy, h. $\forall$ pontban a 4 vektor lineárisan független.

$$\left\langle G_t(p),\ G_x(p),\ G_y(p),\ G_z(p) \right\rangle_{p\in M}$$



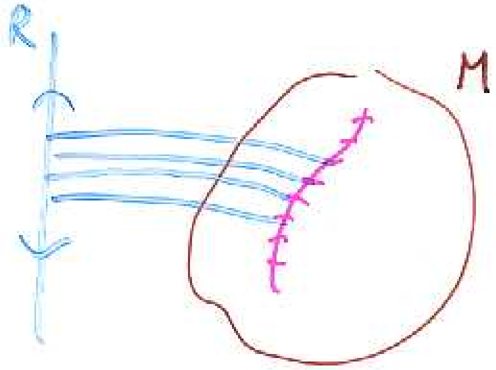
$G_t : M \longrightarrow {}^4R$ sima vektormező.

Mire, hogyan használjuk?

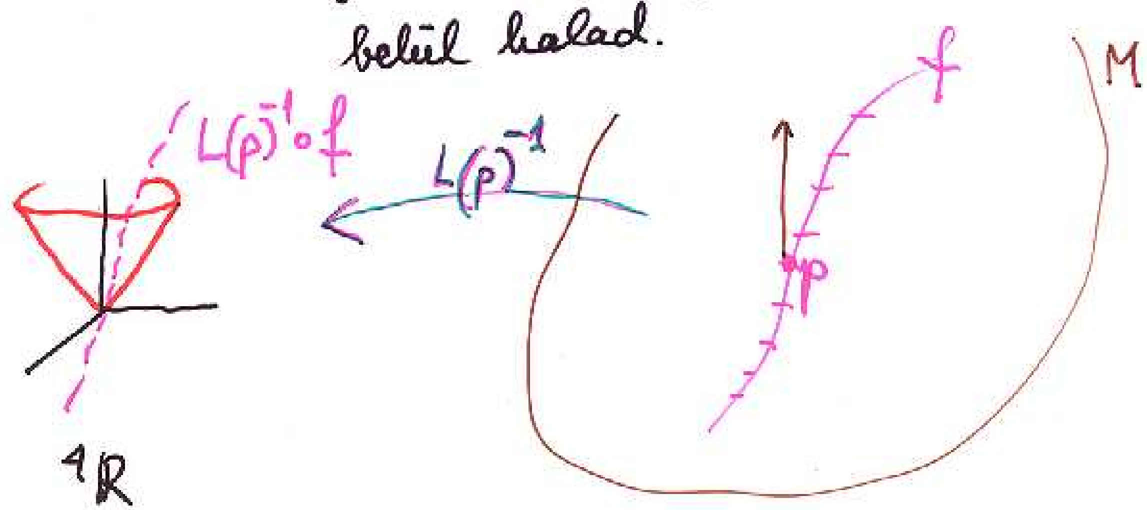
$\forall$ pontban az ott levő lokális Speciel mondja meg, hogy merre indulnak ki fény élehetak, milyen irányokban lehet mozogni megfigyelőnek és milyen ütemben telik az arra mozgó megfigyelő saját-ideje (karóra-ideje).

Definíciók

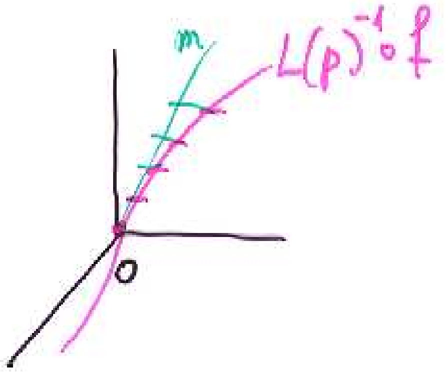
görbe $f : D \longrightarrow {}^4R$ sima, $D \subseteq R$ nyílt intervallum

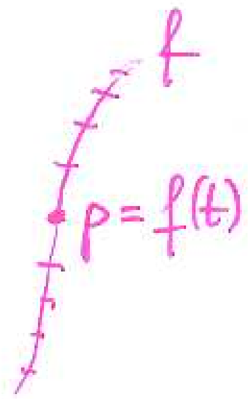


idősszerű görbe: mindig lokális fénykúpon belül halad.



f jól méri az időt, (más szóval) jól-paraméterezett ha minden pontban a lokális Specrel megfigyelő világképében az érintő megfigyelő órája lokálisan úgy jár mint az f paraméterezése. Formálisan:

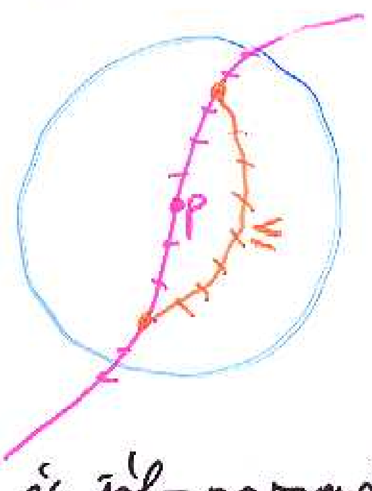




$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \forall s\in[t-\delta, t+\delta]$$

$$\left|\mu\left(L^{-1}(p)(f(s)), \underbrace{L^{-1}(p)(f(t))}_{0}\right) - |s-t|\right| < \varepsilon * |s-t|.$$

f időszerű geodetikus ha lokálisan maximalizálja az eltelt időt, azaz



és időszerű és jól-paraméterezett.

Def. Legyen (M, L) és (M', L') áltrel téridőmodell.

Az $Iso : M \longrightarrow M'$ függvény izomorfizmus köztük, ha

(1) Iso sima bijekció M és M' között

(2) Iso megőrzi az időszerű geodetikus görbéket,

azaz

ha $f : D \to M$ időszerű geodetikus (M, L)-ben,

akkor $Iso \circ f : D \to M'$ időszerű geod. (M', L')-ben.

(3) A fenti (1), (2) igaz Iso inverzére is.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[r, "Iso"] & M' \\ D \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, "Iso \circ f"'] & & \end{tikzcd}$$

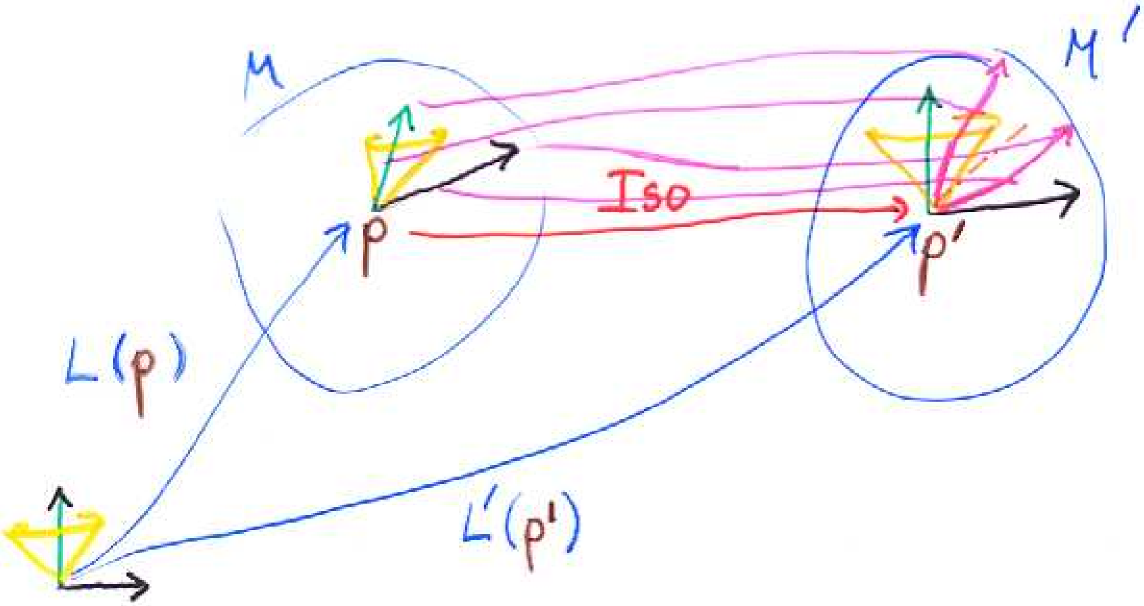
Ezeket az izomorfizmusokat át-koordinátázásoknak is hívják.

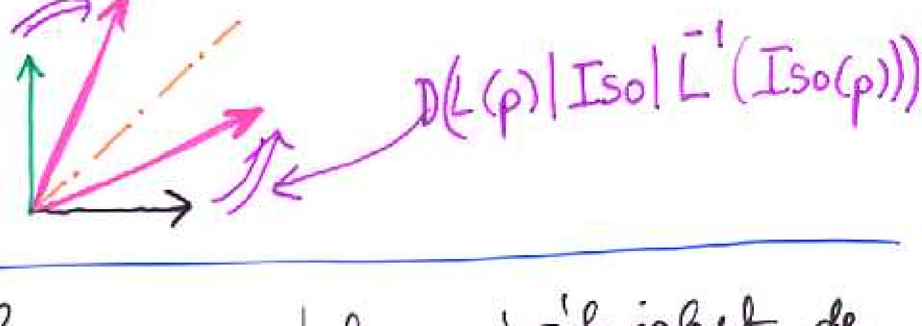
Tétel (áltrel. téridőmodell-izomorfizmus ekvivalens defja)

Legyen (M,L) és (M',L') áltrel téridő-modell.

Az $Iso : M \longrightarrow M'$ sima bijektív függvény pontosan akkor (izomorfizmus) ha $(Iso^{-1} : M' \to M$ is sima és$)$

$$(\forall p \in M)\left(L(p) \,|\, Iso \,|\, L'^{-1}(Iso(p)) \text{ differenciálja Lorenz transzformáció}\right).$$



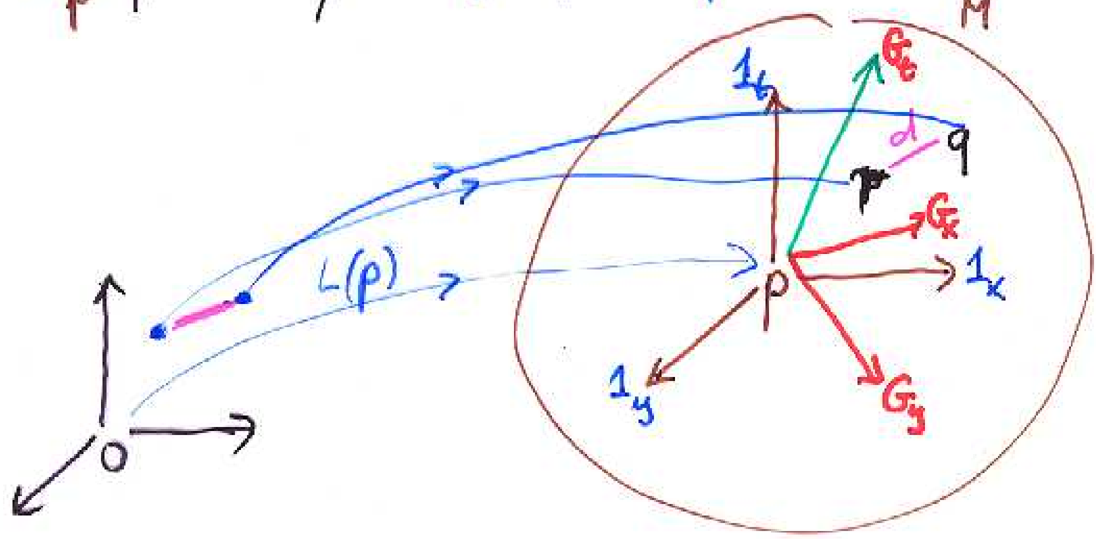


Def: $f|g \stackrel{d}{=} g \circ f$, azaz $|$ kompozíciót jelent, de a "relációs" vagy "kategóriás" sorrendben.

Lokális Specrel-ek hogyan látják a globális koordináta-rácsot?

<u>Definíció</u> (metrikus tenzor)

$$d_p(q,r) \stackrel{d}{=} \mu\left(L(p)^{-1}(q),\ L(p)^{-1}(r)\right).$$



<u>Tétel</u>.

$$\overbrace{d_p(q,r)}^{ds}{}^2 = g_{tt}\overbrace{(q_t-r_t)}^{dt}{}^2 + \dots = \sum_{i,j} g_{ij}\overbrace{(q_i-r_i)}^{d_i}\overbrace{(q_j-r_j)}^{d_j},$$

ahol $g_{ij} = L(p)^{-1}(1_i) \circledast L(p)^{-1}(1_j)$ és

$$p \circledast q \stackrel{d}{=} p_0 q_0 - \sum_{i>0} q_i p_i .$$

Így írjuk: $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}\, d_i d_j$.

Ez a Minkowski skaláris szorzat

Speciálisan, g_{tt} = „$L(p)^{-1}(1_t)$ *hossza* (négyzetreemelve technikai okokból)”. (Hasonlóan $g_{ii}=|L(p)^{-1}(1_i)|^2$.) A g_{ij} fenti definiciója megmondja, hogy G -ből hogyan lehet g –t kiszámolni. (De G szerepe el van bújtatva $L(p)$ használatában.) Tehát G és g lényegében ugyanazt az információt hordozzák (csak másképp “kódolva”).

Megjegyzés:
  M –ről csak azt kötöttük ki hogy R^4 nyílt részhalmaza legyen, mert a lényeges gondolatok bemutatására és az általunk vizsgált példákban ez bőven elég. Általában azt szokták feltenni, hogy M *sokaság* (manifold, continuum), ami általánosítása az $M \subseteq R^4$ feltevésnek.
  Az egyszerűség kedvéért tettük fel minden szereplő függvényről, hogy *sima*. Általában csak azt kell használni, hogy „kétszer folytonosan deriválható”, vagy csak hogy „folytonos”.
  A G_t sima vektormező *idő-orientáció*t is ad a téridőnek (megmondja, merre van a „jövő”). Nem minden metrikus tenzormezővel megadott áltrel téridő időorientálható, viszont az időorientációt gyakran be szokták tenni a definicióba.
  Az áltrel téridők közti izomorfizmus definiciója azt mutatja, hogy az $M \subseteq R^4$ nyilt halmaznak (vagyis a „papírnak”, amire a téridőt rajzoltuk) csak a differenciálhatósági struktúráját (mik a sima függvények) használjuk (pl. a topológia számít, az Euklideszi metrika nem számít). Továbbá, az $L(p)$ függvények kiválasztanak egy-egy ortonormált irányrendszert (azaz egy konkrét megfigyelőt a Specrel modellből). Az izomorfizmus definiciója azt mutatja, hogy az sem lényeges, hogy pont melyik ilyen megfigyelőt választottuk ki (a megfigyelők mögött meghúzódó megfigyelő-független geometria az ami lényeges).
  R^4 helyett végig használhattuk volna R^n –t, ahol $n \geq 2$. (Sőt, az általunk vizsgált áltrel úgy van formalizálva (komolyan gondolva), hogy bármely $n \geq 2$ meg van engedve. Persze n véges.)

Példák

Specrel (másszóval Minkowski) téridő:

A három megadási mód:

(M,L) ahol $M=R^4$ és $L(p)$ = „ az origóból p –be való eltolás”.

(R^4, G_t, G_x, G_y, G_z) ahol minden $p \in R^4$ –re

$G_t(p)=(1,0,0,0)$, $G_x(p)=(0,1,0,0)$, $G_y(p)=(0,0,1,0)$, $G_z(p)=(0,0,0,1)$.

$\mathbf{ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$, azaz a g mátrix diagonális és az átlóban 1,-1,-1,-1 van.

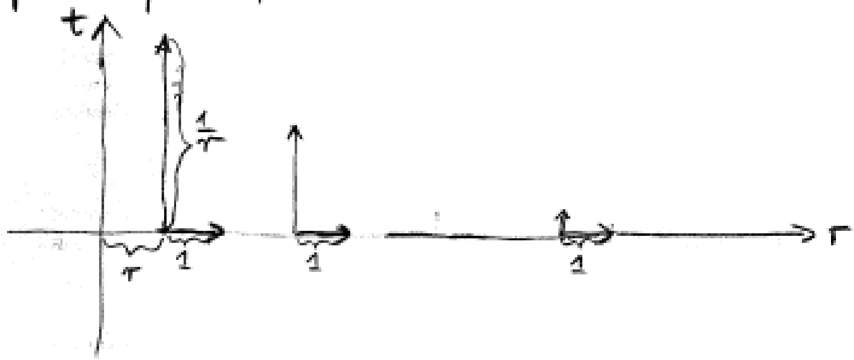
„*Időszerű geodetikus*” ebben a téridőben „≤ 1 meredekségű egyenes”.

„*Automorfizmus*” (azaz önmagára való izomorfizmus, átkoordinátázás) ebben a téridőben „Lorenz transzformáció komponálva eltolással” (vagyis „Poincaré transzformáció”, vagyis „világképtranszformációk a Specrel modellekben”).

Állandó gyorsulású megfigyelők térideje:

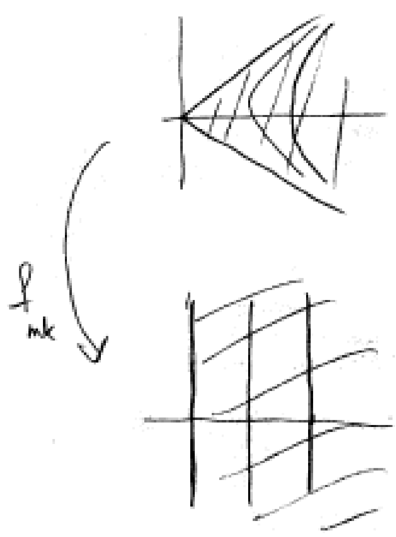
$M = \{ (t,r) \in R^2 \;:\; r > 0 \}$ és minden $p \in M$ –re

$G_t(p) = (1/p_r, 0)$, $\quad G_r(p) = (0, 1)$.



$ds^2 = r^2 dt^2 - dx^2$.

Ez izomorf a 2-dim. Speciel téridő $\{(t,x) : x > 0,\ |t| < x\}$ részével.



Egyszerűsített fekete lyuk térideje:

$M=\{ (t,r,\varphi)\in R^3 \ : -\pi \leq \varphi < \pi, \ r \neq 0, \ r \neq 1\}$ és

$$ds^2 = (1-1/r)dt^2 - (1-1/r)^{-1}dr^2 - r^2 d\varphi^2.$$

Az általános Schwarzschild fekete lyuk térideje hasonló (ld. később).
Ha fentiben a fekete lyuk méretét, azaz “M” tömegét is szerepeltetni akarjuk, akkor (1-1/r) helyett (1-M/r) –et kell mindenütt írni. (Megjegyzés: „M” helyett történelmi mértékegység okokból hivatalosan 2m –et szokás írni. Ez most a logikai megértés szempontjából irreleváns.)

Specrel és áltrel miért különbözik abban, hogy Specrel-ben lényegében 1 téridőmodell van míg az áltrelben sokfajta téridőt vizsgálunk? Válasz: mert az általános relativitáselmélet a gravitáció elmélete, az áltrelben a gravitáció jelenségét vizsgáljuk, a gravitáció törvényeit akarjuk felírni.

Áltrelnek két nagy fejezete van. Az alapvető fejezet a téridő geometriája. Második fejezet: az Einstein Egyenlet. Einstein Egyenlet interpretálja ezeket a téridőket. (Elvezet egyes szakterületekhez.)