Végesen axiomatizált cilindrikus-Gödel–Bernays-halmazelmélet

Andréka Hajnal és Németi István
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet
andreka.hajnal@renyi.mta.hu, nemeti.istvan@renyi.mta.hu

Megpróbáljuk megvilágítani, hogy miért és hogyan működik a végesen axiomatizált Gödel–Bernays-halmazelmélet. Ennek során létrejön egy másik végesen axiomatizált konzervatív kiterjesztése a ZF halmazelméletnek, amit cilindrikus-Gödel–Bernays-, CGB halmazelméletnek nevezünk el. Ezen az axiómarendszeren jól látszik, hogy min múlik, hogy véges sok formulával tudtuk helyettesíteni a végtelen sok formulát jelentő vetítési axiómasémát.

Bevezetés

A halmazelmélet a matematikusok közös nyelve, lingua francája. Az a tény, hogy van ilyen közös nyelv, a matematikát a legdemokratikusabb tudományággá teszi. Például, álljon elő akár egy dokkmunkás egy halmazelméleti levezetéssel, ha az a levezetés korrekt és érdekes állításhoz vezet, akkor az jó matematika, függetlenül attól, hogy esetleg a szerzője egyáltalán nem járt egyetemre.

Jelenleg, és már régóta, a Zermelo–Fraenkel-, ZF halmazelmélet a legelterjedtebb halmazelmélet. Azonban ennek az elméletnek végtelen sok axiómája van, pontosabban van egy olyan axiómasémája, ami végtelen sok állítást fog össze egy sémába. Ez nem baj, de jó pár alkalmazásnál jól jönne, ha ez az axiómarendszer véges lenne. Például, a Gödel nemteljességi tétel következménye, hogy ZF-ből nem lehet saját konzisztenciáját bizonyítani. Ha a ZF axiómarendszer véges lenne, sokkal egyszerűbben megfogalmazható lenne a saját konzisztenciája. Ezzel a céllal jött létre a Gödel–Bernays-, végesen axiomatizálható GB halmazelmélet.

A ZF ugyan nem axiomatizálható végesen (ezt (Montague, 1961) bizonyította), de ha tudunk több dologrol beszélni, mint a halmazok, akkor ezen a bővebb nyelven el tudunk véges sok dolgot mondani, hogy ennek a véges sok állításnak az eredeti kisebb nyelvre vett következményei pontosan a ZF következményei. Szakszóval úgy mondjuk, hogy az új végesen axiomatizált elmélet a ZF konzervatív kiterjesztése. A GB halmazelmélet is ilyen véges konzervatív kiterjesztése a ZF-nek.

A GB tehát több dologról beszél, mint a ZF halmazelmélet – nevezetesen a GB a halmazokon kívül beszél az ún. osztályokról is – azonban ha csak a halmazokra koncentrálunk, akkor azokról a GB nem mond (implikál) se többet, se kevesebbet, mint a ZF.

Sokak számára az, hogy a GB halmazelmélet miért működik, az „bűvészmutatvány”, végig lehet követni a bizonyítást, de nem látszik világosan, hogy pontosan mi az a gondolat, ami miatt működik. Ebben a cikkecskében megpróbáljuk megkeresni a gondolatot, közben pedig bemutatjuk a GB egy olyan változatát, ami ugyanolyan jól működik, mint a GB, és ráadásul a gondolat is látszik, hogy miért működik. Megjegyezzük, hogy azt, hogy egy végtelen (de algoritmussal megadható) axiómarendszert hogyan lehet általában végessé tenni azátal, hogy kibővítjük a nyelvet, (Kleene, 1952) és (Craig és Vaught, 1958) már alaposan kitárgyalta; mi itt más szempontból közelítünk a kérdéshez.

1. Az első gondolat

A ZF halmazelmélet a halmazokról beszél, a kétargumentumú „eleme”, $\in$ relációjel segítségével. Az az axiómaséma, ami a ZF-et végtelenné teszi, az ún. vetítési axiómaséma azt mondja ki, hogy halmaz osztályfüggvénnyel vetített képe halmaz, ahol „osztályfüggvény” azt jelenti, hogy formulával megnevezhető összesség (azaz osztály), amely történetesen függvény. Ezt a formulasémát egy mondattal el tudjuk mondani, ha használjuk az „osztály” fogalmát, de csak végtelen sok formulával tudjuk kifejezni a ZF halmazelmélet nyelvén. Nevezetesen, a fenti egyszerű allítást a következő axiómaséma fejezi ki a ZF nyelvén:

(AxSémaVet) „Halmaz osztályfüggvénnyel vetített képe halmaz”:
$\forall x, y, z, v_1, \ldots, v_n[\varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n) \wedge \varphi(x, z, v_1, \ldots, v_n) \rightarrow y = z]$
$\rightarrow\ \forall u \exists v \forall w[w \in v \longleftrightarrow \exists x(\varphi(x, w, v_1, \ldots, v_n) \wedge x \in u)]$,

ahol $\varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n)$ tetszőleges formula a ZF nyelvén. Ez tehát végtelen sok állítás, minden egyes $\varphi(x, y, v_1, \ldots, v_n)$ formulára egy darab állítás.

Teljesen jók lennénk, ha egy kvantor tudna a formulák felett futni a nyelvünkben. Ez az első gondolat a GB végesen axiomatizált halmazelméletben (és a variánsaiban). Ahhoz, hogy kvantor tudjon a formulák felett futni, kell adni nekik egy „univerzumot”. Terjesszük ki tehát a nyelvünket egy új szorttal (azaz univerzummal), a formulák Fm szortjával. Nevezzük el a régi univerzumot a halmazok Hm szortjának, azon az eleme reláció az $\in$. A fenti formulaséma kifejezéséhez szükségünk lesz majd arra, hogy egy formula a halmazok mely összességét jelöli ki, azaz mit jelent a halmazokon. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a változó-kiértékeléseket ω hosszú sorozatokkal reprezentáljuk és beveszünk a nyelvbe egy relációt, ami a halmazok és a formulák szortja között áll fenn, elnevezzük telj -nek, és k telj φ azt jelenti majd, hogy k halmazok egy ω hosszú sorozata, ami kielégíti a φ formulát. Azt, hogy „halmazok egy ω hosszú sorozata”, ki tudjuk fejezni a halmazelmélet szokásos nyelvén, jelöljön Sor(k) egy ilyen formulát. (Sor(k) tehát azt mondja, hogy k függvény, aminek ω az értelmezési tartománya; a természetes számok ω halmazát pedig tudjuk, hogy hogyan lehet kifejezni a halmazelmélet szokásos nyelvén, l. pl. a következő fejezetben is.)

Azt is ki kell fejezni valahogy, hogy Fm-ben formulák vannak! Azt nem tudjuk kifejezni, hogy Fm-ben pontosan a formulák vannak, de elég a mostani célhoz az, hogy Fm tartalmazza az összes formulát. Ezt pedig egyszerűen el tudjuk mondani a formulafelépítési szabályok leutánzásával, így:

$$\forall i,j\in\omega\exists\varphi\in\mathsf{Fm}\forall k[\mathsf{Sor}(k)\longrightarrow(k\ \mathsf{telj}\ \varphi\leftrightarrow k(i)\in k(j))],$$

$$\forall i,j\in\omega\exists\varphi\in\mathsf{Fm}\forall k[\mathsf{Sor}(k)\longrightarrow(k\ \mathsf{telj}\ \varphi\leftrightarrow k(i)=k(j))],$$

$$\forall i\in\omega\forall\psi\in\mathsf{Fm}\exists\varphi\in\mathsf{Fm}\forall k[\mathsf{Sor}(k)\to(k\ \mathsf{telj}\ \varphi\leftrightarrow\exists u\in\mathsf{Hm}\,k(i/u)\ \mathsf{telj}\ \psi)],$$

$$\forall\psi,\chi\in\mathsf{Fm}\exists\varphi\in\mathsf{Fm}\forall k[\mathsf{Sor}(k)\longrightarrow(k\ \mathsf{telj}\ \varphi\leftrightarrow(k\ \mathsf{telj}\ \psi\wedge k\ \mathsf{telj}\ \chi)],$$

$$\forall\psi\in\mathsf{Fm}\exists\varphi\in\mathsf{Fm}\forall k[\mathsf{Sor}(k)\longrightarrow(k\ \mathsf{telj}\ \varphi\leftrightarrow\neg(k\ \mathsf{telj}\ \psi)].$$

A harmadik sorban $k(i/u)$ azt az ω hosszú sorozatot jelöli, amit úgy kapunk k-ból, hogy az i-edik tagját kicseréljük u-ra. Azt fejeztük ki, hogy minden konkrét formulához van az Fm szortnak egy eleme, hogy az ω hosszú sorozatok pontosan akkor elégítik ki a konkrét formulát, amikor az Fm szort neki megfelelő entitásával telj kapcsolatban vannak.

Ahhoz, hogy a most elmondott gondolatot ebben a formában tovább tudjuk vinni, posztulálni kell, hogy elég sok ω hosszú sorozat létezik. Ezek létezésének posztulálására általában pont a vetítési axiómasémát szokás használni. (Például, vegyük azt a $\varphi(x,y)$ formulát, ami azt fejezi ki, hogy $y=\langle x,x\rangle$. Ha ezzel a $\varphi(x,y)$ formulával vetítjük az ω-t a megadott módon, akkor az $\{\langle x,x\rangle : x\in\omega\}$ halmazt kapjuk, ami a $\langle 0,1,2,\dots\rangle$ sorozat.)

Ahelyett, hogy az ω hosszú sorozatok létezésének vetítési axiómaséma nélküli posztulálásába belebonyolódnánk, a következő fejezetben finomítjuk az itt elmondott gondolatot úgy, hogy csak a 3 hosszú sorozatokat kelljen használni.

2. Cilindrikus-Gödel–Bernays-halmazelmélet

Alfred Tarski bizonyította 1943-1944 körül, hogy minden halmazelméleti $\varphi(x,y)$ formulához van olyan $\psi(x,y)$ halmazelméleti formula, ami csak kevés eszközt használ, de mégis ugyanazt jelenti a ZF egy kicsi ZF_0 szeletéből bizonyíthatóan. A ZF_0-ról csak azt kell tudnunk, hogy vehető a jelen cikkben később megadott ZF axiómarendszer vetítési séma nélküli részének. Az, hogy csak kevés eszközt használ a ψ, azt jelenti, hogy legfeljebb csak 3 változójel fordulhat elő benne (legyenek ezek x,y,z) és a $v\in w$ alakú atomi formulák közül is csak az $x\in y$-t használja (tehát pl. nem használja az $y\in x$ atomi formulát sem).[1] A $\varphi(x,y)$ formulában csak az x,y változójelek lehetnek szabadok. Van algoritmus, ami megadja a φ formulához a neki megfelelő ψ kevés eszközt használó formulát. Tehát

(∗) $\mathsf{ZF}_0\vdash\forall x,y\ \ \varphi(x,y)\leftrightarrow\psi(x,y),$

[1] A szokásos jelölésrendszer szerint ψ csak kevés eszközt használ pontosan akkor, ha $\psi\in L_3$ és ψ ún. „restricted" formula.

ahol $\vdash$ a bizonyíthatóság jele. A fenti tétel a Tarski–Givant: „Formalization of set theory without variables” könyv fő tételének egy következménye, l. (Tarski és Givant, 1987) Chap. 4 (különösen 4.4). A bizonyítása azon múlik, hogy ZF-ben ki lehet fejezni a pár-képzést 3 változójellel, és a pár-képzés segítségével ezután tetszőlegesen sok (de véges számú) halmazt össze lehet kódolni egyetlen elemmé.[2]

Ezt a tételt felhasználva az előző fejezetbeli ω hosszú sorozatok helyett lehet mindig csak 3 hosszú $\langle u, v, w\rangle$ sorozatokat használni, és a formula-felépítési szabályokat is ennek megfelelően kimondani. Ebben a fejezetben ezt a változatot írjuk le részletesen. Ezen verziót elmondtuk a Tanszék LaPoM szemináriumán 2007-ben.

Ha már az egyszerűsítésnél tartunk, a nyelvet is egyszerűsítjük. Nevezetesen: csak egy szortunk lesz (B-vel fogjuk jelölni), ami az osztályok univerzuma lesz (a régi Hm és Fm szortok uniója), és csak egy binér relációjelünk lesz, amit megintcsak $\in$-vel jelölünk (ez a régi $\in$ és a telj uniója lesz). Az osztályokon belül a halmazokat (a régi Hm elemei) úgy kapjuk vissza, hogy azok az osztályok minősülnek halmaznak, melyek elemek is egyben. A régi Hm szortot V fogja jelölni. Eztán a régi $\in$ relációt úgy kapjuk vissza az új $\in$-ből, hogy a régi $\in$-ként a halmazok közötti relációt tekintjük.

Nyelvünk: egyenlőségjeles elsőrendű logika, egy darab kétargumentumú nemlogikai „$\in$” relációjellel. B-vel jelöljük az összes osztályok gyűjteményét. A $\langle B, \in\rangle$ alakú struktúrákat akarjuk axiomatizálni. Pl. az, hogy $X \cap Y \in B$, csak annyit jelöl, hogy „$X \cap Y$ osztály”, azaz $(\exists Z) Z = X \cap Y$.

Axiómák

(**AxExt**) „Extenzionalitási Axióma”:

$$X = Y \longleftrightarrow \forall v[v \in X \longleftrightarrow v \in Y]$$

.

(I) Osztálylétezési axiómák

(**AxBA**) „Az osztályok konkrét Boole-algebrát alkotnak”:

$$(\exists V)(\forall X, Y)[\, \mathsf{X} \subseteq \mathsf{V} \text{ és } \mathsf{V} - \mathsf{X} \in \mathsf{B} \text{ és } \mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \in \mathsf{B}\,].$$

A következő jelöléseket használtuk fent:

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{X} \subseteq \mathsf{Y} & \Longleftrightarrow & \forall v(v \in X \to v \in Y, \\ \mathsf{V} - \mathsf{X} \in \mathsf{B} & \Longleftrightarrow & (\exists Z)(\forall v)[\, v \in Z \longleftrightarrow (v \in V \text{ és } v \notin X)\,], \\ \mathsf{X} \cap \mathsf{Y} \in \mathsf{B} & \Longleftrightarrow & (\exists Z)(\forall v)[\, v \in Z \longleftrightarrow (v \in X \text{ és } v \in Y)\,]. \end{array}$$

[2] Tarskinak ezt a trükkjét fejleszti Németi tovább a (Németi, 1986) magyar nyelvű disszertációban. Ennek továbbvitele (Andréka és Németi, 2012), ez utóbbi eredményt elmondtuk a Tanszék LaPoM szemináriumán is.

Tehát az „... ∈ B” alakú kifejezések csak rövidítések! V-t használni fogjuk mostantól konstansként, V az az osztály, amire $(\forall X) X \subseteq V$ igaz. Ez jogos, mert $(\mathbf{AxExt}), (\mathbf{AxBA}) \vdash (\exists! V)(\forall X) X \subseteq V$.

Jelölés:

$$\begin{aligned} v = \langle x, y\rangle &\iff v = \{\{x\}, \{x, y\}\}, \\ v = \langle x, y, z\rangle &\iff v = \langle x, \langle y, z\rangle\rangle, \quad \text{ahol} \\ v = \{x, y\} &\iff (\forall z)[\, z \in v \leftrightarrow (z = x \text{ vagy } z = y)\,] \quad \text{stb.} \end{aligned}$$

$$(\mathbf{AxExt}) \vdash (v = \langle x, y\rangle \text{ és } v = \langle u, v\rangle) \to (x = u \text{ és } y = v).$$

Később majd lesz egy olyan axióma, hogy $(\forall x, y \in V)(\exists v \in V) v = \langle x, y\rangle$. Emiatt az $\langle x, y, z\rangle$-t kifejezésként használhatjuk.
(**AxCA**) „A tripletek osztályai cilindrikus algebrát alkotnak”:

$$\begin{aligned} c_0(X) &= \{\langle x, y, z\rangle : (\exists x')\langle x', y, z\rangle \in X\} \in B, \\ c_1(X) &= \{\langle x, y, z\rangle : (\exists y')\langle x, y', z\rangle \in X\} \in B, \\ c_2(X) &= \{\langle x, y, z\rangle : (\exists z')\langle x, y, z'\rangle \in X\} \in B, \\ d &= \{\langle x, x, x\rangle : x \in V\} \in B, \\ e &= \{\langle x, y, y\rangle : x \in y \in V\} \in B. \end{aligned}$$

(**AxCA**) első sora részletesebben kiírva a következő:

$$(\forall X)(\exists Y)\forall v[\, v \in Y \leftrightarrow (\exists x, y, z, x')(v = \langle x, y, z\rangle \text{ és } \langle x', y, z\rangle \in X)\,].$$

(**AxDir**) „Osztályok direkt szorzata osztály”:

$$(\forall X, Y)\; X \times Y \in B.$$

Részletesebben:

$$(\forall X, Y)(\exists Z)(\forall v)[\, v \in Z \leftrightarrow (\exists x \in X, y \in Y) v = \langle x, y\rangle\,].$$

(II) Halmazlétezési axiómák

Szóhasználat: x-et halmaznak hívjuk, ha $x \in V$.
(**AxVet**) „Halmaz vetített képe halmaz”:

$$\begin{aligned} &(\forall Z)(\forall u \in V)[\, Fn(Z) \to Z''(u) \in V\,], \quad \text{ahol} \\ &Fn(Z) \iff (\forall x, y, z)[\, \langle x, y, y\rangle, \langle x, z, z\rangle \in Z \to y = z\,] \quad \text{és} \\ &Z''(u) = \{y : (\exists x \in u)\langle x, y, y\rangle \in Z\}. \end{aligned}$$

(**AxSet**) „ω, pár, hatványhalmaz, unióhalmaz létezése”:

$$\begin{aligned} &(\exists u \in V)[\, \emptyset \in u \text{ és } (\forall x \in u) x \cup \{x\} \in u\,], \\ &(\forall x, y \in V)\{x, y\} \in V, \\ &(\forall x \in V)\{y : y \subseteq x\} \in V, \\ &(\forall x \in V)(\exists y \in V)(\forall v)[\, v \in y \leftrightarrow (\exists z \in x) v \in z\,]. \end{aligned}$$

(**AxFund**) „Fundáltsági (vagy regularitási) axióma”:

$$(\forall x \in V)[x \neq \emptyset \rightarrow (\exists y)(y \in x \text{ és } y \cap x = \emptyset)].$$

$$\mathsf{CGB} = \{(\mathbf{AxExt}), (\mathbf{AxBA}), (\mathbf{AxCA}), (\mathbf{AxDir}), (\mathbf{AxVet}), (\mathbf{AxSet}), (\mathbf{AxFund})\}.$$

A ZF halmazelméletet úgy kapjuk a most felírt CGB elméletből, hogy a halmazlétezési axiómákban AxVet helyére beírjuk az előző fejezetbeli AxSémaVet vetítési formulasémát, elhagyjuk az osztálylétezési axiómákat és a halmazlétezési axiómákhoz hozzáértjük, hogy minden ami létezik, az halmaz:
$\mathsf{ZF} = \{(\mathbf{AxExt}),\ (\mathbf{AxSémaVet}), (\mathbf{AxSet}), (\mathbf{AxFund})\}$.
Legyen L a ZF halmazelmélet nyelve, ugyanaz, mint a most bevezett CGB elmélet nyelve. (Megjegyzés: B nem tartozik a nyelvünkhöz, B csak egy metanyelvi rövidítés volt.) Ha φ ennek tetszőleges formulája, akkor φ^V a φ formula V-re való relativizáltját jelöli, azaz φ^V-t úgy kapjuk φ-ből, hogy minden $\exists v$ alakú kvantort kicserélünk $\exists v \in V$-re és minden $\forall v$ alakú kvantort kicserélünk $\forall v \in V$-re.

1. Tétel CGB konzervatív kiterjesztése ZF-nek, azaz tetszőleges φ halmazelméleti mondatra igaz, hogy φ pontosan akkor bizonyítható ZF-ből ha φ^V bizonyítható CGB-ből. Formálisan:

$$(\forall \varphi \in L)\ \ [\ ZF \vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathsf{CGB} \vdash \varphi^V\ ].$$

Bizonyítás. A fenti tételt a szemantika nélküli metaszinten bizonyítjuk, mert ez többet mond az alapozó jellegű elméletek közti kapcsolatról. Fordító algoritmust adunk meg, ami az egyik elméletbeli bizonyításokat átalakítja a másik elméletbeli bizonyításokká, és fordítva.

Először azt bizonyítjuk, hogy ha $\mathsf{ZF} \vdash \varphi$, akkor $\mathsf{CGB} \vdash \varphi^V$. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk az állítást arra az esetre, ha φ a ZF egy axiómája, és aztán belátjuk, hogy levezetésből ismét levezetés lesz, ha minden formuláját kicseréljük a relativizáltjára. Ezekből a lépésekből csak az nem könnyen látható, hogy az AxSémaVet vetítési séma formulái(nak relativizáltjai) mind levezethetők CGB-ből. Koncentráljunk tehát az (**AxSémaVet**) példányaira. Vegyünk először egy olyan példányt, ami egy kevés eszközt használó $\psi(x,y)$ formulával vetít.

(AxCA), (AxBA), (AxExt) miatt az e, d-ből a $c_0, c_1, c_2, \cap, -$ műveletekkel felírt kifejezések (termek) konkrét osztályokat jelölnek, tehát használhatjuk ezeket a termeket osztály-konstansokként. Sőt, van algoritmus, hogy minden egyes „kevés eszközt használó” ψ formulához hozzárendelhetünk egy ilyen $\gamma(\psi)$ konstanst, aminek ugyanaz a „jelentése”, azaz

(1) $\mathsf{CGB} \vdash \forall xyz(\psi \longleftrightarrow \langle x,y,z \rangle \in \gamma(\psi))$.

Alább megadjuk ezt az algoritmust:

$\gamma(x \in y) := c_2(e)$,

$\gamma(x = y) := c_2 d, \quad \gamma(x = z) := c_1 d, \quad \gamma(y = z) := c_0 d,$

$\gamma(v = w) := \gamma(w = v)$, $\quad \gamma(v = v) := V \times (V \times V)$, $\quad$ ha v, w az x, y, z változójelek közül valók,

$\gamma(\exists x\varphi) := c_0\gamma(\varphi)$, $\quad \gamma(\exists y\varphi) := c_1\gamma(\varphi)$, $\quad \gamma(\exists z\varphi) := c_3\gamma(\varphi)$,

$\gamma(\varphi \wedge \psi) := \gamma(\varphi) \cap \gamma(\psi)$, $\quad \gamma(\neg\varphi) := -\gamma(\varphi)$.

A fenti **(1)** állítást használva könnyen látható, hogy CGB-ből levezethető, hogy ψ függvény a szokásos értelemben pontosan akkor, ha a $\gamma(\psi)$ osztály függvény az (**AxVet**) kimondásában megadott értelemben:

(2) $\mathsf{CGB} \vdash [\forall x, y, z(\psi(x, y) \wedge \psi(x, z) \to y = z)] \longleftrightarrow Fn(\gamma(\psi))$.

CGB-ből azt kell bizonyítanunk, hogy ha $\psi(x, y)$ függvény, akkor a vele vetített halmazok ismét halmazok. A fenti **(2)** szerint ha $\psi(x, y)$ függvény, akkor a neki megfelelő $\gamma(\psi)$ osztály is függvény. Emiatt a CGB-beli osztály-vetítési **(AxVet)** axióma szerint az ezzel vetített halmazok ismét halmazok. A fenti **(1)** szerint a $\gamma(\psi)$-vel vetített halmazok ugyanazok, mint az eredeti $\psi(x, y)$ formulával vetítettek. Ezzel levezettük CGB-ből a vetítési séma azon példányait, amelyek kevés eszközt használó ψ formulákra vonatkoznak.

Legyen most $\varphi(x, y)$ tetszőleges halmazelméleti formula. Tarskinak a fejezet elején idézett $(\star)$ tétele miatt van hozzá kevés eszközt használó $\psi(x, y)$, aminek ugyanaz a jelentése ZF_0 mellett. Mivel ZF_0 csak olyan axiómákat tartalmaz ZF-ből, ami CGB-ben is megvan, azért CGB-ből is levezethető minden φ formulára, hogy ekvivalens a neki megfelelő kevés eszközt használó ψ formulával. Tehát CGB-ből bizonyíthatóan is minden halmaznak a $\varphi(x, y)$-nal való vetítettje ugyanaz, mint a $\psi(x, y)$-al való vetítettje. Mivel az utóbbiról már bizonyítottuk, hogy halmaz, következik, hogy egy tetszőleges halmaz $\varphi(x, y)$-nal való vetítettje is halmaz. Beláttuk, hogy CGB-ből bizonyítható az (**AxSémaVet**) minden példánya.

A másik irány bizonyítása: Tegyük fel, hogy $\mathsf{CGB} \vdash \varphi^V$, azt kell bizonyítani, hogy $\mathsf{ZF} \vdash \varphi$. Ehhez elég bizonyítani, hogy $\mathsf{CGB} \vdash \varphi$-ből következik, hogy $\mathsf{ZF} \vdash \varphi^V$, azért, mert $(\varphi^V) \longleftrightarrow ((\varphi)^V)^V$ logikai igazság. Ezt pedig elég megint csak a CGB-ben levő axiómákra bizonyítani, ami nem nehéz.

Ezzel bebizonyítottuk az 1. Tételt.

3. A Gödel–Bernays-halmazelméletről

Tarski azt is bizonyította 1943-1944 körül, hogy minden halmazelméleti $\varphi(x, y)$ formulához van egy olyan ρ ún. reláció-kifejezés, ami ugyanazt jelenti. Mik a reláció-kifejezések? Analógok az előző fejezetbeli osztály-kifejezésekkel. Két konstans van, az e és a d, és ezekből az ún. kompozíció, konverz, metszet és komplemens $\circ, \smile, \cap, -$ segítségével lehet új kifejezéseket felírni. Ezen ρ termekhez $\rho(x, y)$ halmazelméleti formulákat lehet rendelni a következőképpen:

$$\begin{array}{rclrcl} e(x,y) & := & (x\in y), & d(x,y) & := & (x=y),\\ (\tau\circ\sigma)(x,y) & := & \exists z(\tau(x,z)\wedge\sigma(z,y)), & (\tau^{\smile})(x,y) & := & \tau(y,x),\\ (\tau\cap\sigma)(x,y) & := & \tau(x,y)\wedge\sigma(x,y), & (-\tau)(x,y) & := & \neg\tau(x,y). \end{array}$$

Ezt a definíciót használva a következőt bizonyította Tarski (ez is megtalálható a (Tarski és Givant, 1987) könyvben): Minden $\varphi(x,y)$ halmazelméleti formulához algoritmikusan hozzá lehet rendelni egy ρ reláció-kifejezést, úgy hogy

($**$) $\mathsf{ZF}_0 \vdash \forall x,y \;\; \varphi(x,y) \longleftrightarrow \rho(x,y)$.

Tarski ezen ($**$) tételét használva az előző fejezetbeli ($*$) helyett, és az 1. Tétel bizonyítását észben tartva kapunk egy CGB-vel analóg RGB axiómarendszert, ami konzervatív kiterjesztése a ZF-nek. Ezen az új RGB axiomatizáláson már nem látszik annyira az első fejezetben leírt gondolat, mert a relációkifejezések elég messze esnek a formulák „fájától”, eléggé más szelleműek. Viszont RGB közel van az eredeti Gödel–Bernays-axiómarendszerhez. Ahelyett, hogy kidolgoznánk az RGB axiómarendszert, végezetül idemásoljuk az eredeti Gödel–Bernays-, GB halmazelmélet axiómáinak az osztálylétezésekre vonatkozó részét, l. (Gödel, 1940, 5). Mekis Péter észrevétele szerint CGB „gazdaságosabb”, mint az eredeti GB.

B1 $\{\langle u,v\rangle : u\in v\}$ osztály.

B2 $X\cap Y$ osztály, ha X,Y osztály.

B3 $-X$ osztály, ha X osztály.

B4 $Do\,X=\{u:\exists v\langle u,v\rangle\in X\}$ osztály, ha X osztály.

B5 $V\times X$ osztály, ha X osztály.

B6 $X^{\smile}=\{\langle v,u\rangle : \langle u,v\rangle\in X\}$ osztály, ha X osztály.

B7 $\{\langle w,u,v\rangle : \langle u,v,w\rangle\in X\}$ osztály, ha X osztály.

B8 $\{\langle u,w,v\rangle : \langle u,v,w\rangle\in X\}$ osztály, ha X osztály.

Végezetül a Gödel–Bernays-halmazelmélet történetéről dióhéjban: A halmazelméletet Georg Cantor „álmodta meg” 1874 és 1884 között, Ernst Zermelo 1908-ban írt fel egy axiómarendszert, amihez Abraham Fraenkel tette hozzá a vetítési axiómasémát 1922-ben. Neumann János 1925-ben felírt egy véges halmazelméleti axiómarendszert, Paul Bernays 1937 és 1954 között ezt a rendszert továbbfejlesztette, ő kétszortú halmaz-osztály nyelvet használt, végül Kurt Gödel sok szempontból egyszerűsítette ezt 1939 körül. Gödel egyszortú nyelvet használt. Ezen történet miatt szokás a Gödel–Bernays-halmazelméletet von Neumann–Bernays–Gödel-halmazelméletnek is hívni. A történetről ajánljuk a vonatkozó *Von Neumann-Bernays-Gödel set theory* oldalt. A vetítési axiómasémáról alapos történeti áttekintést ad (Kanamori, 2012).

Összefoglalás

Megpróbáltuk megvilágítani, hogy miért és hogyan működik a halmazelmélet Gödel–Bernays-féle végesítése. Ennek során létrejött egy másik végesen axiomatizált konzervatív kiterjesztése a ZF halmazelméletnek, amit cilindrikus-Gödel–Bernays-, CGB halmazelméletnek neveztünk el.[3]

Irodalomjegyzék

Andréka Hajnal, Németi István (2012). Reducing first-order logic to Df_3, free algebras. In: *Cylindric-like algebras and algebraic logic*. Berlin: Springer Verlag, 15–35.

Craig, William C. Vaught, Robert L. (1958). Finite axiomatizability using additional predicates. In: *J. Symb. Log.* 23/2.

Gödel, Kurt (1940). *The consistency of the continuum hypothesis*. Princeton University Press, 289–308.

Kanamori, Akihiro (2012). In praise of replacement. In: *The Bulletin of Symbolic Logic* 18/1, 46–90.

Kleene, Stephen C. Ed. (1952). *Two papers on the Predicate Calculus*. Memoirs of the American Mathematical Society 10. Providence, 27–68.

Montague, Richard (1961). "Semantic closure and non-finite axiomatizability I." In: *Infinitistic methods: Proceedings of the Symposium on Foundations of Mathematics*. (Warsaw, 2-9 September 1959). Pergamon Press, 45–69.

Németi István (1986). "Szabadalgebrák és eldönthetőség az algebrai logikában". Akadémiai Doktori Értekezés.

Tarski, Alfred, Givant, Steven R. (1987). *A formalization of set theory without variables*. Colloquium Publications 41, American Mathematical Society. Providence.

Von Neumann-Bernays-Gödel set theory. Wikipedia.

[3]A kutatást a K81188 számú OTKA támogatta.