Eine Folge ganzer Zahlen $a_1 < \cdots$ heiße primitiv, wenn $a_i \nmid a_j$ für alle $a_i < a_j$ gilt. Behrend und Erdös [1] zeigten vor mehr als dreißig Jahren, daß für primitive Zahlenfolgen ($C, c, c', C_1, \ldots$ sind positive absolute Konstanten, die wenn sie in verschiedenen Stellen vorkommen, nicht unbedingt denselben Wert haben)

$$\sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i} < c \log x / (\log\log x)^{1/2} \tag{1}$$

und

$$\sum_k \frac{1}{a_k \log a_k} < C \tag{2}$$

gilt. Kürzlich zeigten wir [2], daß für unendliche primitive Zahlenfolgen

$$\lim_{x=\infty} \sum_{a_i < x} \frac{1}{a_i} \left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1/2}} \right)^{-1} = 0 \tag{3}$$

gilt. Bekanntlich lassen sich (1) und (3) nicht verschärfen.

In einer anderen Arbeit [3] zeigten wir, daß (1) auch dann noch richtig bleibt, wenn wir nur voraussetzen, daß die Gleichungen

$$[a_i, a_j] = a_r, \quad a_i < a_j < a_r \tag{4}$$

oder

$$(a_i, a_j) = a_r, \quad a_r < a_i < a_j \tag{5}$$

unlösbar sind. Weiter zeigten wir in [3], daß eine unendliche Folge $a_1 < \cdots$ existiert, für welche (4) nicht lösbar ist, aber für jedes x

$$\sum_{a_i < x} 1 > c' x / (\log\log x)^{1/2} \tag{6}$$

gilt. Aus (6) folgt sofort, daß wenn (4) unlösbar ist, die Reihe (2) nicht konvergieren muß. Es war für uns eine große Überraschung, als wir zeigen konnten, daß wenn (5) unlösbar ist, (2) gilt; daher benimmt sich die Gleichung (5) ganz anders als (4) [4].

In dieser Arbeit zeigen wir folgenden

Satz. *Ist* (5) *unlösbar, so gilt* (3).

Bevor wir den recht komplizierten Beweis angeben, möchten wir noch einige Bemerkungen machen. Es sei $a_1 < \cdots$ eine Folge, für welche

$$a_i q = a_j, \quad p(q) > P(a_i) \tag{7}$$

unlösbar ist. ($P(n)$ ist der größte, $p(n)$ der kleinste Primfaktor von n.) Dann gilt (2). (Dies ist ein Satz von Alexander, siehe auch [4].) Wir werden jetzt zeigen, daß wenn (7) unlösbar ist, (1) nicht gelten muß. Wir werden sogar zeigen, daß wenn $\varphi(x)$ beliebig langsam gegen Unendlich strebt, immer eine Folge existiert, für welche (7) unlösbar ist und doch für unendlich viele x

$$\sum_{a_i<x} \frac{1}{a_i} > \frac{\log x}{\varphi(x)} \tag{8}$$

gilt. Dies ist offenbar die bestmögliche Abschätzung; denn aus (2) folgt

$$\sum_{a_i<x} \frac{1}{a_i} = o(\log x).$$

(Diese Tatsache erschwert den Beweis unseres Satzes.) ε_i sei eine beliebige Folge, die gegen 0 strebt, und x_i strebe genügend rasch gegen Unendlich. Unsere Folge besteht aus allen Zahlen

$$x_i < a < x_i^{1+\varepsilon_i}, \quad P(a) > x^{\varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

die für jedes $j < i$ keinen Teiler in den Intervallen $(x_j, x_j^{1+\varepsilon})$ haben. Es ist klar, daß für diese Folge (7) unlösbar ist, und aus [5] folgt leicht, daß wenn ε_i genügend langsam gegen 0 und x_i genügend rasch gegen ∞ strebt, (8) für unendlich viele x befriedigt ist.

Nun beweisen wir unseren Satz. Der Beweis wird Methoden anwenden, die wir in [3] und [4] angewendet haben. Es sei ($\exp z = e^z$)

$$f(n) = \exp((\log n)^{1/10})$$

Lemma 1. *Es gilt*

$$\sum{}' \frac{1}{a_k} = o\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right),$$

wobei in $\sum{}'$ *die Summation über die* $a_k \leqq x$ *erstreckt ist, für welche* (p *Primzahl*)

$$\sum_{\substack{p \mid a_k \\ p < f(a_k)}} 1 > \frac{1}{2} \log\log a_k \tag{9}$$

ist.

Offenbar gilt

$$\sum' \frac{1}{a_k} = \sum_1' \frac{1}{a_k} + \sum_2' \frac{1}{a_k}, \tag{10}$$

wobei $a_k < \exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\right)$ in $\sum_1'$ und $\exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\right) \leqq a_k \leqq x$ in $\sum_2'$ ist.

Für $\sum_1$ haben wir die triviale Abschätzung

$$\sum_1' \frac{1}{a_k} < \sum_{n < \exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\right)} \frac{1}{n} = o\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right). \tag{11}$$

Für die a_k in $\sum_2'$ gilt wegen (9)

$$\sum_{\substack{p \mid a_k \\ p < f(x)}} 1 > \frac{1}{2} \log\log\left(\exp\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\right)\right) > \frac{1}{3} \log\log x.$$

Daher erhalten wir durch eine leichte Rechnung (aus dem bekannten Satz von Mertens)

$$\sum_2' \frac{1}{a_k} < \prod_{f(x) < p \leqq x} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right) \sum_{t > \frac{1}{3}\log\log x} \sum_{p \leqq f(x)} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots\right)^t \Big/ t!$$

$$< c(\log x)^{9/10} \sum_{t > \frac{1}{3}\log\log x} \left(\frac{\log\log x}{10} + c_1\right)^t \Big/ t! = o\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right). \tag{12}$$

Lemma 1 folgt aus (10), (11) und (12).

Lemma 2. *Es gilt*

$$\sum'' \frac{1}{a_k} = o\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right),$$

wobei in $\sum''$ die Summation über die a_k erstreckt ist, für welche

$$\sum_{\substack{p \mid a_k \\ p > f(a_k)}} 1 < \frac{1}{2} \log\log a_k \tag{13}$$

ist.

Der Beweis von Lemma 2 ist dem von Lemma 1 sehr ähnlich und kann dem Leser überlassen werden.

Es sei nun $b_1 < \cdots$ die Teilfolge von $a_1 < \cdots$, deren Glieder weder (12) noch (13) befriedigen. Um unseren Satz zu beweisen, genügt es wegen Lemma 1 und 2,

$$\sum_{b_i \leqq x} \frac{1}{b_i} = o\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right) \tag{14}$$

zu zeigen.

Der Beweis von (14) wird nicht ganz leicht sein. $B(b_k)$ ist eine Teilfolge von $b_1 < \cdots$, die wie folgt definiert ist: $b_j \in B(b_k)$, wenn b_k das größte b ist, für welches

$$b_j = b_k q, \quad p(q) > f(b_k) \tag{15}$$

ist. B' sei die Teilfolge der Folge $b_1 < \cdots$, deren Glieder sich für kein k in der Form (15) darstellen lassen.

Lemma 3.

$$\sum_{\substack{b_k \in B' \\ b_k \leqq x}} \frac{1}{b_k} = o\left(\frac{\log x}{(\log\log x)^{1/2}}\right).$$

Der Beweis von Lemma 3 ist genau dem Beweis von (3) nachgebildet (siehe [2]), kann also unterdrückt werden. (Wegen Lemma 1 und 2 kann Lemma 2 von [2] angewendet werden.)

Um (14) zu beweisen, müssen wir nun

$$\sum_{\substack{b_i \in B(b_k) \\ b_i \leqq x}} \frac{1}{b_i}$$

abschätzen. (14) wird (wegen Lemma 3) bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß für jedes $\varepsilon > 0$ und $x > x_0(\varepsilon)$, $b_1 = b_1(\varepsilon)$

$$\sum_k \sum_{\substack{b_i \in B(b_k) \\ b_k \leqq x}} \frac{1}{b_i} < \varepsilon \log x/(\log\log x)^{1/2}, \tag{16}$$

gilt, wenn $b_1 = b_1(\varepsilon)$ genügend groß ist. (Offenbar dürfen wir $b_1 = b_1(\varepsilon)$ beliebig groß annehmen, da wir nötigenfalls die kleinen b einfach weglassen können; leider dürfen wir aber nicht $b_1 > f(x), f(x) \to \infty$ zusammen mit $x \to \infty$ voraussetzen, und die Tatsache, daß wir dies nicht dürfen, macht unseren Beweis viel komplizierter.)

Es seien $b_k q_j = b_i$ die Zahlen von $B(b_k)$. Wie in [4] gilt $(q_{j_1}, q_{j_2}) \neq 1$. Wenn nämlich $b_k q_{j_1} = b_{i_1}$, $b_k q_{j_2} = b_{i_2}$, $(q_{j_1}, q_{j_2}) = 1$ wäre, so wäre $(b_{i_1}, b_{i_2}) = b_k$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Daher gilt für die Zahlen von $B(b_k)$

$$b_k q_j, \quad j = 1, \ldots, (q_{j_1}, q_{j_2}) \neq 1, \quad p(q_j) > f(b_k). \tag{17}$$

Die k teilen wir nun (wie in [4]) in zwei Klassen. In der ersten Klasse sind die k, für welche es ein q_j gibt, so daß

$$\sum_{p \mid q_j} \frac{1}{p} < \frac{1}{f(b_k)^{1/2}} \tag{18}$$

ist.

Es seien $p_1, \ldots, p_r$ die Primfaktoren von q_j. Wegen (17) sind alle Zahlen der Form $b_k q_j$ von der Form $b_k p_i t$, wobei i eine der Zahlen $1, \ldots, r$ ist. Es sei jetzt i fest, und wir betrachten die Zahlen

$$b_k p_i t_j^{(i)}, \quad j = 1, \ldots, \quad b_k p_i t_j^{(i)} \leqq x.$$

Offenbar gilt $(t_{j_1}^{(i)}, t_{j_2}^{(i)}) \neq t_{j_3}$ für jedes $j_3 < j_2 < j_1$, da sonst $(a_1, a_2) = a_3$ wäre mit $a_r = b_k p_i t_r^{(i)}, r = 1, 2, 3$, was unserer Voraussetzung widerspricht. Daher folgt nach [3] $(t_j^{(i)} \leqq x/b_k p_i)$

$$\sum_j \frac{1}{t_j^{(i)}} < c \log \frac{x}{b_k p_i} \Big/ \left(\operatorname{loglog} \frac{x}{b_k p_i} \right)^{1/2} < \frac{c \log x}{(\operatorname{loglog} x)^{1/2}}. \tag{19}$$

Wegen (18) und (19) folgt daher, wenn k zur ersten Klasse gehört,

$$\sum_{b_k q_j \leqq x} \frac{1}{b_k q_j} = \sum_{i=1}^{r} \sum \frac{1}{b_k q_i t_j^{(i)}} < \frac{c \log x}{b_k (f(b_k))^{1/2} (\operatorname{loglog} x)^{1/2}}. \tag{20}$$

Schließlich folgt aus (20) (in $\sum_1$ geht die Summation über alle k der ersten Klasse)

$$\begin{aligned} \sum_k{}_1 \sum_j \frac{1}{b_k q_j} &< \frac{c \log x}{(\operatorname{loglog} x)^{1/2}} \sum_k{}_1 \frac{1}{b_k f(b_k)^{1/2}} \\ &< \frac{c \log x}{(\operatorname{loglog} x)^{1/2}} \sum_{n=b_1}^{\infty} \frac{1}{n (f(n))^{1/2}} < \frac{\varepsilon}{4} \frac{\log x}{(\operatorname{loglog} x)^{1/2}} \end{aligned} \tag{21}$$

wenn $b_1 = b_1(\varepsilon)$ genügend groß ist.

Um unseren Beweis zu beenden, müssen wir nun zeigen, daß für $b_1 = b_1(\varepsilon)$

$$\sum_k{}_2 \sum_j \frac{1}{b_k q_j} < \frac{\varepsilon}{4} \frac{\log x}{(\operatorname{loglog} x)^{1/2}} \tag{22}$$

ist. In $\sum_2$ läuft die Summation über alle k der zweiten Klasse, also über die k, für welche für alle Zahlen (17) von $B(b_k)$

$$\sum_{p \mid q_j} \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{(f(b_k))^{1/2}} \tag{23}$$

gilt.

Wir nehmen nun an, daß (22) falsch ist, und betrachten die Zahlen der Form

$$b_k q_j t, \quad 1 \leqq t \leqq \frac{x}{b_k q_j}, \tag{24}$$

wobei $b_k q_j$ von der Form (17) ist und k alle Zahlen der zweiten Klasse durchläuft.

Es seien $u_1 < \cdots < u_s \leqq x$ die Zahlen (24), der Größe nach geordnet. Für jedes u_i gibt es wegen (23) und (24) ein $Z = Z(u_i) \geqq f(b_1)$, so daß

$$\sum_{\substack{p | u_i \\ p > Z}} \frac{1}{p} \geqq \frac{1}{f(Z)^{1/2}} \tag{25}$$

ist.

Es folgt leicht aus (25), daß für jedes u_i ein ganzes t existiert mit $2^t > \frac{1}{2} f(b_1)$, so daß u_i mindestens zwei Primfaktoren in $(2^t, 2^{t+1})$ hat. Daher folgt durch eine leichte Rechnung (in $\sum'$ läuft t über die Zahlen $2^t > \frac{1}{2} f(b_1)$)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{s} \frac{1}{u_i} &< \sum_t{}' \Bigl(\sum_{2^t < p < 2^{t+1}} \frac{1}{p} \Bigr)^2 \sum_{n=1}^{x} \frac{1}{n} < 2 \log x \sum_t{}' \Bigl(\sum_{2^t < p < 2^{t+1}} \frac{1}{p} \Bigr)^2 \\ &< c \log x \sum{}' \frac{1}{t^2} < \eta \log x \end{aligned} \tag{26}$$

für jedes feste η, wenn $b_1 = b_1(\varepsilon, \eta)$ genügend groß ist.

Um (22) zu zeigen, werden wir nun beweisen, daß unter der Voraussetzung, daß (22) falsch ist, für genügend kleines $\eta = \eta(\varepsilon)$ (26) ebenfalls falsch sein würde. Dieser Widerspruch wird dann (22) beweisen. Zuerst beweisen wir

Lemma 4. *Es sei S eine Menge von n Elementen und $A_1, \ldots, A_k$, $k > c_1 2^n/\sqrt{n}$ Teilmengen von S, so daß*

$$A_i \cap A_j = A_r, \quad i \neq r, \quad j \neq r \tag{27}$$

unmöglich ist. Es seien $B_1, \ldots, B_l$ diejenigen Teilmengen von S, die mindestens ein A_i, $i = 1, \ldots, k$ enthalten. Dann gilt $l > c_2 2^n$ mit $c_2 = c_2(c_1)$.

In [2] wird ein ähnliches Lemma bewiesen (Lemma 3), aber unser Lemma ist stärker, denn in Lemma 3 von [2] wird an Stelle von (27) $A_i \not\subset A_j$ verlangt, und die Bedingung (27) ist offenbar schwächer.

Unser Beweis von Lemma 4 ist dem schönen Beweis von Kleitman [6] nachgebildet. Es sei $S = S_1 \cup S_2$, $|S_1| = \left[\frac{n}{2}\right]$, $|S_2| = \left[\frac{n+1}{2}\right]$ ($|A|$ bedeute die Anzahl der Elemente von A). Es sei $A_i \cap S_1 = B_i^{(1)}$, $A_i \cap S_2 = B_i^{(2)}$. Für jedes $X \subset S_1$ betrachten wir die Familie $F_{X,1}$ der Mengen A_i mit $B_i^{(1)} = X$, für $Y = S_2$ sei $F_{Y,2}$ die Familie der Mengen

A_i mit $A_i \cap S_2 = B_i^{(2)} = Y$. Die Familie $F^*_{X,1} \supset F_{X,1}$ ist nun wie folgt definiert: $A_i \in F^*_{X,1}$ für $A_i \cap S_1 = X$, und $A_i \cap S_2$ ist in keinem $A_j \cap S_2$ mit $A_j \cap S_1 = X$ enthalten. Die Familie $F^*_{Y,2} \subset F_{Y,2}$ ist wie folgt definiert: $A_i \in F^*_{Y,2}$ für $A_i \cap S_2 = Y$, und $A_i \cap S_1$ ist in keinem $A_j \cap S_1$ mit $A_j \cap S_2 = Y$ enthalten. Die Familien $F^*_{X,1}$ und $F^*_{Y,2}$ haben offenbar die Spernersche Eigenschaft [7]:

$$\text{Ist } A_i \in F^*_{X,1},\, A_j \in F^*_{X,1}, \text{ dann gilt } A_i \not\subset A_j, \text{ und dasselbe gilt für } F^*_{Y,2}. \tag{28}$$

Es ist leicht zu sehen, daß jedes A_i in

$$\bigcup_X F^*_{X,1} \bigcup_Y F^*_{Y,2} \tag{29}$$

enthalten ist. Denn wäre z. B. A_i nicht in (29) enthalten, so würden wir $A_i \cap S_1 = X$, $A_i \cap S_2 = Y$ betrachten. Da aber A_i nicht in $F^*_{X,1} \cup F^*_{Y,2}$ enthalten ist, existieren Mengen $A_{j_1} \in F^*_{X,1}$, $A_{j_2} \in F^*_{Y,2}$ mit $A_{j_1} \cap S_2 \supset A_i \cap S_2$ und $A_{j_2} \cap S_1 \supset A_i \cap S_1$. Dann gilt aber offenbar (wegen $A_{j_1} \cap S_1 = X$ und $A_{j_2} \cap S_2 = Y$) $A_{j_1} \cap A_{j_2} = A_i$, was der Voraussetzung widerspricht.

Wegen (29) können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß

$$\left|\bigcup_X F^*_{X,1}\right| \geqq \frac{k}{2} > \frac{c_1}{2} 2^n/\sqrt{n} \tag{30}$$

ist. Wegen (28) folgt aus dem Satze von Sperner [7] für jedes $X \subset S_1$

$$|F^*_{X,1}| < \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\left[\frac{n+1}{4}\right]} < c_3\, 2^{n/2}/\sqrt{n}. \tag{31}$$

Also folgt aus (30) und (31) durch eine leichte Rechnung, daß für mindestens $c_4 2^{n/2}$ Mengen $X \subset S_1$ (da $2^{[n/2]}$ die Anzahl der $X \subset S_1$ ist)

$$|F^*_{X,1}| > c_5\, 2^{n/2}/\sqrt{n} \tag{32}$$

ist. Es seien

$$A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}, \quad r > c_5\, 2^{n/2}/\sqrt{n}$$

die Mengen von $F^*_{X,1}$. Keine zwei der Mengen $A_{i_j} \cap S_2 = B_{i_j}, j = 1, \ldots, r$ enthalten einander. Daher ist die Anzahl der Teilmengen von S_2, die mindestens ein B_{i_j} enthalten, nach Lemma 3 von [2] größer als $c_6 2^{n/2}$, und da dies wegen (32) für mindestens $c_4 2^{n/2}$ Mengen $X \subset S_1$ geschieht, erhalten wir durch eine leichte Rechnung, daß die Anzahl der Teilmengen von S, die mindestens ein A_i, $i = 1, \ldots, k$ enthalten, größer als $c_4 c_6 2^n = c_2 2^n$ ist; dies beweist Lemma 4.

Mit Hilfe von Lemma 4, Lemma 3 von [2] und der Methode von Kleitman [6] können wir folgenden Satz beweisen: Es sei $|S| = n$, $A_i \subset S$, $i = 1, \ldots, k$, $k > c_7 2^n/\sqrt{n}$, ein System von Mengen, für welche (27) unmöglich ist. Es sei $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ die Menge derjenigen A, die kein anderes A_i, $i = 1, \ldots, k$ als Teilmenge enthalten. Dann gilt $r > c_8 k$, $c_8 = c_8(c_7)$.

Auf den Beweis dieses Satzes wollen wir hier nicht eingehen.

Lemma 5. *Es sei $l_1 < \cdots < l_k \leqq x$ eine Folge ganzer Zahlen, für welche $(l_i, l_j) = l_r$ in verschiedenen Zahlen l unlösbar ist und für welche*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{l_i} > c \log x/(\operatorname{loglog} x)^{1/2}$$

gilt. Es seien $u_1 < \cdots < u_s \leqq x$ die Zahlen von der Form

$$l_i t, \quad t < \frac{x}{l_i}, \quad i = 1, \ldots, k.$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{s} \frac{1}{u_i} > c' \log x,$$

wobei c' nur von c abhängt.

Lemma 5 folgt aus Lemma 4 (wenn wir von unwesentlichen Abänderungen absehen), wie Lemma 1 von [4] aus Lemma 3 von [4] folgte.

Die Ungleichung (22) folgt nun sofort aus Lemma 5. Die l seien die Zahlen der Form $\{b_k q_j\}$ von (22). c sei gleich $\varepsilon/4$, und wenn η genügend klein ist, widerspricht (26) dem Lemma 5. Dieser Widerspruch beweist (22). Die Ungleichung (16) folgt nun aus (21) und (22), und damit ist unser Satz bewiesen.

Literatur

[1] F. Behrend, On sequences of numbers not divisible one by another, J. London Math. Soc. **10** (1935), 42—44; P. Erdös, Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other, ibid., 126—128.

[2] P. Erdös A. Sárközi and E. Szemerédi, On a theorem of Behrend, J. Australian Math. Soc. **7** (1967), 9—16.

[3] P. Erdös, A. Sárközi and E. Szemerédi, On the solvability of the equations $[a_i, a_j] = a_r$ and $(a_i', a_j') = a_r'$ in sequences of positive density, J. Math. Analysis and Applications **15** (1966), 60—64.

[4] P. Erdös, A. Sárközi and E. Szemerédi, On the solvability of certain equations in dense sequences of integers, Dokl. Akad. Nauk SSSR **176** (1967), 541—544.

[5] P. Erdös, A generalisation of a theorem of Besicovitch, J. London Math. Soc. **11** (1936), 92—98.

[6] D. Kleitman, On a combinatorial problem of Erdös, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 139—141.

[7] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, Math. Z. **27** (1928), 544—548.