Egy additív számelméleti probléma

ERDŐS PÁL és SURÁNYI JÁNOS

1. A Waring-féle problémakörrel és a vegyes előjelű hatványösszegekkel való előállításra vonatkozó analóg problémával kapcsolatban merült fel a következő kérdés: előállítható-e minden n egész szám pl. négyzetszámok segítségével úgy, hogy 1-től valamilyen alkalmas r határig minden négyzetszámot felhasználunk vagy pozitív vagy negatív előjellel, tehát

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j j^2, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

alakban. Ha ez lehetséges, további kérdés lehet r minimális értéke és adott n-hez mindazon r-értékek meghatározása, amelyekkel ilyen előállítás lehetséges.

Itt a négyzetszámokat természetesen csak példaként említettük, a probléma hasonlóan felvetődik négyzetszámok helyett tetszésszerinti adott k-val a k-adik hatványok sorozatára, de felvethető pl. a prímszámok sorozatára a négyzetszámok helyett és felmerül a kérdés, nem érvényes-e olyan tétel, amely szerint egész számok bizonyos általános, nem túl erős feltételnek eleget tevő sorozataira ezek a kérdések megválaszolhatók. Az alábbiakban egy ilyen tételt bizonyítunk be.

2. Tegyük fel egyelőre, hogy a pozitív egész számokból álló

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

sorozat olyan, hogy minden n természetes számra, vagy legalább egy alkalmas korláton felül mindegyikre fennáll alkalmas r-rel, hogy

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j, \quad \varepsilon_j = \pm 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

A csupa pozitív taggal írt összegre vezessük be a

$$\sum_{j=1}^{r} a_j = A_r$$

jelölést.

Ha $\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}, \ldots, \varepsilon_{j_l}$ értéke -1, a többi ε_j-é $+1$, akkor

$$A_r - n = 2(a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_l}),$$

tehát az A_r értékek közt végtelen sok párosnak és végtelen sok páratlannak kell lennie, hogy tetszésszerinti n-hez legyen olyan r, amelyre $A_r - n$ páros. Másrészt az $(A_r - n)/2$ számnak legalább egy r-re előállíthatónak kell lennie csupa különböző, és a_r-nél nem nagyobb a_j-k összegeként.

Ez a rövid meggondolás közelebb hozza a következő tétel feltételeinek egy részét:

Legyen $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ *egész számok sorozata:*

a) *amelyben végtelen sok páratlan szám van,*

b) *amelyre igaz, hogy bizonyos véges számú* $m_1, \ldots, m_s$ *szám kivételével minden természetes szám felbontható csupa különböző* a_j*-k összegére, és*

c) *amelyre alkalmas* k_0*-lal, ha* $k > k_0$*, akkor*

$$a_{k+1} < 2a_k - m_s;$$

akkor minden n *egész szám előállítható*

$$n = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j, \quad \varepsilon_j = \pm 1, \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

alakban.

Legyen r_n *az az egész szám, amelyre*

$$\sum_{j=1}^{r_n - 1} a_j < n \leqq \sum_{j=1}^{r_n} a_j.$$

Megadható egy c *állandó úgy, hogy a fönti állításban* r *felvehet minden* r_n*-nél és* c*-nél nagyobb értéket, amelyre* A_r *és* n *egyező párosságú.*

Ha pl. az a_i-k páratlanok, akkor r minimális értéke legfeljebb $r_n + 2$, ha pedig váltakozva párosak és páratlanok, akkor legfeljebb $r_n + 3$. Az első esetbe tartozik pl. a prímszámok sorozata, a másodikba a négyzetszámoké és általában a k-adik hatványoké. A négyzetszámok és prímszámok sorozatára még visszatérünk.

A c) feltételt a bizonyításban lényegesen kihasználjuk, azonban szökségességét nem látszik semmi plauzibilissé tenni.

3. A tétel állításai a következő segédtételből olvashatók le:
A fönti tétel feltételei mellett ha valamilyen r-re

$$t \leqq \sum_{j=1}^{r} a_j = A_r$$

és t sem m_i sem nem $A_r - m_i$ alakú ($i = 1, 2, \ldots, s$), akkor t előállítható csupa a_r-nél nem nagyobb különböző a_j összegeként is.

Ebből a kimondott tétel így látható be: Legyen c akkora, hogy $a_{c+1} > 2m_s$. Legyen n tetszésszerinti természetes szám, r_n pedig jelentse az (1) egyenlőtlenséggel meghatározott számot. Legyen $r > r_n$, $r > c$ és olyan, hogy n és $A_r = \sum_{j=1}^{r} a_j$ egyező párosságú; az a) feltétel szerint van végtelen sok ilyen r érték. Képezzük a

$$t_r = \frac{A_r - n}{2}$$

számot; ez feltevésünk szerint egész. A c megválasztása szerint

$$t_r = \frac{A_{r-1} + a_r - n}{2} \geqq \frac{A_{r_n} - n + a_r}{2} \geqq \frac{a_{c+1}}{2} > m_s,$$

másrészt

$$t_r < \frac{A_r}{2} = A_r - \frac{A_r}{2} \leqq A_r - \frac{A_{c+1}}{2} \leqq A_r - \frac{a_{c+1}}{2} < A_r - m_s,$$

tehát t_r sem nem m_i, sem nem $A_r - m_i$ alakú, és így a segédtétel szerint t_r előállítható csupa különböző és a_r-nél nem nagyobb a_j összegeként:

$$t_r = a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_l} \qquad j_1 < j_2 < \cdots < j_l \leqq r.$$

Innen

$$n = A_r - 2t_r = \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j a_j,$$

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1, & \text{ha } j = j_1, \text{ vagy } j_2, \ldots, \text{ vagy } j_l, \\ +1 & \text{különben.} \end{cases}$$

Segédtételünkből tehát egyszerűen következik a kimondott tétel.

4. Ha t_1 és t_2 két különböző természetes szám, amelyre $t_1+t_2=A_r$ és valamelyik előállítható csupa különböző és a_r-nél nem nagyobb a_j összegeként, akkor nyilvánvalóan ugyanez áll a másikra is. Ennek folytán egyrészt világos, hogy a segédtétel az m_i számokon kívül az A_r-m_i alakú számokra sem lehet igaz, másrészt igazolni elég a segédtételt pl. azokra a t-kre, amelyekre

$$0<t\leqq\frac{1}{2}A_r.$$

Ha t egy ennek eleget tevő egész és nem valamelyik m_i, akkor amennyiben kisebb a_{r+1}-nél, úgy előállítható a b) feltétel szerint csupa különböző a_j-k összegeként és ezek mind kisebbek a_{r+1}-nél, tehát nem nagyobbak a_r-nél, t-re tehát egy segédtételünknek is megfelelő előállítást kapunk.

Ha $n\geqq a_{r+1}$, akkor válasszuk v-t úgy, hogy fennálljon

$$a_r+a_{r-1}+\cdots+a_{v+1}<t\leqq a_r+a_{r-1}+\cdots+a_{v+1}+a_v,$$

és képezzük a

$$t'=n-a_r-a_{r-1}-\cdots-a_{v+1}(\leqq a_v)$$

számot. Ha ez nem valamelyik m_i, akkor ismét a b) feltétel szerint előállítható

$$t'=a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_l},\quad a_{j_1}<a_{j_2}<\cdots<a_{j_l}\leqq a_v$$

alakban, s így

$$t=t'+a_r+a_{r-1}+\cdots+a_{v+1}=a_{j_1}+a_{j_2}+\cdots+a_{j_l}+a_{v+1}+\cdots+a_r$$

egy kívánt alakú előállítás.

5. Ha végül valamilyen i-re $t'=m_i$, akkor képezzük a $t''=t'+a_{v+1}$ számot. Legyen a_k a sorozat utolsó eleme, amelyik még nem nagyobb, mint $t''/2$, akkor a c) feltétel szerint

$$a_k\leqq\frac{t''}{2}<a_{k+1}<2a_k-m_s\leqq t''-m_s.$$

Innen

$$m_s<t''-a_{k+1}<a_{k+1}$$

tehát b) folytán $t''-a_{k+1}$ előállítható csupa különböző a_j-k összegeként és ezek az a_j-k mind kisebbek a_{k+1}-nél. Így $t''=(t''-a_{k+1})+a_{k+1}$ is előállítható csupa különböző a_j-k összegeként, amelyek között a_{k+1} a legnagyobb. Mivel

$$t=t''+a_{v+2}+\cdots+a_{r-1}+a_r,$$

így a segédtételt ebben az esetben is igazoltuk, ha még belátjuk, hogy $a_{k+1} < a_{v+2}$. De

$$a_{k+1} < t'' - m_s = t' + a_{v+1} - m_s = a_{v+1} + m_i - m_s \leqq a_{v+1} < a_{v+2}.$$

Ezzel igazoltuk a segédtételt s egyszersmind a tételt is.

6. A prímszámok sorozatát véve a_i-k gyanánt ismeretes, hogy 1, 4 és 6 kivételével minden egész szám előállítható csupa különböző prímek összegeként, másrészt[1], ha $n \geqq 5$, akkor $p_{n+1} \leqq \leqq 2p_n - 7$. Ebből a **3.** pont gondolatmenetét követve és jelöléseit használva a_{c+1}-nak választható 13, tehát a tételbeli c gyanánt 5. A négyzetszámokra már lényegesen több a kivétel, de *minden 128-nál nagyobb egész szám már előállítható csupa különböző négyzetszám összegeként*[2]. Másrészt egyszerűen számítással belátható, hogy ha $n \geqq 13$, akkor

$$(n+1)^2 \leqq 2n^2 - 129.$$

Most a_{c+1} gyanánt 17^2 választandó és így tételünkben négyzetszámok esetén c választható 17-nek.

7. Általában igen nehéz kérdés annak az eldöntése, hogy mikor állítható elő minden elég nagy szám egy adott $a_1 < a_2 < \cdots$ egész számokból álló sorozat különböző elemeinek összegeként. Ha egy sorozatra ez teljesül, nevezzük T_1 tulajdonságúnak. Nyilván szükséges ehhez, hogy minden u-hoz és m-hez legyen olyan $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_l}$, amelyre

$$a_{j_1} + a_{j_2} + \cdots + a_{j_l} \equiv u \pmod{m}.$$

Azt gondolhatnánk, elégséges feltételt kapunk, ha ezen kívül még megköveteljük, hogy az a_{k+1}/a_k hányados 1-hez tartson, ez azonban nem áll[3].

[1] Az utóbbi állítás helyett mindjárt az látható be, hogy minden $m \geqq 10$-re (nem csak prímszámra) m és $2m-7$ közt van prímszám. Erre ugyanolyan gondolatmenet alkalmazható, mint arra, hogy n és $2n$ közt van prím (L. pl. [1] 129—132 old. v. [2] 341—344. old.) Ennek az egyenlőtlenségnek a felhasználásával az előbbi 12-nél nagyobb számokra teljes indukcióval látható, addig pedig könnyen ellenőrizhető.

[2] Ez is teljes indukcióval látható be, mint a prímszámokra vonatkozó megfelelő állítás. A következő 33 szám nem állítható elő különböző négyzetszámok összegeként: 2, 3, 6, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 19, 22, 23, 24, 27, 28, 31, 32, 33, 43, 44, 47, 48, 51, 55, 60, 67, 72, 76, 92, 96, 112, 124, 128.

[3] Erről a kérdésről J. W. S. Cassels egy érdekes cikke van megjelenőben az *Acta Sci. Mth. Univ. Szeged*-ben.

Ismeretes, [3], hogy az $a_n = n^k$ sorozatnak minden adott k pozitív egész számra megvan a T_1 tulajdonsága, de pl. tetszőleges relatív prím μ és v mellett az összes $\mu^k v^l$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$ számokból álló sorozatról csak legutóbb mutatta meg BIRCH[4], hogy megvan a T_1 tulajdonsága. Érdekes kérdésnek látszik, hogy ha α egy 1 és 2 közti szám, t pedig adott pozitív szám, akkor az $a_n = [t\alpha^n]$ sorozatnak megvan-e a T_1 tulajdonsága.

Talán természetesebb kérdés a következő tulajdonság vizsgálata: Azt mondjuk, hogy egy $a_1 < a_2 < \cdots$ sorozat T_2 tulajdonságú, ha megvan a T_1 tulajdonsága, és ez akkor is megmarad, ha a sorozatból bárhogy elhagyunk véges sok elemet. Nyilvánvalóan megvan ez a tulajdonsága az összes természetes számoknak, vagy az összes páratlan számoknak, de nincs meg a T_2 tulajdonsága az $a_n = 2^{n-1}$ sorozatnak, noha ez a T_1 tulajdonsággal rendelkezik. Ez a kérdés felvetés annyival látszik könnyebben megközelíthetőnek, a T_1 tulajdonságénál, mert ez nem múlhat néhány kis szám tulajdonságain. (Hasonlóan mint a Waring-féle problémakörben is természetesebbnek bizonyult az elég nagy számok előállításához szükséges k-adik hatványok számának kérdése, mint az összes természetes számok előállításáé[5].)

A számok k-adik hatványának adott k természetes számra, a prímszámok sorozatának megvan a T_2 tulajdonsága, talán már szerepelt is az irodalomban. Érdekes volna ebből a szempontból is megvizsgálni $1 < \alpha < 2$-re az $[\alpha^n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sorozatot.

IRODALOM

[1] ERDŐS P.—SURÁNYI J.: *Válogatott számelméleti kérdések*, (Budapest 1960, Tankönyvkiadó V.) 250 old.

[2] G. H. HARDY—E. M. WRIGHT: *An Introduction to the theory of numbers*, (Oxford, 1954) XVI + 419. old.

[3] R. SPRAGUE: Über Zerlegung in n-te Potenzen mit lauter verschiedenen Grundzahlen, *Math. Zeitschrift*, **51** (1949), 466—468. old.

[4] Dolgozata a *Proc. of Cambridge Phil. Soc.*-ben van sajtó alatt. Eredménye következik CASSELS 3. lábjegyzetben említett eredményéből is.

[5] L. pl. [1] 170—185 old. v. [2] 317—325. old.

ОБ ОДНОЙ ПВОБЛЕМЕ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

P. ERDŐS и J. SURÁNYI

Авторы доказывают, что, если для безконечной последовательности целых чисел $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ выполняются следующие условия: *a)* последовательность содержит весконечно много нечётных элементов, *b)* за исключением некоторых чисел $m_1 < m_2 < \cdots < m_s$ каждое положительное целое число может быть представленно в виде суммы различных, *c)* для всех достаточно больших k $a_{k+1} < 2a_k - m_s$, то всякое целое число n может быть представленно в виде

$$n = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i a_i \quad \varepsilon_i = \pm 1 \quad (i = 1, \ldots, r).$$

Здесь r может быть любим достаточно большим числом, для которого чётность $\sum_{i=1}^{r} a_i$ и n совпадает.

Хотя не видно, что условие *c)* необходимо, оно играет существенную роль в доказательстве. Было бы интересно дать простое достаточное условие того, когда некоторая последовательность удовлетворяет условию *b)*, или решитч выполняется ли оно для последовательности $[t\alpha^n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ при данных $t > 0$, $1 < \alpha < 2$,

ÜBER EIN PROBLEM AUS DER ADDITIVEN ZAHLENTHEORIE

von P. ERDŐS und J. SURÁNYI

Folgender Satz wird bewiesen: Für die aus ganzen Zahlen bestehende Folge $0 < a_1 < a_2 < \cdots$ gelte folgendes: a) Es gibt unendlich viele ungerade Elemente der Folge, b) alle natürliche Zahlen bis auf gewisse endlich viele: $m_1 < \cdots < m_s$ können als Summe von verschiedenen Elementen der Folge dargestellt werden, c) für genügend grosse Werte von k gilt $a_{k+1} < 2a_k - m_s$. In diesem Falle kann jede ganze Zahl n in der Form

$$n = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i a_i, \quad \varepsilon_i = \pm 1 \qquad (i = 1, \ldots, r)$$

dargestellt werden. Für r kann jeder genügend grosser Wert gewählt werden, für dem die Parität von n und $\sum_{i=1}^{r} a_i$ übereinstimmen.

Kein Grund scheint die Notwendigkeit der Voraussetzung c) zeigen, im Beweis wird sie aber wesentlich ausgenützt. Es wäre interessant eine brauchbare hinreichende Bedingung dafür zu geben dass eine Folge die Eigenschaft b) besitzt, oder zu entscheiden, ob die Folge $[t\alpha^n]$, wo $t > 0$, $1 < \alpha < 2$ gegebene Zahlen sind, die Eigenschaft b) besitzt oder nicht.