Made in United States of America

Reprinted from JOURNAL OF MATHEMATICS AND PHYSICS
Vol. XVII, No. 2, June, 1938

ÜBER EULER-LINIEN UNENDLICHER GRAPHEN

VON P. ERDÖS, T. GRÜNWALD UND E. VÁZSONYI in Budapest

Einleitung

1,1. Man versteht unter der Euler-Linie eines unendlichen Graphen eine Folge der Kanten, welche eine jede Kante des Graphen einmal und nur einmal enthält. Für endliche Graphen gilt der folgende Satz von Euler:[1] Ein aus endlich vielen Kanten bestehender Graph besitzt eine geschlossene Euler-Linie dann und nur dann, wenn

I. der Graph zusammenhängend,

II. geraden Grades ist.[2]

In seinem vorher zitierten Werke stellt D. König folgendes Problem: was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein unendlicher Graph eine Euler-Linie besitzt. Wir verstehen unter einer Euler-Linie eines unendlichen Graphen eine in beiden Richtungen unendliche Folge der Kanten, $\cdots, P_{-1}P_0, P_0P_1, \cdots$ in der eine jede Kante des Graphen genau einmal vorkommt.

Unsere Arbeit enthält die Lösung dieses Problems.

Es ist evident, dass ein unendlicher Graph nur dann eine Euler-Linie besitzen kann, wenn er

T_1. zusammenhängend ist,

T_2. die Anzahl der Kanten abzählbar ist,

T_3. enthält keinen einzigen Knotenpunkt ungeraden Grades.[3] Dies sind notwendige Bedingungen, die wir triviale Bedingungen nennen. In den folgenden Untersuchungen wird vorausgesetzt, dass der Graph diese Bedingungen erfüllt. Es ist leicht zu sehen, dass diese trivialen Bedingungen nicht hinreichend sind (Fig. 1.) stellt uns z.B. einen Graphen dar, welcher die trivialen Bedingungen erfüllt und doch keine Euler-Linie besitzt.

Wir nennen die zusammenhängenden Graphen, in welche der Graph

[1] S, z, B. D. König, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Leipzig, 1936, p. 20.

[2] Ein Graph ist geraden Grades, wenn die Anzahl der sich in einem jeden Knotenpunkt treffenden Kanten gerade ist. Der Grad eines Knotenpunktes bedeutet die Anzahl der Kanten, die sich in diesem Punkte treffen.

[3] d. h. die Knotenpunkte der Graphen sind entweder geraden oder unendlichen Grades.

durch Weglassung eines endlichen Teilgraphen zerfällt, Komponente des Graphen und beweisen in §1, folgenden

Satz: Wenn ein unendlicher Graph G eine Euler-Linie bezitzt, dann besteht $G - g$[4] für einen jeden endlichen $g \subset G$ aus höchstens 2 unendlichen Gliedern. In späteren bezeichnen wir diese Bedingung durch E_1.

Setzen wir nun voraus, dass die Notwendigkeit von E_1 schon bewiesen ist, und fragen ob es mit den trivialen Bedingungen zusammen hinreichend ist (Fig. 2) zeigt unmittelbar, dass die Antwort verneinend ist.

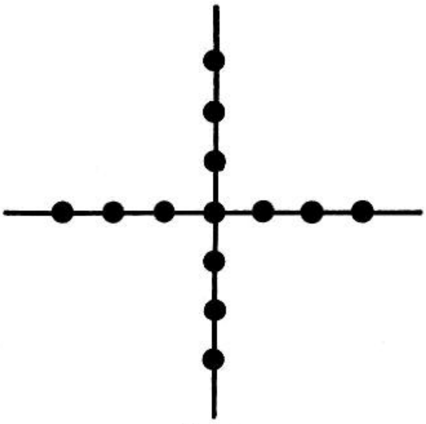


FIG. 1

FIG. 2

In §2 werden wir aber zeigen, dass wenn der unendliche Graph die trivialen Bedingungen erfüllt und für jedes endliche $g \subset G$, $G - g$ eine einzige unendliche Komponente bezitzt (Bedingung E) der Graph G eine Euler-Linie hat.

Es ist aber aus (Fig. 3) klar, dass Bedingung E nicht notwendig ist.

Bedingung E ist daher hinreichend aber nicht notwendig, E_1 hingegen notwendig, aber nicht hinreichend: E verlangt zu viel, E_1 zu wenig. Nun leiten wir aus E eine notwendige Bedingun *ab*, indem wir nicht

[4] Der Graph $G - g$ bedeutet den Graph, welcher aus G durch Weglassung von g entsteht. Bemerkt sei dabei, dass wenn sämmtliche Kanten eines Knotenpunktes weggelassen werden, auch der betreffende Knotenpunkt wegzulassen ist. Die Zeichen $g \subset G$ und $P \subset G$ bedeuten, dass g ein Teilgraph von G beziehungsweise P ein Knotenpunkt von G ist.

verlangen dass im Falle eines jeden $g \subset G$ der graph $G - g$ eine einzige unendliche Komponente habe, sondern nur für graphen g geraden grades.

Also beweisen wir -und das ist der eigentliche Gegenstand dieser Arbeit- folgendes.

Satz: Ein unendlicher Graph G besitzt eine Euler-Linie dann und nur dann, wenn er die trivialen Bedingungen T_1, T_2, T_3, erfüllt und ausserdem.

E_1. im Falle eines beliebigen endlichen $g \subset G$ der Graph $G - g$ höchstens 2 unendliche Komponente hat.

E_2. wenn $g \subset G$ einen beliebigen, endlichen Graph geraden Grades bedeutet, der Graph $G - g$ eine einzige unendliche Komponente enthält.

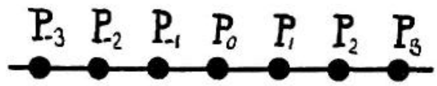


FIG. 3

1,2. Bevor wir aber unsern Satz beweisen, ersetzen wir die Bedingungen E_1 und E_2 durch andere, die etwas weniger fordern. Wir wollen nämlich voraussetzen, dass unser Satz schon bewiesen ist. Dann, da G eine Euler-Linie besitzt, können wir zu einem jeden endlichen Graph $g \subset G$ eine Kantenzug[5] z mit $g \subset z \subset G$ bestimmen. Wenn aber der Graph $G - z$ höchstens 2 unendliche Komponente besitzt, dann ist es mit Rücksicht auf $G - g \supset G - z$, unmittelbar klar, dass auch $G - g$ höchstens 2 unendliche Komponente hat. Es wäre daher denkbar, dass E_1 und E_2 eine hinreichende Bedingung darstellten, wenn man anstatt den Graphen g Kantenzüge nimmt. Dies ist auch wirklich der Fall. Man kann sogar auch für die Kantenzüge etwas vorschreiben, Wir werden später sehen, dass sogar die folgenden Bedingungen hinreichend sind.

E_1'. Es existiert ein Knotenpunkt $Q \subset G$[6] so, dass für einen beliebigen

[5] Unter Kantenzug eines Graphen versteht man eine endliche Folge P_1P_2, P_2P_3, $\cdots$, $P_{n-1}P_n$ der Kanten, in der eine Kante höchstens einmal vorkommt. (Ein Kantenzug ist daher immer ein endlicher Graph.) Wenn $P_1 = P_n$ dann ist der Kantenzug geschlossen, er ist hingegen offen, wenn $P_1 \neq P_n$. (Die Euler-Linie eines endlichen Graphen ist daher ein geschlossener Kantenzug, der sämtliche Kanten des Graphen enthält.)

[6] Dieser Knotenpunkt des Graphen heisst ausgezeichneter Punkt. Diese Auszeichnung ist aber nicht im Graph selbst, sondern nur in der Bedingung enthalten, denn wenn der Graph einen ausgezeichneten Punkt besitzt, dann kann man alle seine Knotenpunkte für ausgezeichnet betrachten. Denn wenn

Kantenzug z mit $Q \subset z \subset G$, der Graph $G - z$ höchstens zwei unendliche Komponenten besitzt.

E_2'. für einen beliebigen geschlossenen Kantenzug z mit $Q \subset z \subset G$, besitzt der Graph $G - z$ genau eine unendliche Komponente.

Nun ist der Gedankengang unseres Beweises der Folgende. Wir beweisen, dass E_1. und E_2. notwendige Bedingungen sind, die Bedingungen E_1' und E_2' sind daher auch notwendig, da sie weniger verlangen. Dann beweisen wir, dass E_1'. und E_2'. hinreichend sind, woraus unmittelbar folgt, dass auch E_1. und E_2 hinreichend sind, da sie mehr verlangen.

1,3. Wir wollen endlich hervorheben, was die trivialen Bedingungen T_1, T_2 und T_3 für eine wichtige Klasse der unendlichen Graphen, für die sogenannten unendlichen Graphen endlichen Grades,[7] bedeuten. Bei diesen wird T_3 einfach durch die Annahme ersetzt, dass der Graph geraden Grades ist. T_2 bleibt weg, denn wie bekannt, sind die Kanten eines zusammenhängenden Graphen endlichen Grades abzählbar.[8] Die trivialen Bedingungen verlangen daher nur, dass der Graph *zusammenhängend* und *geraden* Grades sei.

§1. Beweis der Notwendigkeit der Bedingungen E_1 und E_2

Wir setzen voraus, das der Graph G eine Euler-Linie besizt d.h. es existiert eine Kantenfolge

$$\cdots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \cdots$$

welche jede Kante einmal und nur einmal enthält. Es sei $g \subset G$ ein beliebiger endlicher Graph. Auf alle Fälle gibt es zwei ganze Zahlen μ und ν, so dass für den Kantenzug

$$Z = (P_\mu P_{\mu+1}, P_{\mu+1}P_{\mu+2}, \cdots, P_{\nu-1}P_\nu) \text{ mit } P_\mu \neq P_\nu$$

$g \subset Z$ gilt. Es sei ferner

$$E_{-1} = (\cdots, P_{\mu-2}P_{\mu-1}, P_{\mu-1}P_\mu),$$
$$E_{+1} = (P_\nu P_{\nu+1}, P_{\nu+1}P_{\nu+2}, \cdots),^{9}$$

der Graph E_1', und E_2' erfüllt, so besitzt er eine Euler-Linie, erfüllt daher auch die notwendigen Bedingungen E_1 und E_2. Also erfüllt $G - g$ die gewünschten Bedingungen für einen beliebigen endlichen Graph g.

[7] Ein Graph ist von endlichem Grade, wenn sich in einem jeden seiner Knotenpunkte endlich viele Kanten treffen.

[8] D. König, l.c. p. 79.

[9] Die Bezeichnung bedeutet, dass E_{-1} und E_{+1} einseitige unendliche Euler-Linien sind.

daher

$$G = E_{-1} + Z + E_{+1}.$$ [10]

Da $G - g \supset G - Z = E_{-1} + E_{+1}$, kann eine Komponente des Graphen $G - g$ nur dann unendlich sein, wenn sie E_{-1} oder E_{+1} enthält. Dies bedeutet aber, dass dieser Graph höchstens 2 unendliche Komponenten besitzt, also erfüllt G die Bedingung E_1. .

Jetzt betrachten wir die Bedingung E_2. Wir beweisen, dass wenn $g \subset G$ geraden Grades ist, so hat der Graph $G - g$ ein einziges unendliches Glied. Wir nehmen Z wie oben und konstruieren einen Kantenzug z mit

$$P_\nu, P_\mu \subset z \subset G - g, Z$$

(Wo $Z = (P_\mu P_{\mu+1}, \cdots, P_{\nu-1}P_\nu)$, $P_\mu \neq P_\nu$.) Die Konstruktion geschieht folgendermassen: Der Knotenpunkt P_μ ist in Z ungeraden Grades, während er im Falle $P_\mu \subset g$ in g vom geraden Grade ist. Also ist der Knotenpunkt P_μ im Graph $Z - g$ ungeraden Grades, woraus die Existenz einer Kante $P_\mu P_{i_1} \subset Z - g$ folgt. Für $P_{i_1} = P_\nu$, setzen wir $z = P_\mu P_{i_1}$. Wenn aber $P_{i_1} \neq P_\nu$, dann ist es mit Rücksicht darauf, dass P_{i_1} in dem Kantenzug Z geraden Grades ist und für $P_{i_1} \subset g$ auch in g geraden Grades ist, auch in $Z - g$ geraden Grades. Also ist P_{i_1} im Graph $Z - g - P_\mu P_{i_1}$ ungeraden Grades, woraus folgt, dass es eine Kante $P_{i_1}P_{i_2} \subset Z - g - P_\mu P_{i_1}$ existiert. Wenn $P_{i_2} = P_\nu$, so ist

$$z = (P_\mu P_{i_1}, P_{i_1}P_{i_2});$$

wenn hingegen $P_{i_2} \neq P_\nu$ und $P_{i_2} \neq P_\mu$ so existiert -ebenso wie früher- eine Kante

$$P_{i_2}P_{i_3} \subset Z - g - P_\mu P_{i_1} - P_{i_1}P_{i_2}$$

Wir können eine solche Kante auch dann finden, wenn $P_{i_2} = P_\mu$. (Denn der Knotenpunkt $P_{i_2} = P_\mu$ ist in Z ungeraden Grades, im Graph $(P_\mu P_{i_1}, P_{i_1}P_{i_2})$ hingegen geraden Grades, ferner für $P_\mu \subset g$ auch in g geraden Grades. Der Knotenpunkt $P_{i_2} = P_\mu$ ist daher im Graph

$$Z - g - P_\mu P_{i_1} - P_{i_1}P_{i_2}$$

ungeraden Grades; woraus folgt, dass es eine Kante

$$P_{i_2}P_{i_3} \subset Z - g - P_\mu P_{i_1} - P_{i_1}P_{i_2}$$

[10] Die Summe zweier keine gemeinsame Kante enthaltenden Graphen bedeutet den Graph, der von den Kanten beider Graphen gebildet wird. $z \subset Z, Z'$ bedeutet (unten) $z \subset Z$ und $z \subset Z'$.

gibt.) Wir können dieses Verfahren solange fortsetzen, bis wir den Knotenpunkt P_ν erreicht haben. Wir erhalten so einen Kantenzug, welche unseren Erforderungen entspricht, da sie P_μ mit P_ν verbindet und da aus $z \subset Z - g$ und $Z \subset G$ folgt, dass $z \subset G - g, Z$.

$(G - Z)$[11] $+ z = E_{-1} + z + E_{+1}$ ist aber ein zusammenhängender Graph mit

$$(G - Z) + z \subset G - g,$$

woraus tatsächlich folgt, dass der Graph $G - g$ nur eine einzige unendliche Komponente besitzt.

Also haben wir die Notwendigkeit der Bedingungen E_1 und E_2 bewiesen, woraus natürlich auch die Notwendigkeit der weniger verlangenden Bedingungen E_1' und E_2' folgt.

§2. Beweis, dass Bedingung E hinreichend ist

2,1. Wir verfolgen hier, den in der Einleitung angegebenen Weg: wir beweisen nämlich, dass auch schon die weniger verlangenden Bedingungen E_1'. und E_2'. hinreichend sind. Entsprechend beweisen wir nicht E sondern zeigen, dass der Graph G eine Euler-Linie besitzt, wenn er ausser den trivialen Bedingungen noch folgende Bedingung erfüllt:

E'. Es existiert ein Knotenpunkt[12] $Q \subset G$ derart, dass für einen jeden Kantenzug $Q \subset z \subset G$ der Graph $G - z$ eine einzige unendliche Komponente hat.

2,2. Der Beweis wird in 2 Schritten geführt:

Wir numerieren die Kanten des Graphen G beliebig und konstruieren einen geschlossenen Kantenzug Z_0 so, dass

1. $Q \subset Z_0$,
2. der Kantenzug enthält die Nummer 1 führende Kante[13] des Graphen G,
3. Der Graph $G - Z_0$ erfüllt sowohl die trivialen Bedingungen wie auch E'.[14] und zwar so dass der ausgezeichnete Knotenpunkt $Q_1 \subset Z_0$ ist.

Wir nehmen einen Kantenzug $z_1 \subset G$ welcher aus dem ausgezeichneten Knotenpunkt $Q = Q_0$ ausgeht und die Kante 1 enthält. Nach E'

[11] Der Graph $G - Z$ und die Kantenlinie z haben, wegen $z \subset Z$ keine gemeinsame Kante.

[12] Den Knotenpunkt Q nennt man "ausgezeichneten Knotenpunkt" Vgl. Fussnote 6.

[13] Der Kürze halber nennen wir diese Kante 1.

[14] Dies ist so zu verstehen, dass man in E'. G durch $G - Z_0$ ersetzt.

enthält der Graph $G - z_1$ nur eine einzige unendliche Komponente. Wir fügen die übrigen (endlichen) Komponenten zu z_1 und erhalten einen endlichen Graph g_1.[15]

Es ist unschwer zu sehen, dass die Anzahl der Knotenpunkte ungeraden Grades in g_1 entweder 0 oder 2 ist. Betrachten wir nämlich zuerst den Knotenpunkt $P \subset g_1$, $P \not\subset G - g_1$. Dann ist P in g_1 vom selben Grade als in G, d.h. er ist mit Rücksicht auf die Endlichkeit von g_1, geraden Grades. Wenn aber $P \subset g_1$, $G - g_1$, dann ist $P \subset z_1$. Denn wenn $P \not\subset z_1$ wäre, dann wäre P, mit Rücksicht darauf, dass g_1 aus z_1 durch Zufügung der endlichen Glieder des Graphen $G - z_1$ entstanden ist, in g_1 vom selben Grade wie in G; und so würde entgegen den Voraussetzungen $P \not\subset G - g_1$ gelten. Wir behaupten ferner, dass in diesem Falle auch $P_1 \not\subset g_1 - z_1$ gilt. Denn $P \subset g_1$, $g_1 - z_1$ würde bedeuten, dass bei der Zufügung der Glieder von $G - z_1$ an z_1 auch Kanten, die sich in P treffen hinzugefügt worden sind. Dann hätten wir aber sämtliche sich in P treffende Kanten von $G - z_1$ an z_1 hinzugefügt, d.h. der Grad von P würde in g_1 und G derselbe sein. Es wäre daher $P \not\subset G - g_1$ ein offenbarer Widerspruch. Aus $P \subset z_1$ und $P \not\subset g_1 - z_1$ folgt aber, dass sich in P nur Kanten des z_1 treffen, d.h. P ist in g_1 vom selben Grade als in z_1. Wenn daher z_1 einen geschlossenen Kantenzug darstellt, dann hat g_1, überhaupt keinen Knotenpunkt vom ungeraden Grade. Dasselbe gilt, wenn die endpunkte des offenen Kantenzuges z die Punkte P_1, $P_2 \not\subset G - g_1$ sind. Wenn aber die Endpunkte des offenen Kantenzuges z_1 die Punkte P_1, $P_2 \subset G - g_1$ sind, dann besitzt g_1 in diesen beiden Punkten einen Knotenpunkt ungeraden Grades. Damit haben wir unsere Behauptung für g_1 bewiesen.

Wenn g_1 geraden Grades ist, dann bezeichnen wir ihn mit g. Wenn er hingegen zwei Knotenpunkte ungeraden Grades P_1, P_2 besitzt, dann gilt -nach dem Vorhergesagten- P_1, $P_2 \subset G - g_1$ Da $G - g_1$ zusammenhängend ist, so muss er einen die Knotenpunkte P_1 und P_2 verbindenden Kantenzug besitzten. Wir fügen nun diesen Kantenzug zu g_1 und erhalten eine endlichen Graph g_2. Da g_2 geraden Grades ist, können wir ihn -nach dem in der Einleitung angeführten Eulerschen Satze- für einen geschlossenen Kantenzug z_2 betrachten. Infolge von $Q \subset z_2$ besitzt der Graph $G - z_2$—nach E'—nur eine einzige unendliche Komponente. Wir fügen die endlichen Glieder des Graphen $G - z_2$ zu z_2 und erhalten einen endlichen Graph geraden Grades g. Dieser

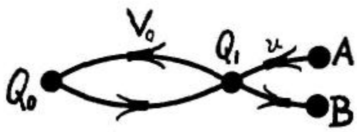
[15] g_1 ist endlich, da die Anzahl der endlichen Komponenten des Graphen $G - z_1$ notwendigerweise endlich ist.

Graph ist geraden Grades, da er nur dort einen Knotenpunkt ungeraden Grades haben könnte, wo auch z_2 einen solchen Knotenpunkt hat (dies ist ebenso zu beweisen, wie wir es früher bewiesen haben, dass der Graph g_1 nur dort einen Knotenpunkt ungeraden Grades haben kann, wo auch z_1 einen solchen besitzt). Da aber z_2 ein geschlossener Kantenzug ist, hat er keinen einzigen Knotenpunkt ungeraden Grades. Auf alle Fälle haben wir auf diese Weise einen endlichen Graph geraden Grades g, für welchen der Graph $G - g$ zusammenhängend ist.

Nach dem Eulerschen Satz können wir den Graph g als einen geschlossenen Kantenzug Z_0 auffassen. Wir behaupten, dass Z_0 die gewünschten Bedingungen erfüllt. Es ist nämlich $Q_0 \subset Z_0$ und die Kante 1 ist in Z_0 enthalten, also erfüllt Z_0 Bedingungen 1. und 2.

Das auch 3. erfüllt wird, sehen wir folgendermassen ein:

T_1. ist erfüllt, da $G - Z_0 = G - g$



$V_0 + v = AQ + Q_1Q_0 + Q_0Q_1 + Q_1B$

FIG. 4

T_2., T_3. sind erfüllt, da der Graph $G - Z_0$ aus G durch Weglassung eines endlichen Graphen geraden Grades enstanden ist.

E'. wird dadurch erfüllt, dass man ein $Q_1 \subset G - Z_0$, Z_0 zum ausgezeichneten Knotenpunkt wählt. Denn für einen solchen haben wir nur zu beweisen, dass der Graph $G - Z_0 - z$ für einen beliebigen $Q_1 \subset z \subset G - Z_0$ Kantenzug nur eine einzige unendliche Komponente besitzt. Wie aber aus (Fig. 4) zu ersehen ist bildet der Kantenzug z mit dem geschlossenen Kantenzug Z_0 zusammen einen Graph, der mit Rücksicht auf $Q_1 \subset z, Z_0$, für einen Kantenzug z' zu betrachten ist. Da $Q_0 \subset z'$ folgt aus E', dass der Graph $G - z'$ eine einzige unendliche Komponente hat. Es ist aber

$$G - z' = G - Z_0 - z;$$

wir haben daher bewiesen, dass Z_0 das Erwünschte leistet.

2,3. Der Graph $G - Z_0$ erfüllt die trivialen Bedingungen T_1., T_2., T_3 ferner auch E'. und zwar so, dass man einen Knotenpunkt $Q_1 \subset Z_0$,

$G - Z_0$ zum ausgezeichneten Knotenpunkt wählen kann. Wir können daher die frühere Konstruktion für den Graph $G - Z_0$ wiederholen. Durch die Wiederholung erhalten wir einen geschlossenen Kantenzug $Q_1 \subset Z_1 \subset G - Z_0$, welcher die Kante niedrigster Nummer des Graphen $G - Z_0$ enthält. Der Graph $G - Z_0 - Z_1$ erfüllt wieder T_1, T_2, T_3 und auch E' und zwar so, dass man einen Knotenpunkt $Q_2 \subset G - Z_0 - Z_1, Z_1$ zum ausgezeichneten Punkte wählt. Wir setzen dieses Verfahren fort und erhalten die unendliche Folge $Z_0, Z_1, Z_2, \cdots$ geschlossener Kantenzüge ohne gemeinsame Kante. Dieser unendliche Kantenzug enthält alle Kanten des Graphen G und $Q_i, Q_{i+1} \subset Z_i$. Der geschlossene Kantenzug Z_0 ist aber auch für einen aus Q_1 ausgehenden und ebendorthin zurückkehrenden Kantenzug Z'_0, während der geschlossene Kantenzug Z_i in zwei die Punkte Q_i und Q_{i+1} verbindende offene

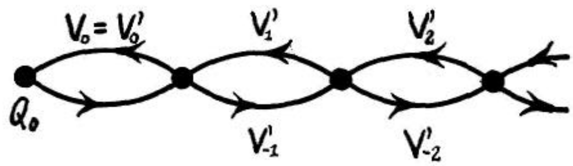


FIG. 5

Kantenzüge Z'_{-i} und Z'_{+i} $(i = 1, 2, 3, \cdots)$ zu zerlegen ist. Die Folge der zusammenschliessenden Kantenzüge

$$\cdots, Z'_{-2}, Z'_{-1}, Z'_0, Z'_1, Z'_2, \cdots$$

gibt die gesuchte Euler-Linie des Graphen (Fig. 5).

§3. Über einseitig unendliche Euler-Linien

3,1. Wir definieren als einseitig unendliche Euler-Linie eines unendlichen Graphen eine einseitig unendliche Folge seiner Kanten

$$P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, \cdots$$

welche eine jede Kante des Graphen einmal und nur einmal enthält. Bei dem Beweis, dass die Bedingungen E'_1. und E'_2 hinreichend sind, brauchen wir ein Kriterium, durch welches wir entscheiden können, ob ein unendlicher Graph eine einseitig unendliche Euler-Linie besitzt.

In diesem § werden wir zeigen, dass der unendliche Graph G eine einseitig unendliche Euler-Linie besitzt, wenn er folgende Bedingungen erfüllt

I. $T_1.$,
II. $T_2.$,
III. $E.$,
IV. und noch folgende Bedingung
T^*, welche besagt: wenn G einen Knotenpunkt Q[16] ungeraden Grades hat, so ist dieser der einzige Knotenpunkt ungeraden Grades; wenn G keinen Knotenpunkt ungeraden Grades hat, so gibt es in ihm wenigstens einen Knotenpunkt Q unendlichen Grades.[17]

Wie in §2 ersetzen wir $E.$ durch eine weniger verlangende Bedingung. E''. Im Falle eines aus, durch T^* ausgezeichneten Knotenpunkt Q ausgehenden Kantenzuges $z \subset G$ hat der Graph $G - z$ eine einzige unendliche Komponente.[18]

3,2. Die Überlegungen, durch welche wir unser Kriterium beweisen, sind den in §2. verwendeten ähnlich. Zu allererst numerieren wir die Kanten von G beliebig. Dann konstruieren wir einen Offenen Kantenzug $Z_0 \subset G$ mit:
(1) er geht aus $Q = Q_0$ aus
(2) er enthält die mit 1 versehene Kante des Graphen
(3) $G - Z_0$ erfüllt T_1, T_2, T^*, E''[19] und zwar T^* wird so erfüllt, dass der ausgezeichnete Punkt der von Q_0 verschiedene Endpunkt des offenen Kantenzuges Z_0 ist.

Z_0 wird folgendermassen konstruiert:

Wir betrachten einen aus dem ausgezeichneten Knotenpunkt ausgehenden offenen Kantenzug z_1 des G welcher Kante 1 enthält.[20] Wir

[16] Im Folgenden wollen wir diesen Knotenpunkt ausgezeichneten Punkt des Graphen nennen.

[17] Es wäre unschwer zu beweisen, dass die Bedingungen auch notwendig sind, Da wir aber diesen Satz nicht brauchen, werden wir ihn auch nicht beweisen.

[18] E'' unterscheidet sich von E' in zwei Punkten. Erstens wird der "ausgezeichnete" Punkt durch T^* tatsächlich ausgezeichnet (Vergleiche Fussnote 6.), zweitens ist der Kantenzug z nicht ein beliebiger durch Q gehender, sondern aus Q ausgehender Kantenzug.

[19] Dies ist wieder so zu verstehen, dass in den Kriterien G durch $G - Z_0$ zu ersetzen ist.

[20] Ein solcher Kantenzug existiert. Denn, da G zusammenhängend ist, ist in ihm notwendigerweise ein aus Q_0 ausgehender Kantenzug zu finden, welcher die Kante 1 enthält. Wenn dieser Kantenzug geschlossen ist, kann er als Graph geraden Grades sämtliche sich in Q_0 treffende Kanten des G nicht erschöpfen (die Anzahl dieser Kanten ist nicht gerade). Man kann daher zu diesem geschlossenen Kantenzug eine aus Q_0 entspringende Kante des G hinzufügen und dadurch erhält man schon aus dem geschlossenen Kantenzug den gewünschten offenen Kantenzug.

bezeichnen den von Q_0 verschieden Endpunkt dieses Kantenzuges durch Q_1. Da z_1 aus Q_0 entspringt hat der Graph $G - z_1$ nach E" nur eine einzige unendliche Komponente. Wir fügen seine endlichen Komponenten zu z_1 und erhalten dadurch den endlichen Graph g_1. Wir behaupten, dass Q_0 und Q_1 ungeraden Grades, alle übrigen Knotenpunkte des Graphen g_1 hingegen geraden Grades sind. Wir argumentieren hier genau wie in 2,2. Es sei zuerst $P \subset g_1$, aber $P \not\subset G - g_1$. Dann ist P in g_1 desselben Grades, wie in G, also ungeraden Grades in g_1 wenn $P = Q_0$ und geraden Grades, wenn $P \neq Q_0$ (der Grad kann nicht unendlich werden, da g_1, selbst endlich ist). Wenn hingegen $P \subset g_1$, $G - g_1$, dann ist $P \subset z_1$ und $P \not\subset g_1 - z_1$,[21] also ist der Grad von P in g_1 und z_1 derselbe; also geraden Grades, wenn $P \neq Q_0$, Q_1 —, ungeraden Grades, wenn $P = Q_0$, Q_1. Also haben wir bewiesen, dass Q_0 auf alle Fälle ungeraden Grades ist, während wir dies für Q_1 nur im Falle $Q_1 \subset G - g_1$ gezeigt haben. Aber es ist leicht zu sehen, dass Q_1 immer ungeraden Grades ist. Denn die Anzahl der Knotenpunkte ungeraden Grades ist für einen endlichen Graph immer eine Gerade Zahl[22] also kann Q_0 nicht der einzige Knotenpunkt ungeraden Grades in g_1 sein.

Der Graph g_1 kann also als ein die Punkte Q_0 und Q_1 verbindender offener Kantenzug Z_0 betrachtet werden.[23] Wir behaupten, dass der offene Kantenzug Z_0 allen gewünschten Erforderungen entspricht. (1) und (2) erfüllt er offenbar, also müssen wir uns ausführlicher nur mit (3) beschäftigen.

Dass $G - Z_0$ die gewünschten Bedingungen erfüllt, sieht man folgendermassen:

T_1. ist erfüllt, da $G - Z_0 = G - g_1$

ebenso T_2., da die Kanten des G abzählbar sind.

T^*. ist auf die gewünschte Weise erfüllt, denn erstens sind die Knotenpunkte $P \subset G - Z_0$, $P \not\subset Q_0$, Q_1, in Z_0 geraden Grades, in G hingegen entweder geraden oder aber unendlichen Grades; also ist P auch in $G - Z_0$ entweder geraden oder unendlichen Grades. Der Knotenpunkt $P = Q_0 \subset G - Z_0$ ist in Z_0 ungeraden Grades, in G hingegen ungeraden oder unendlichen Grades. Wenn also der Graph $G - Z_0$ überhaupt einen Knotenpunkt ungeraden Grades hat, so kann dies nur der Knotenpunkt Q_1 sein. Tatsächlich, wenn Q_1 in G endlichen d.h. geraden Grades ist, so ist er in $G - Z_0$ ungeraden Grades, da er in Z_0 ungeraden Grades ist. Wenn aber Q_1 in G unendlichen Grades ist, so hat der

[21] Siehe ausführlicher in 2,2,.

[22] S. z. B. D. König, op. cit., h. 21.1.

[23] Siehe in 5.1.

Graph $G - Z_0$ überhaupt keinen Knotenpunkt ungeraden Grades; er hat aber in diesem Falle wenigstens einen Knotenpunkt unendlichen Grades und der Knotenpunkt Q_1 ist eben ein solcher Punkt.

E'' wird ebenfalls erfüllt. Wir haben nur zu zeigen, dass der Graph $G - Z_0 - z$ für einen jeden aus Q_1 ausgehenden Kantenzug $z \subset G - Z_0$ nur eine einzige unendliche Komponente hat. Die aus Q_1 ausgehenden keine gemeinsamen Kanten besitzenden Kantenzüge Z_0 und z kann man aber als einen einzigen aus Q_0 ausgehenden Kantenzug z' betrachten (Z_0 entspringt nämlich im Punkte Q_0), also, mit Rücksicht darauf, dass G die Bedingung E'' erfüllt, hat der Graph $G - z' = G - Z_0 - z$ nur eine einzige unendliche Komponente.

3,3. Unsere Konstruktion ist für den Graph $G - Z_0$ zu wiederholen. Auf diese Weise gewinnen wir einen offenen Kantenzug $Z_1 \subset G - Z_0$,

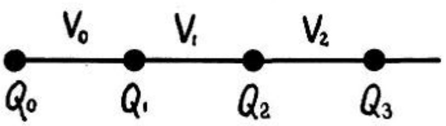


Fig. 6

dessen Endpunkte Q_1 und Q_2 sind, der die mit der kleinsten Nummer versehene Kante von $G - Z_0$ enthält und für den der Graph $G - Z_0 - Z_1$ die Bedingungen T_1, T_2, T^* und E'' mit Q_2 als ausgezeichneten Punkt erfüllt. Durch widerholte Verwendung des Verfahrens erhalten wir eine unendliche Folge offener Kantenzüge

$$Z_0, Z_1, Z_2, \cdots,$$

die keine gemeinsamene Kanten haben und sich in den Knotenpunkten $Q_1, Q_2, \cdots$ aneinander anschliessen und die Kanten des Graphen G erschöpfen. Die Folge dieser Kantenzug gibt die gesuchte einseitig unendliche Euler-Linie des Graphen (Fig. 6).

§4. Beweis des Hauptsatzes

In diesem Paragraph werden wir beweisen, dass die Bedingungen E_1' und E_2' hinreichend sind.

In §2 haben wir gezeigt, dass wenn der Graph neben diesen Bedingungen auch E' erfüllt, dann besitzt er eine Euler-Linie. Wir setzen jetzt voraus, dass dies nicht besteht, es existiert also ein Kantenzug $Q \subset z_1 \subset G$ so, dass der Graph $G - z_1$ aus zwei unendlichen Gliedern besteht. Nach E_2' ist z_1 sicherlich ein offener Kantenzug. Wir fügen jetzt die endlichen Glieder des Graphen $G - z_1$ zu z_1 und erhalten dadurch einen endlichen Graph g_1. Wir behaupten, dass g_1 genau zwei Knotenpunkte ungeraden Grades besitzt. [Genau wie in 2,2 können wir auch hier beweisen, dass g_1 entweder 2 Knotenpunkte ungeraden Grades hat oder selbst vom geraden Grade ist. Es ist aber unschwer zu sehen, dass g_1 nicht geraden Grades sein kann, denn wenn g_1 geraden Grades wäre, so könnten wir ihn für einen geschlossenen Kantenzug z_2 betrachten. Anderseits aus $z_2 = g_1 \supset z_1$ folgt, dass $G - z_2 \subset G - z_1$. Also wenn $G - z_1$ zwei unendliche Komponenten hätte, hätte auch $G - z_2$ zwei unendliche Komponenten (mehr nicht, denn G erfüllt E_1'). Dies ist aber unmöglich, denn G erfüllt E_2' d. h. wenn $Q \subset z_2$ ein geschlossener Kantenzug ist, hat $G - z_2$ eine einzige unendliche Komponente. Der Graph g_1 kann daher für einen offenen Kantenzug Z mit den Endpunkten Q_{-1} und Q_{+1} betrachtet werden. Nun besteht der Graph $G - Z$ aus zwei unendlichen Komponenten G_{-1} und G_{+1}. Wir haben daher

$$G = G_{-1} + Z + G_{+1}$$

Wir behaupten, dass die Graphen G_{-1} und G_{+1} beide einseitig unendliche Euler-Linien besitzen, die aus den Endpunkten Q_{-1} beziehungsweise Q_{+1} ausgehen. Wir wenden nämlich die Kriterien des §3 auf G_{-1} an.

G_{-1} erfüllt die Bedingungen T_1 und T_2. T^* wird auch erfüllt und zwar mit dem ausgezeichneten Knotenpunkt $Q = Q_{-1}$. [Der Knotenpunkt $P \subset G_{-1}$, $P \not\subset G - G_{-1}$ hat nämlich in G_{-1} denselben Grad wie in G er kann daher nicht ungeraden Grades sein. Anderseits haben wir für den Knotenpunkt $P \subset G_{-1}$, $G - G_{-1}$ (mit Rücksicht darauf, dass G_{-1} und G_{+1} keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben), $P \not\subset G_{+1}$ ferner, mit Rücksicht darauf, dass

$$G - G_{-1} = Z + G_{+1}$$

$P \subset Z$. Daraus folgt aber, dass der Grad von P in G_{-1} gleich der Differenz der Grade des Knotenpunktes P in G und Z ist. Da P in G entweder geraden oder unendlichen Grades ist, während $P \neq Q_{-1}$ in Z geraden Grades ist, kann der Knotenpunkt $P \neq Q_{-1}$ in G_{-1} nicht ungeraden Grades sein. Anderseits ist Q_{-1} in Z ungeraden Grades, also in G_{-1} entweder ungeraden oder unendlichen Grades, je nachdem Q_{-1} in G endlichen (d. h. geraden) oder unendlichen Grades ist.]

Endlich erfüllt G_{-1} auch E''. Wir werden nämlich zeigen, dass der Graph $G_{-1} - z$ für einen aus Q_{-1} entspringenden Kantenzug $z \subset G_{-1}$ eine einzige unendliche Komponente besitzt. Die beiden, aus Q_{-1}

entspringenden keine gemeinsamen Kanten besitzenden Kantenzüge z und $Q \subset Z$ können als ein Kantenzug $z' \supset Q$ aufgefasst werden. Da G E_1' erfüllt, hat der Graph $G - z'$ höchstens 2, und wegen $G - z' \subset G_{-1} + G_{+1}$ wenigstens 2, also genau 2 unendliche Komponenten. Die eine unendliche Komponente ist G_{+1}, der Graph $G - z' - G_{+1}$ hat daher genau ein einziges unendliches Glied. Es gilt aber

$$G - z' - G_{+1} = (G_{-1} + Z + G_{+1}) - (z + Z) - G_{+1} = G_{-1} - z.$$

Also haben wir bewiesen, dass G_{-1} als eine, aus Q_{-1} entspringende einseitig unendliche Euler-Linien E_{-1} aufzufassen ist. Auf ähnliche Weise folgt, dass G_{+1} als eine, aus Q_{+1} entspringende einseitig unendliche Euler-Linien aufzufassen ist. Mit Rücksicht darauf, dass

$$G = G_{-1} + Z + G_{+1} = E_{-1} + Z + E_{+1}$$

stellen die zusammenschliessenden Linien E_{+1}, Z und E_{-1} die gesuchte Euler-Linie des Graphen G (Fig. 7).

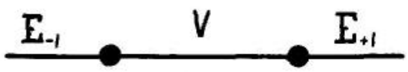


FIG. 7

§5. Verwandte Probleme

In diesem § beschäftigen wir uns mit 3 von D. König gestellten Problemen.

5,1. Für endliche Graphen gilt der folgende Satz von Listing.[24]

Die Anzahl der Knotenpunkte ungeraden Grades eines endlichen Graphen sei 2n.[25] Es existiert ein System der Kantenzüge $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$, welche eine jede Kante des gegebenen Graphen einmal und nur einmal enthält.

Durch die in dieser Arbeit verwendete Methode kann man diesen Satz auch auf unendliche Graphen übertragen. Es gilt nämlich folgender Satz: (dessen Beweis wir in dieser Arbeit nicht geben.)

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür dass zum unendlichen Graphen G ein endliches System $Z_1, Z_2, \cdots Z_n$ der endlichen,

[24] D. König, op. cit., p. 22.

[25] Wie erwähnt ist die Anzahl der Knotenpunkte ungeraden Grades eines endlichen Graphen immer eine gerade Zahl.

einseitig unendlichen, oder von beiden Seiten unendlichen Kantenzüge,[26] *welche die Kanten der Graphen genau einmal enthalten existieren, sind die folgenden;*

1. G erfüllt T_2,
2. G enthält höchstens endlich viele Knotenpunkte ungeraden Grades.
3. es existiert eine Zahl C so, dass die Anzahl der unendlichen Teile des Graphen $G - g$, für ein beliebiges endliches $g \subset G$ kleiner als C ist.[27]

5,2. Für endliche Graphen gilt folgender Satz von Euler:

Die Kanten eines jeden endlichen zusammenhängenden Graphen sind durch eine Kantenfolge

$$P_0P_1, P_1P_2, \cdots, P_{n-1}, P_n, P_nP_0$$

zu erschöpfen, in welcher eine jede Kante des Graphen genau zweimal vorkommt.

Die Übertragung dieses Satzes auf unendliche Graphen lautet folgendermassen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Kanten des unendlichen Graphen G durch eine von beiden Seiten unendliche Kantenfolge

$$\cdots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, \cdots$$

zu erschöpfen seien sind und zwar so, dass die Folge eine jede Kante des Graphen G genau zweimal enthält, dass G folgende Bedingungen erfüllt

1. T_1
2. T_2
3. E[28]

Betrachten wir nämlich den Graph G^*, welcher aus G entsteht, wenn man zu einer jeden Kante $K \subset G$ eine andere Kante K' hinzufügt, welche dieselben 2 Punkte wie K verbindet. Dann besagt unser Satz, dass G^* eine Euler-Linie besitzt. Wir müssen daher beweisen, dass G^*

[26] Man versteht unter einem von beiden Seiten unendlichen Kantenzug eine Folge der Kanten

$$\cdots, P_{-1}P_0, P_0P_1, \cdots$$

in der eine jede Kante höchstens einmal vorkommt. ahnlicher Weise ist ein einseitig unendlicher Kantenzug die Folge der Kanten

$$P_0P_1, P_1P_2, \cdots$$

die jede Kante höchstens einmal enthält.

[27] Daraus folgt auch, dass G weniger als C unendliche Glieder hat.

[28] E könnte man auch hier durch E' ersetzen.

die Bedingungen T_1, T_2, T_3, E_1 und E_2 dann und nur dann erfüllt, wenn G den Bedingungen T_1, T_2 und E genüge leistet.

Es ist unmittelbar klar, dass G^* die Bedingungen T_1 und T_2 dann und nur dann erfüllen kann, wenn auch G dieselben Bedingungen erfüllt. Ferner entspricht G^* der Bedingung T_3 immer, da er doch durch die Verdoppelung der Kanten von G entstanden ist. Wir haben daher nur zu zeigen, dass G^* die Bedingung E_1 und E_2 dann und nur dann erfüllt, wenn G der Bedingung E entspricht.

Wir setzen zuerst voraus, dass G die Bedingung E nicht erfüllt, d. h. es existiert ein endlicher Graph $g \subset G$ für welchen der Graph $G - g$ mehrere unendliche Komponenten hat und beweisen sofort, dass in diesem Falle G^* die Bedingung E_2 nicht erfüllt. Wir bezeichnen nämlich die unendlichen Komponenten des Graphen $G - g$ durch $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$. Wir verdoppeln die Kanten von $g, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$ und erhalten dadurch die Graphen $g^*, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \cdots$. Dann sind die unendlichen Komponenten des Graphen $G^* - g^*$ eben $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \cdots$. Da aber g^* ein Graph geraden Grades ist bedeutet dies eben, dass der Graph G^* Bedingung E_2 nicht erfüllt.

Jetzt wollen wir zeigen, dass wenn G die Bedingung E erfüllt, so erfüllt G^* nicht nur E_1 und E_2 sondern auch E. Denn, dass G^* der Bedingung E nicht entspricht, würde bedeuten, dass es einen endlichen Graph $\bar{g} \subset G^*$ gibt, für den der Graph $G^* - \bar{g}$ mehrere unendliche Komponenten hat. Betrachten wir nun die Kante $K \subset \bar{g}$. Aus der Entstehung von G^* ist es klar, dass es auch eine andere Kante $K' \subset G^*$ gibt, welche die selben 2 Knotenpunkte, wie K verbindet. Wenn $K' \subset \bar{g}$, so adjungieren wir sie zu $\bar{g}$; wir erhalten so einen endlichen Graph geraden Grades $\bar{g}^*$. Da der Graph $G^* - \bar{g}$ nach der Voraussetzung mehrere unendliche Komponenten besitzt und da, wegen $\bar{g} \subset \bar{g}^*$, $G^* - \bar{g} \supset G^* - \bar{g}^*$, so hat auch $G^* - \bar{g}^*$ mehrere unendliche Komponenten $\bar{\gamma}_1^*, \bar{\gamma}_2^*, \cdots$. Wir bezeichnen nun die aus den in G liegenden Kanten der Graphen $\bar{g}^*, \bar{\gamma}_1^*, \bar{\gamma}_2^*, \cdots$ gebildete Graphen durch $g, \gamma_1, \gamma_2, \cdots$ (durch Verdoppelung der Kanten dieser Graphen ergeben sich die Graphen $\bar{g}^*, \bar{\gamma}_1^*, \bar{\gamma}_2^*, \cdots$). Die Graphen $\gamma_1, \gamma_2, \cdots$ sind die unendlichen Komponente des Graphen $G-g$. Da aber g ein endlicher Graph ist, steht dieses Ergebnis mit der Voraussetzung dass G, E erfüllt in Widerspruch. Damit haben wir also bewiesen, dass wenn G^* die Bedingung E nicht erfüllt, so erfüllt sie auch G nicht. Also wenn G durch E erfüllt ist, so wird sie auch durch G^* erfüllt.

Womit unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

5,3. Wir verbinden den Gitterpunkt $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ des n dimensionalen Raumes (x beliebige ganze Zahlen) durch Kanten mit den Gitterpunkten $(x_1 + 1, x_2, \cdots, x_n)$, $(x_1, x_2 + 1, \cdots x_n)$, $\cdots$ $(x_1, x_2, \cdots, x_n + 1)$. Wenn wir diese Verbindungen für alle Gitterpunkte des Raumes durchgeführt haben, erhalten wir den gewöhnlichen Gittergraph des n dimensionalen Raumes.

Es fragt sich, ob der gewöhnliche Gittergraph des n dimensionalen Raumes eine Euler-Linie besitzt.

Aus den Resultaten unserer Arbeit ergibt sich die bejahende Antwort sehr einfach.[29] Es ist nämlich evident, dass der n dimensionale Gittergraph T_1 und T_2 erfüllt, er erfüllt auch T_3, da sich in einem jeden Knotenpunkt $2n$ Kanten treffen. Es wird ferner auch E erfüllt, denn wenn wir aus dem Graph einen beliebigen endlichen Graph weglassen, hat der zurückbleibende Graph nur ein einziges unendliches Glied.

Es gilt also folgender Satz: *der gewöhnliche Gittergraph des n dimensionalen Raumes besitzt eine Euler-Linie.*

BUDAPEST, HUNGARY.

[29] Einen direkten Beweis dieses Satzes gibt die demnächst in der Acta Lentci. ca Litt Szeged erscheinende Arbeit von E. Vázsonyi: Über Gitterpunkte des mehrdimensionalen Raumes.