Megoldások a Gyakorlatokhoz

Gyakorlat 1.2. Hol irtuk az AxPh formulájában, hogy a fénysebesség véges?

Megoldás: Az első válasz az, hogy nem definiáltuk, hogy két pont összekötő egyenesének meredeksége mikor végtelen. A Q minden eleme végesnek számít ebből a szempontból.

De érdemes továbbmenni. Mit érthetünk azon, hogy egy egyenes meredeksége végtelen? Azt szoktuk mondani, hogy egy hatás végtelen gyorsan terjed, ha 0 idő alatt ér egyik helyről a másikra. (Régen azt hitték, hogy a fény így terjed.) Ez azt jelenti, hogy az egyenes vizszintes a téridődiagramban. A p, q téridőpontot összekötő egyenes vizszintes ha $p_t = q_t$ és $p_s \neq q_s$. Ezt nem lehetséges ilyen alakban felírni: $|p_s - q_s| = c \cdot |p_t - q_t|$ semmilyen c-vel sem. Ezt írtuk a Fényaxiómában, tehát ezzel kizártuk a vizszintes egyeneseket. Ha $|p_s - q_s| \cdot c = |p_t - q_t|$-t írtunk volna, akkor kizártuk volna az álló egyenest, de megengedtük volna a fekvő egyenest. Végül, ha $|p_s - q_s| \cdot c + |p_t - q_t| \cdot d = 0$-t írtunk volna, akkor mindenfajta egyenest megengedtünk volna. Tehát azt is mondhatnánk, hogy ott jelenik meg AxPh megfogalmazásában, hogy a fénysebesség nem végtelen, hogy kihagytuk a vizszintes egyeneseket (és ezek legalább kételemű részhalmazait) mint potenciális fény életutakat. Kicsit formálisabban fogalmazva, ott, hogy a c szorzó nem az egyenlőség másik oldalán szerepel.

Gyakorlat 1.3. Fogalmazzuk meg, hogy a foton életútja egy egyenes részhalmaza (írjuk fel az egyenes képletét) és bizonyítsuk $\mathsf{AxField}$, AxPh-ból, hogy ez igaz (tehát, hogy foton életútja egyenes részhalmaza).

Megoldás: Például a következő formula megfogalmazza, amit akarunk:

$$\begin{aligned}&\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall ph \in \mathsf{Ph}\ \exists p, q \in \mathsf{Q}^4\ \ p \neq q \wedge \\ &\quad \forall r \in \mathsf{Q}^4\ \ r \in \mathsf{wline}_m ph \rightarrow \exists x \in \mathsf{Q}\ \ r = p + x \cdot (p - q).\end{aligned}$$

Most pedig bizonyítjuk ezt a formulát $\mathsf{AxField}$, AxPh és Gyak.1.6 felhasználásával. Legyen $m \in \mathsf{IOb}$, $ph \in \mathsf{Ph}$ és legyen $H = \mathsf{wline}_m ph$. Azt kell belátnunk, hogy $H \subseteq \ell$ valamely ℓ egyenesre. Ha $|H| \leq 1$, akkor ez triviálisan teljesül ($\mathsf{AxField}$). Legyen $|H| \geq 2$, legyen $p, q \in H$ két különböző pont és legyen ℓ az az egyenes, ami p-t és q-t összeköti. Pontosan egy ilyen van ($\mathsf{AxField}$). Azt látjuk be, hogy $H \subseteq \ell$. Legyen $r \in \mathsf{wline}_m ph = H$ tetszőleges. Akkor $p, q, r \in \mathsf{wline}_m ph$ miatt a p, q, r fotonháromszöget alkot, tehát elfajuló, ld. Gyak.1.6. (Megjegyzés: Gyak.1.6-ban az egész $\mathsf{SpecRel}$-t használhattuk, de balátható, hogy elég lett volna csak a mostan megengedett két axiómát, $\mathsf{AxField}$, AxPh-t használni.) Tehát p, q, r egy egyenesre esik, és ez akkor az az ℓ ami p-t és q-t összeköti. Tehát $r \in \ell$, és készen vagyunk.

Gyakorlat 1.4. Jelölje AxPh^+ azt az állítást, amit AxPh -ból kapunk úgy, hogy hozzátesszük, hogy a fénysebesség nem nulla, azaz $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall ph \in \mathsf{Ph}\ \forall p, q \in \mathsf{wline}_m ph\ (p \neq q \rightarrow p_s \neq q_s)$. Bizonyítsuk $\mathsf{AxField}$, AxPh^+ és AxSelf-ből, hogy a megfigyelők nem fotonok. (Minden x-re $\mathsf{IOb}(x)$ -ből következik, hogy nem $\mathsf{Ph}(x)$.) Bizonyítsuk, hogy ez nem igaz, ha AxPh^+ helyett AxPh-t használunk.

Megoldás: Csak azt a részt írjuk le, hogy ha $c = 0$, akkor nem következik $\mathsf{SpecRel}_0 = \mathsf{SpecRel} - \mathsf{AxSymd}$-ből, hogy $\mathsf{IOb} \cap \mathsf{Ph} = 0$. Ezt úgy bizonyítjuk, hogy megadjuk egy modelljét $\mathsf{SpecRel}_0$-nak, ahol IOb és Ph nem diszjunkt, sőt olyan, hogy egyik sem része a másiknak. Legyen $(\mathsf{Q}, +, \cdot)$ tetszőleges test, amiben $\mathsf{AxField}$ teljesül. Ilyen van, pl. a valós számok teste ilyen. Legyen $\mathsf{Ph} = \mathsf{Q}^3$, $\mathsf{IOb} = \{(0,0,0), k\}$ ahol $k \notin \mathsf{Q}^3$, és legyen $\mathsf{B} = \mathsf{Ph} \cup \mathsf{IOb}$. Definiáljuk a W világképrelációt úgy, hogy $(0,0,0)$ világképében és k világképében is az (x, y, z) bodi életútja a (x, y, z) pontra emelt függőleges egyenes:

$$\mathsf{W}((0,0,0), p, (x,y,z)) \leftrightarrow \mathsf{W}(k, p, (x,y,z)) \leftrightarrow (\exists t \in \mathsf{Q}) p = (t, x, y, z),$$

továbbá k életútja az időtengely

$$\mathsf{W}((0,0,0), p, k) \leftrightarrow \mathsf{W}(k, p, k) \leftrightarrow (\exists t \in \mathsf{Q}) p = (t, 0, 0, 0).$$

Legyen $M = \langle \mathsf{Q}, +, \cdot, \mathsf{B}, \mathsf{IOb}, \mathsf{Ph}, \mathsf{W} \rangle$, ezzel megadtuk az M modellt. Könnyű ellenőrizni, hogy $M \models \mathsf{SpecRel}_0$ továbbá IOb és Ph összemetsz de egyik sem része a másiknak.

Gyakorlat 1.6. Bizonyítsuk be $\mathsf{SpecRel}$-ből, hogy nincs fotonutakból álló nem-elfajuló háromszög. Pontosabban, nincs három különböző koordinátapont, hogy bármely kettőt foton köt össze (meredeksége 1) és a három pont

nincs egy egyenesen. Formálisan, bizonyítsuk be, hogy $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall p,q,r \in \mathsf{Q}^4\ [(\exists ph \in \mathsf{Ph}\ p,q \in \mathsf{wline}_m(ph) \wedge \exists ph \in \mathsf{Ph}\ p,r \in \mathsf{wline}_m(ph) \wedge \exists ph \in \mathsf{Ph}\ q,r \in \mathsf{wline}_m(ph)) \rightarrow \exists x \in \mathsf{Q}\ r = p + x \cdot (p-q)]$.

Megoldás: SpecRel-ből csak AxField, AxPh-t fogjuk használni a megoldásban, hogy használhassuk az eredményt a Gyak.1.3 megoldásában. Legyen p,q,r különböző, fotonokkal összekötve, és legyen c a fénysebesség. Feltehetjük, hogy $c \neq 0$, mert különben készen vagyunk.

Három szemléletes geometriai állításra is visszavezetjük ezt a feladatot az AxPh segítségével, és aztán e geometriai állításokat lehet bizonyítani AxField-ből.

a.) Mivel p,q-t foton köti össze, azért q rajta van a p-ből induló fénykúpon. Mivel mind p,r-t mind q,r-t foton köti össze, azért r rajta van a p-ből induló és a q-ből induló fénykúpok metszetén. Mivel q rajta van a p-ből induló fénykúpon, e két fénykúp metszete egy egyenes.

b.) Toljuk el a qr szakaszt párhuzamosan a p pontba, azaz legyen $r' = r+q-p$. Ekkor p,r'-t is foton köti össze AxPh szerint, hiszen pr' meredeksége ugyanaz, mint qr-é. Ekkor a p,q,r síkban a c pontból három fényegyenes indul ki, pq, pr és pr'. Mivel minden síkban minden ponton legfeljebb kettő különböző fényegyenes indul ki (bizonyítandó AxField-ből), azért a három fényegyenes közül valamelyik kettő egybeesik, ami azt jelenti, hogy a p,q,r háromszög elfajuló.

c.) Mivel Q rendezett, azért p_t, q_t, r_t valamilyen sorrendben fordulnak elő Q-ban, mondjuk $p_t \leq q_t \leq r_t$. Ekkor

$$|r_t - p_t| = |r_t - q_t| + |q_t - p_t|. \tag{1}$$

Mivel p,q,r-t foton köti össze, AxPh-ból kapjuk, hogy

$$c \cdot |r_t - p_t| = |r_s - p_s|,\ c \cdot |r_t - q_t| = |r_s - q_s|,\ c \cdot |q_t - p_t| = |q_s - p_s|. \tag{2}$$

Most (1) és $c \neq 0$-ból kapjuk, hogy $|r_s - p_s| = |r_s - q_s| + |q_s - p_s|$. Azaz, Q^3-ban p_s, q_s, r_s olyan háromszöget alkot, ahol az egyik oldal hossza a másik két oldal hosszának összege. Ez csak úgy lehetséges, hogy a háromszög elfajuló. (Bizonyítandó AxField-ből.) Tehát p_s, q_s, r_s egy egyenesen van, így p,q,r egy síkban van. Mivel pq meredeksége c ugyanannyi, mint qr meredeksége (az is c), ebből következik, hogy p,q,r egy egyenesen van.

Példaképpen bizonyítjuk most az utóbbi, c.)-ben kapott állítást AxField-ből. Tegyük fel, hogy a $p,q,r \in \mathsf{Q}^3$ pontok olyanok, hogy a pr szakasz hosza

egyenlő a pq és qr szakaszok hosszának összegével. Bizonyítjuk, hogy a q rajta van a pr egyenesen. Használni fogjuk a Q^3 elemein az un. skalárszorzást

$$p \cdot q = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + p_3 \cdot q_3.$$

A skalárszorzás additív (azaz $(p+q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$), Q elemével való szorzás kiemelhető (azaz $(xp) \cdot q = x(p \cdot q)$), a pq szakasz hosszának négyzete $(p-q) \cdot (p-q)$, amit $(p-q)^2$-el is jelölünk, továbbá a pq egyenes merőleges az rs egyenesre csakkor ha $(p-q) \cdot (r-s) = 0$.

Legyen q' a q-ból a pr egyenesre húzott merőleges pr-el vett metszéspontja, azaz

$$(p-r) \cdot (q'-q) = 0, \quad \text{és} \quad q' = p + x(p-r) \quad \text{valamely } x \in \mathsf{Q}\text{-ra.}$$

Ilyen q' van: a fenti egyenletrendszert kell x-re megoldani, használjuk a skalárszorzás fent nevezett tulajdonságait:

$$(p-r) \cdot (p + x(p-r) - q) = 0,$$

$$(p-r) \cdot (p-q) + x(p-r)^2 = 0,$$

$$x = ((p-r) \cdot (p-q))/(p-r)^2.$$

Namost p, q, q' és r, q, q' derékszögű háromszögek, ilyenekben az átló hosszabb mint a befogó és csak akkor egyenlő ha a háromszög elfajuló, ezt most bizonyítjuk. Pontosabban, azt bizonyítjuk, hogy egy derékszögű háromszögben az átló hosznégyzete egyenlő a befogók hosznégyzetének összegével, ebből következik a bizonyítandó állítás.

Tehát azt kell bizonyítani, hogy $(p-q)^2 = (p-q')^2 + (q-q')^2$ ahol $(p-q') \cdot (q-q') = 0$. Feltehetjük, hogy $q = (0,0,0)$ (párhuzamos eltolások miatt, enélkül is könnyű végigszámolni, csak több betű lesz). Tehát, kell, hogy $(p-q)^2 = p^2 + q^2$ és tudjuk, hogy $p \cdot q = 0$. Ez rögtön adódik a skalárszorzás fent említett tulajdonságaiból: $(p-q)^2 = p^2+q^2-2p \cdot q = p^2+q^2$.

Visszatérünk most az eredeti $p, q, r \in \mathsf{Q}^4$ pontjainkhoz. Tehát eddig kaptuk, hogy p_s, q_s, r_s egy egyenesen van, azaz $q_s - p_s = x(r_s - q_s)$ valamey $x \in \mathsf{Q}$-ra. Ebből, $p_t \leq q_t \leq r_t$-ből és (2)-ből kapjuk, hogy $q_t - p_t = x(r_t - q_t)$, tehát $q - p = x(r-q)$, azaz p, q, r egy egyenesen van.

Gyakorlat 1.7. Bizonyítsuk $\mathsf{SpecRel}$-ből, hogy minden megfigyelő minden eseményt legfeljebb egyszer (egy koordinátaponton) lát. Formálisan

$\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall p, q \in \mathsf{Q}^4\ \ p \neq q \rightarrow \exists b \in \mathsf{B}\ \neg[\mathsf{W}(m, b, p) \leftrightarrow \mathsf{W}(m, b, q)]$, azaz $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall p, q \in \mathsf{Q}^4\ \ p \neq q \rightarrow \mathsf{ev}_m(p) \neq \mathsf{ev}_m(q)$.

Megoldás: Fotonokat célszerű keresni, mert az ő létezésüket posztulálja egy axióma. A p ponton átmegy legalább két különböző fotonéletút, mondjuk legyen $p' = \langle p_1 + 1, p_2 + 1, p_3, p_4 \rangle$ és $p'' = \langle p_1 - 1, p_2 + 1, p_3, p_4 \rangle$, ekkor p, p' és p, p'' meredeksége 1, legyen ph_0, ph_1 két foton aki összeköti őket a Fényaxióma szerint. Legyen ℓ_0 a p, p'-on, és ℓ_1 a p, p''-on átfektetett egyenes. Ezek különbözők, ezért legfeljebb az egyik mehet csak át a q ponton, mondjuk ℓ_0 elkerüli a q-t. Akkor a ph_0 foton nem fordul elő a q-beli eseményben, mert ph_0 életútja része az ℓ_0 egyenesnek a Gyak.1.3 szerint. Tehát $ph_0 \in \mathsf{ev}_m(p)$ és $ph_0 \notin \mathsf{ev}_m(q)$, vagyis $\mathsf{ev}_m(p) \neq \mathsf{ev}_m(q)$, ami a bizonyítandó volt.