Gyakorlatok a Relativitáselmélet Logikus Alapon előadáshoz

2010. május 10.

Gyakorlat 1.1. (Határidő: feb.24) Tegyük fel a testaxiómákat és hogy minden számra vagy neki vagy az ellentettjének van gyöke. Mutassuk meg, hogy akkor az alábbi két állítás ekvivalens:
i. az $x \leq y{:=}\exists z(y - x = z^2)$ módon definiált reláció lineáris rendezés
ii. Ha három négyzetszám összege nulla, akkor ezen négyzetszámok mindegyike nulla, azaz $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \rightarrow x = 0$.

Gyakorlat 1.2. (Határidő: feb.24) Hol irtuk az AxPh formulájában, hogy a fénysebesség véges?

Gyakorlat 1.3. (Határidő: feb.24) Fogalmazzuk meg, hogy a foton életútja egy egyenes részhalmaza (irjuk fel az egyenes képletét) és bizonyitsuk $\mathsf{AxField}$, AxPh-ból, hogy ez igaz (tehát, hogy foton életútja egyenes részhalmaza).

Gyakorlat 1.4. (Határidő: feb.24) Jelölje AxPh^+ azt az állítást, amit AxPh -ból kapunk úgy, hogy hozzátesszük, hogy a fénysebesség nem nulla, azaz $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall ph \in \mathsf{Ph}\ \forall p, q \in \mathsf{wline}_m ph\ (p \neq q \rightarrow p_s \neq q_s)$. Bizonyítsuk $\mathsf{AxField}$, AxPh^+ és AxSelf-ből, hogy a megfigyelők nem fotonok. (Minden x-re $\mathsf{IOb}(x)$ -ből következik, hogy nem $\mathsf{Ph}(x)$.) Bizonyítsuk, hogy ez nem igaz, ha AxPh^+ helyett AxPh-t használunk.

Gyakorlat 1.5. (Határidő: feb.24)
(i) Töltsük ki a részleteket a NoFTL bizonyitásában.
(ii) Mutassuk meg, hogy a bizonyítás tetszőleges 2-nél nagyobb dimenzióra is működik, és hogy 2 dimenzióra nem következik a NoFTL állítás.
(iii) Ellenőrizzük, hogy a bizonyítás működik az AxSym szimmetria axióma nélkül is (akkor is, ha a fénysebesség nulla).

Gyakorlat 1.6. (Határidő: feb.24) Bizonyítsuk be SpecRelből, hogy nincs fotonutakból álló nem-elfajuló háromszög. Pontosabban, nincs három különböző koordinátapont, hogy bármely kettőt foton köt össze (meredeksége 1) és a három pont nincs egy egyenesen. Formálisan, bizonyítsuk be, hogy $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall p, q, r \in \mathsf{Q}^4\ [(\exists ph \in \mathsf{Ph}\ p, q \in \mathsf{wline}_m(ph) \wedge \exists ph \in \mathsf{Ph}\ p, r \in \mathsf{wline}_m(ph) \wedge \exists ph \in \mathsf{Ph}\ q, r \in \mathsf{wline}_m(ph)) \rightarrow \exists x \in \mathsf{Q}\ r = p + x \cdot (p - q)]$.

Gyakorlat 1.7. (Határidő: feb.24) Bizonyítsuk SpecRel-ből, hogy minden megfigyelő minden eseményt legfeljebb egyszer (egy koordinátaponton) lát. Formálisan $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall p, q \in \mathsf{Q}^4\ p \neq q \rightarrow \exists b \in \mathsf{B}\ \neg[\mathsf{W}(m, b, p) \leftrightarrow \mathsf{W}(m, b, q)]$, azaz $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \forall p, q \in \mathsf{Q}^4\ p \neq q \rightarrow \mathsf{ev}_m(p) \neq \mathsf{ev}_m(q)$.

Gyakorlat 1.8. (Határidő: márc.17.) Mutassuk meg, hogy AxField-ből következik, hogy Q végtelen. Mutassuk meg, hogy a racionális számoknak az összeadás és szorzással vett teste részalgebrája (részteste) a mennyiségek $(\mathsf{Q}, +, \cdot)$ testének.

Gyakorlat 2.1. Ki lehet-e elégíteni a Fényaxiómát csak az órák elállításával (szinkronból való kiállításával)? Csak az órák módosításával? Csak a méterrudak módosításával? Ki lehet-e elégíteni a Fényaxiómát a három hatás (órák elállítódása, órák lassulása, méterrudak rövidülése) valamelyikének elhagyásával? Esetleg egy teljesen más hatással? Miért, hogyan?

Gyakorlat 2.2. Legyen $\mathsf{SpecRel}_0 = \mathsf{SpecRel} - \mathsf{AxSymd}$. Bizonyítsuk be $\mathsf{SpecRel}_0$-ból, hogy két egymáshoz képest mozgó megfigyelő ($v_m(k) \neq 0$) közül legalább az egyikük úgy látja, hogy a másik órája határozottan lassabban jár mint az övé.

Gyakorlat 2.3. Legyen $\mathsf{SpecRel}_0 = \mathsf{SpecRel} - \mathsf{AxSymd}$. Bizonyítsuk be, hogy $\mathsf{SpecRel}_0$-ból nem következik, hogy mozgó órák egyenletesen járnak (fogalmazzuk meg az állítást). Használjuk a jegyzetből a Thm.8-at (Course2010-specrel.pdf, 76.old.) $\mathsf{SpecRel}_0$ olyan modelljének megadására, ahol az állítás nem igaz. Feltehetjük, hogy adott egy euklideszi test és egy nem-identitás automorfizmusa.

Gyakorlat 2.4. Tegyük fel, hogy $\mathsf{SpecRel}_0$ és $c = 1$. Bizonyítsuk, hogy ha r racionális szám, e, e', e_1, e_1' események az m életútján és m úgy látja, hogy az e, e' események között eltelt idő r-szerese az e_1, e_1' események között eltelt időnek, akkor minden más k megfigyelő is így látja.

Gyakorlat 2.5. (Határidő: márc.17.) Írjuk le az időlassulás bizonyítását csak a térre, és nem a téridődiagrammra koncentrálva.

Gyakorlat 2.6. (Határidő: márc.17.) Kössük az óralassulás (Thm.3) bizonyítását nyelvileg az Einstein órákhoz.

Gyakorlat 2.7. Fogalmazzuk meg formálisan a $\mathsf{SpecRel}$ nyelvén, hogy m úgy látja, hogy k órái előrefelé járnak. Bizonyítsuk, hogy ez nem következik $\mathsf{SpecRel}$-ből. Használjuk a jegyzetből a Thm.8-at (Course2010-specrel.pdf, 76.old.) $\mathsf{SpecRel}_0$ olyan modelljének megadására, ahol az állítás nem igaz. Feltehetjük, hogy adott egy euklideszi test és egy nem-identitás automorfizmusa.

Gyakorlat 2.8. Idézzük fel az előadásjegyzetből (Course2010-specrel.pdf, 51.old), hogy

$$MK_m = \{p \in \mathsf{Q}^4 : \exists k \in \mathsf{IOb}$$

$$\mathsf{ev}_m(0,0,0,0) = \mathsf{ev}_k(0,0,0,0) \wedge \mathsf{ev}_m(p) \in \{\mathsf{ev}_k(1,0,0,0), \mathsf{ev}_k(-1,0,0,0)\}\}.$$

Legyen

$$\mathsf{Hyp} = \{p \in \mathsf{Q}^4 : p_t^2 - |p_s|^2 = 1\}.$$

Tegyük fel, hogy $\mathsf{SpecRel}_0$, $c = 1$, KísérletAx és $\mathsf{IOb} \neq \emptyset$. Bizonyítsuk be, hogy a következő (i)-(iv) állítások ekvivalensek egymással.

(i) $\exists m \in \mathsf{IOb}\ \ MK_m = \mathsf{Hyp}$

(ii) $\forall m \in \mathsf{IOb}\ \ MK_m = \mathsf{Hyp}$

(iii) $\exists m, k \in \mathsf{IOb}\ \ MK_m = MK_k$

(iv) AxSymd.

Gyakorlat 2.9. Tegyük fel, hogy $\mathsf{SpecRel}_0$. Tegyük fel, hogy az m megfigyelő Minkowski köre a következő:

$$\{(t,x,y,z) \in \mathsf{Q}^4 : y = z = 0 \wedge ((|t| = 1 \wedge |x| < 1) \vee (|x| = 1 \wedge |t| < 1 \wedge |t| \neq 0))\}.$$

(A Minkowski kör definicióját ld. a 2.8 gyakorlatban és a jegyzetben.) Legyen k az m-hez képest mozgó megfigyelő úgy, hogy k pályája (mozgásútvonala) az m világképében az x tengely (azaz, $\mathsf{wline}_m k$ a tx síkban van). Tegyük fel, hogy a k világképében is az m pályája az x tengely. Mi lesz akkor a k megfigyelő Minkowski köre?

Gyakorlat 2.10. Bizonyítsuk a következőket:

(i) $\mathsf{SpecRel} \models \forall m, k \in \mathsf{IOb}\ \ |v_m(k)| = |v_k(m)|$.

(ii) $\mathsf{SpecRel} \not\models \forall m, k \in \mathsf{IOb}\ \ v_m(k) = v_k(m)$.

(iii) $\mathsf{SpecRel}_0 + c = 1 + \text{KísérletAx} \not\models \forall m, k \in \mathsf{IOb}\ \ |v_m(k)| = |v_k(m)|$.

Gyakorlat 2.11. Fogalmazzuk meg formálisan, hogy egymás óralassulásának mértékét bármely két megfigyelő ugyanannyinak látja. Jelöljük ezt az állítást AxSymt-vel. Bizonyítsuk, hogy
$\mathsf{SpecRel}_0 \models \mathsf{AxSymd} \leftrightarrow \mathsf{AxSymt}$.

Gyakorlat 2.12. Írjuk fel a Newtoni Kinematikát $\mathsf{SpecRel}$-hez hasonló szellemben! Mik ebben az elméletben a jegyzet 51-ik oldalán definiált Minkowski körök?