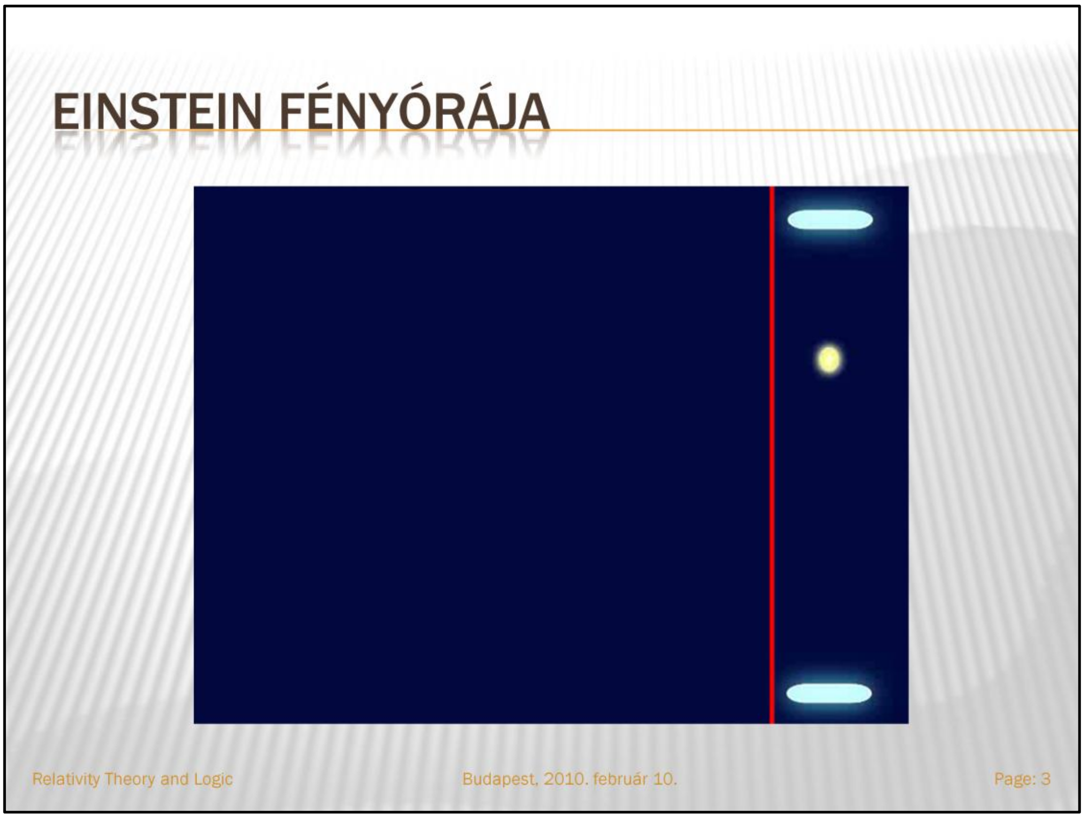
A jelen prezentáció tartalma és formája több ember munkája, itt vannak. A prezentáció anyaga fent lesz jegyzet formájában az Interneten (Németi István honlapján), a jelen óra anyaga felkerül a hétvégén. Lesznek gyakorlatok is a jegyzetben. A gyakorlatok megoldasai felkerülnek az Internetre 1-2 hét késéssel hogy legyen idő gondolkodni rajtuk. Amig nincs fent a megoldas, be lehet adni a megoldasokat, és az évvégi jegy megadásánál beszámitásra kerülnek.

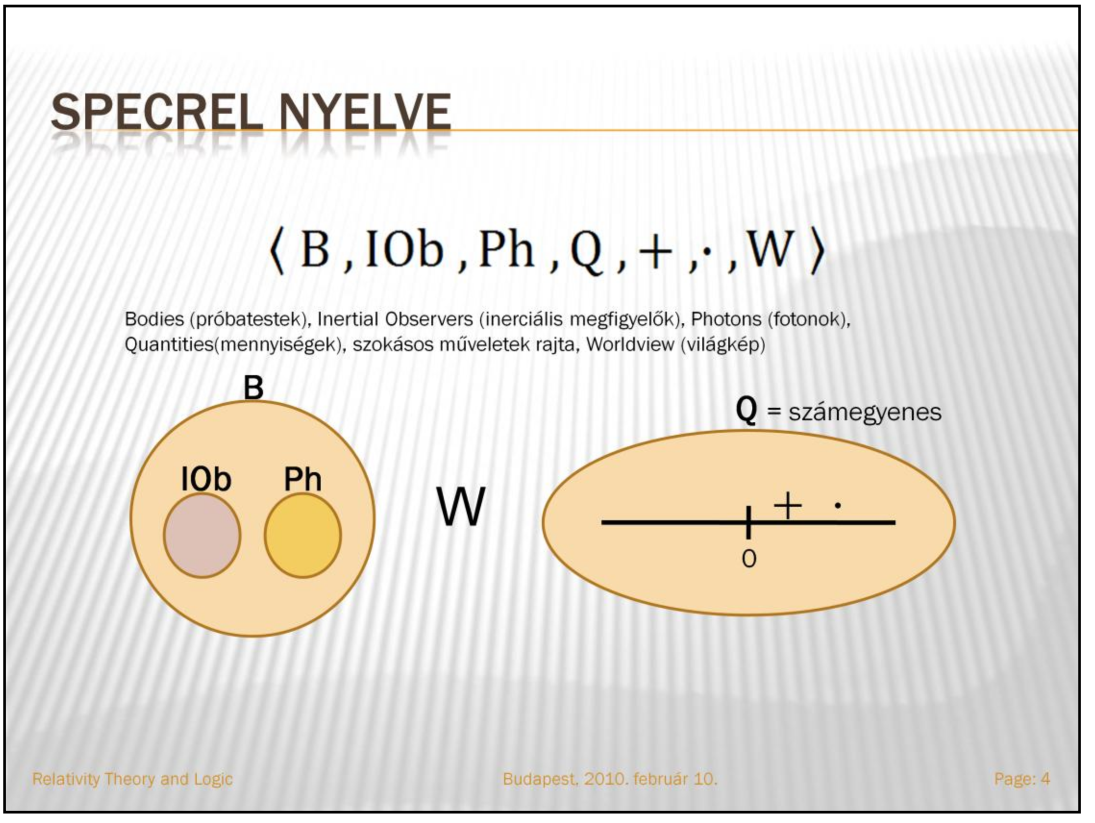
Az általános relativitáselmélet és a fekete lyukak elmélete nagyon izgalmas úttörő fejezetei a mai tudománynak.

GR and BH theory are extremely exciting, new frontier areas of science. It is an inviting application area for logic and logicians. We claim that logic can be fruitfully applied in this field.

A bevezetés után a speciális relativitáselmélettel kezdjük.
After the Intro, we begin with special relativity theory.



Ez Einstein fényórája. Erről több szó lesz majd egy következő előadásban.



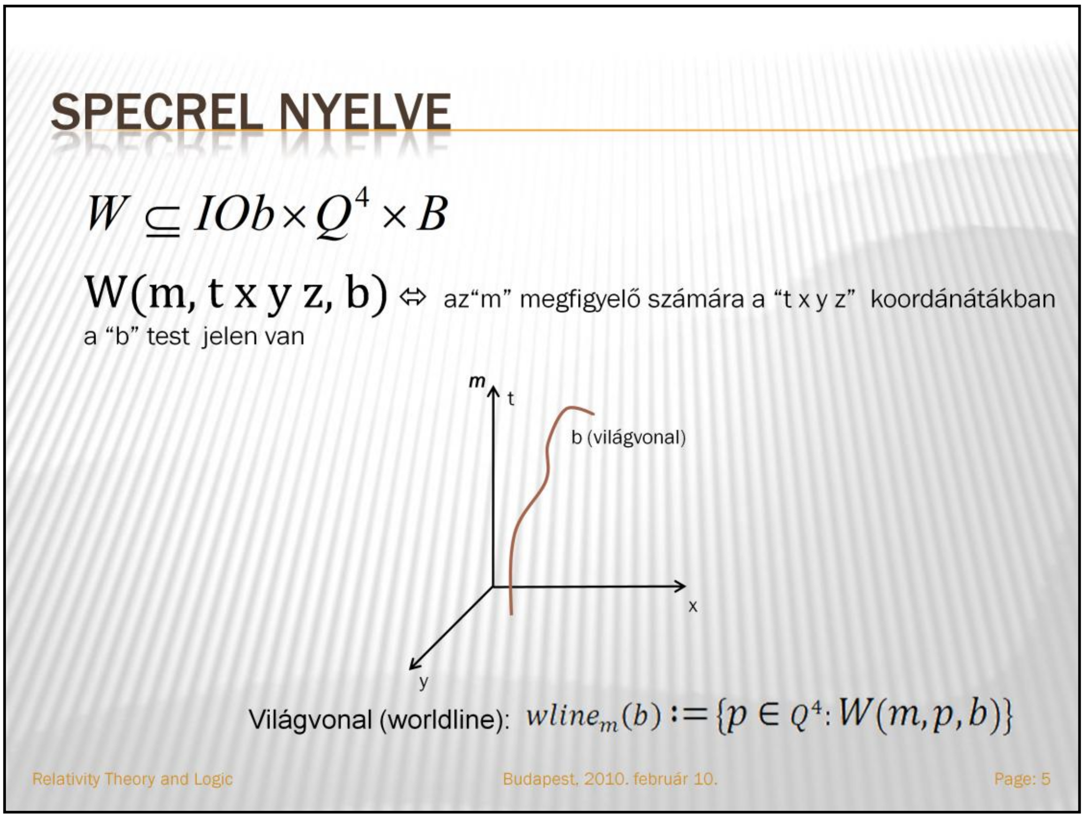
Mik lesznek az alapfogalmaink (amiket nem analizálunk, nem bontunk több kicsi részre ebben a nyelvben)?

Mozgásról akarunk beszélni. A mozgás időbeli helyváltoztatás. Az időt és helyet koordinátákkal jelöljük meg. A mozgást különböző „megfigyelők nézik”, a „megfigyelő” színes szó arra, hogy koordinátarendszer és „nézi”, „látja”, „megfigyeli” színes szavak arra, hogy a koordinátarendszerben igy van. Azokat a dolgokat, amiknek mozgását figyeljük, színes szóval „testeknek” vagy „bodiknak” hivjuk (B). Ezek bármik lehetnek, amik mozoghatnak (amiket jegyzünk a koordinátarendszerben), pl koordinátarendszerek (űrhajók), elképzelt eldobott absztrakt kövek (próbatestek), súlypont, fényjelek, elektromágneses hullámok (fotonok), stb. Kitűntetett testek a koordinátarendszerek (IOb, inerciális megfigyelők), és fotonok (Ph). A világképreláció (W) mondja meg, hogy egy megfigyelő mely bodikat mely koordinátapontokon „lát”. A másik fajta dolog, amiről beszélünk, azok a mennyiségek, amivel koordinátázunk és a rajtuk levő műveletek (Q,+,·). Ez fizikában legtöbbször a valós számok és a rajta értelmezett műveletek az összeadás, szorzás.

Ezek (B, IOb, Ph, W, Q,+,·) az alapfogalmaink ebben a nyelvben. Ezeknek az alapfogalmaknak „jelentést” majd az axiómák adnak (ugyanúgy mint pl ahogyan a geometriában a pontoknak és egyeneseknek a jelentését az axiómák adják meg, amiket róluk kikötünk). Arról ebben az elméletben nem beszélünk, hogy a koordinátarendszerek, mennyiségek stb hogyan keletkeznek, ezek alapfogalmak a most bevezetendő konkrét SpecRel elméletben. Később, más elméletekben majd beszélünk arról is, hogy hogyan keletkezik egy koordinátarendszer, honnan jönnek a mennyiségek.

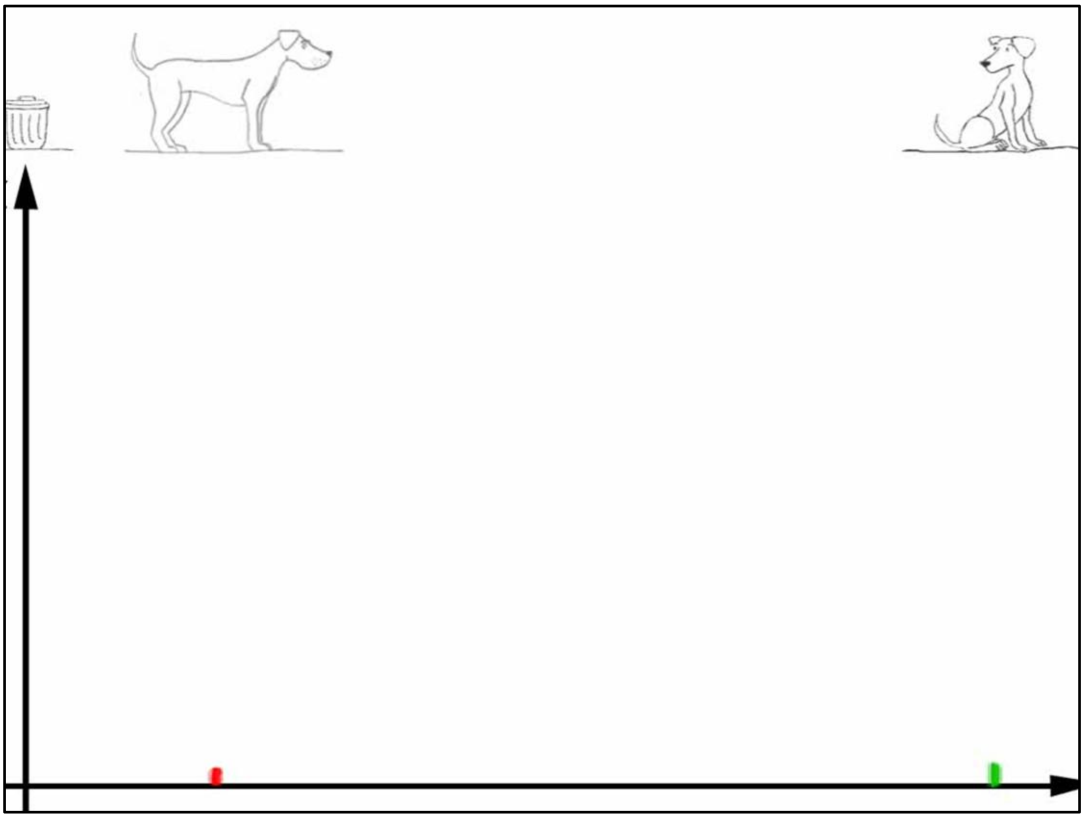
Ezekkel az alapfogalmakkal felirt elsőrendű formulákat fogunk használni. Azaz: Az alapfogalmakkal mondjuk ki a tőmondatokat, és ezeket az *és*, *nem*, *következik*, *vagy* mondattani kapcsolókkal kötjük össze összetett mondatokká. A *létezik* és *minden* kvantorokkal új mondatokat csinálunk régiekből. A nyelv definiciójáról bővebb anyag van a honlapon.

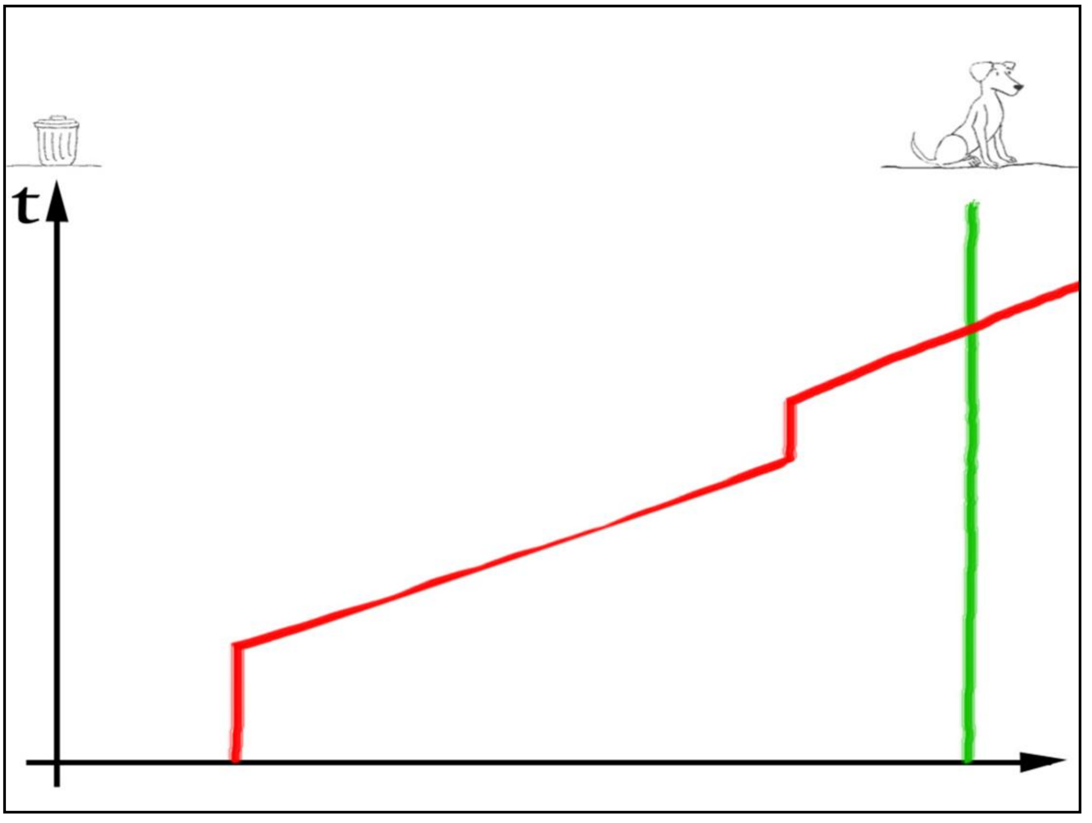
We represent motion by changing place in time, we represent place and time by coordinates. Observer is picturesc word for coordinate system.



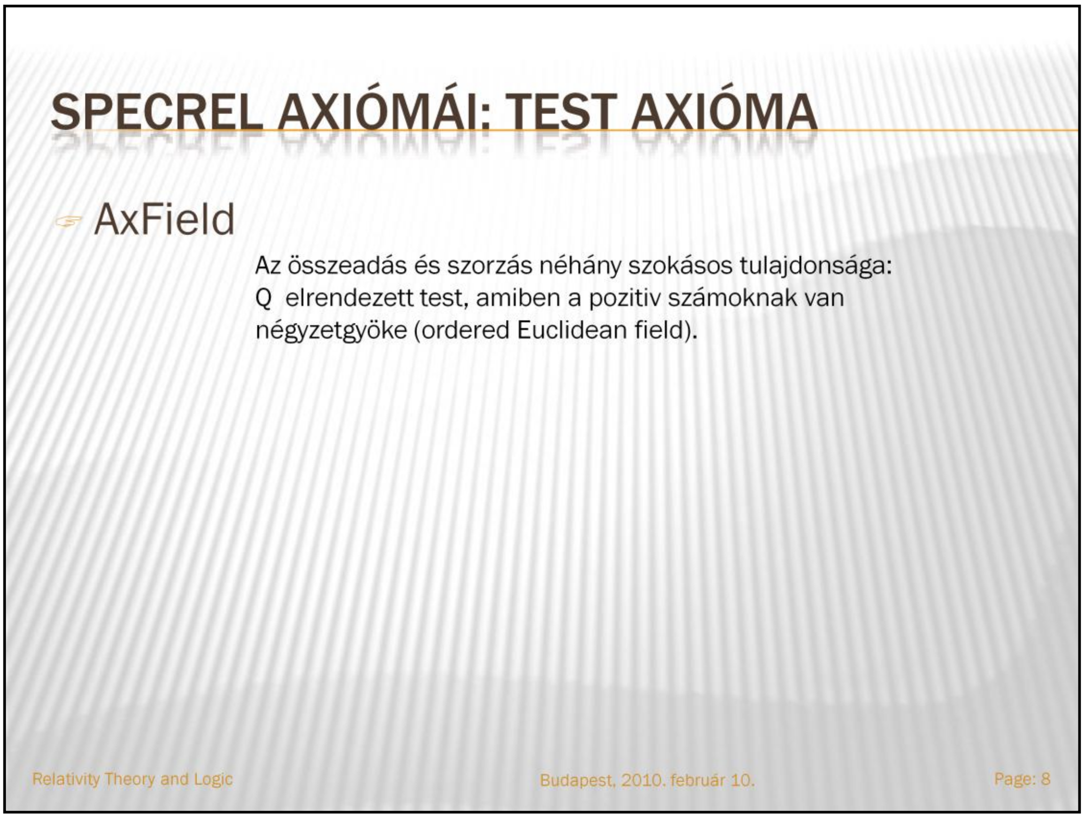
Mozgás reprezentálása koordinátarendszerben. Q^4 a Q elemeiből álló négyesek halmazát jelöli, ezeket koordinátapontoknak hivjuk és általában p-vel vagy q-val jelöljük. $p=(p_1,\ldots,p_4)$.
Hogyan reprezentálunk mozgást? A mozgó testet berajzoljuk a (t,x,y,z) koordinátájú pontba, ha a koordinátarendszer szerinti t időpontban a b test a koordinátarendszer szerinti (x,y,z) helyen volt. Ha ezt minden t időpontra berajzoljuk, akkor kapjuk a b test életútját vagy világvonalát (komolykásabb szóval). Az **életút** előnye, hogy a mozgást geometriailag ábrázoltuk (annak árán, hogy egy extra dimenziót, az időt, fel kellett venni a rajzba). A megfigyelő **világkép**e a koordinátarendszerbe berajzolt összes életútat jelenti.

Axiom 0: Every observer coordinates his world by 4 coordinates, 1 time coord. and 3 space coords. This axiom is built into the language. Worldview: this is how we illustrate the worldview relation W. Worldline: body b is present for observer m at these coordinates.





Mozgás reprezentálása koordinátarendszerben.
Gyakorlott nyomolvasó az életútból könnyen rekonstruálja a mozgást, például a piros vonal hogy milyen mozgás volt.
Jőjjenek hát az axiómák. Érdemes lesz odafigyelni az axiómákra és egy kicsit körüljárni őket, mert ezekkel fogunk együttélni 3 hónapig.



Azt mondtuk, hogy egy axióma van, a Fény Axióma. Mivel a sebesség miatt távolságokról is kell beszélnünk benne, ezért célszerű először mégis a mennyiségek jelentését megadni az axiómáikkal.

Ordered Euclidean field means that positive members have square roots. They are called Euclidean fields because of their role in Tarski's FOL axiomatization of Euclidean geometry.
This is a „mathematical” axiom, physicists use it tacitly.

A TESTAXIÓMA RÉSZLETESEBBEN

1. A (Q , + , ·) **test** absztrakt algebrai értelemben
   0 , −, 1 , / levezetett műveletekkel, azaz
   - 1a. (Q, +,−, 0) kommutativ csoport, azaz
     - x+(y+z) = (x+y)+z, a + asszociativ
     - x+0 = 0, a + nullelemes
     - x+ −x = 0, a + invertálható
     - x+y = y+x, a + kommutativ.
   - 1b. (Q^+ , · , / , 1) is kommutativ csoport, ahol Q^+ a Q-nak a 0-tól különböző elemeinek halmaza,
   - 1c. x · (y+z) = (x · y) + (x · z) , a szorzás additiv.
2. $\exists y(x = y^2 \ or \ -x = y^2)$, x-nek vagy −x-nek **van négyzetgyöke**
3. A $x \leq y \overset{d}{\Leftrightarrow} \exists z(y - x = z^2)$ képlettel definiált reláció **lineáris rendezés**, azaz tranzitiv és két különböző mennyiség pontosan egyféleképpen hasonlitható össze (egyik kisebb mint a másik).

Gyakorlat 1.1 Mutassuk meg, hogy a 3. ekvivalens (az 1,2 mellett) a következő egyszerűbb állitással :

Ha három négyzetszám összege nulla, akkor ezen négyzetszámok mindegyike nulla, azaz

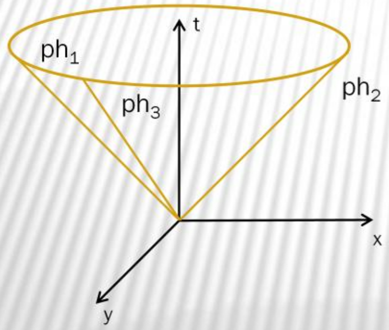
$x^2+y^2+z^2=0$ implies x=0.

Gyakorlat 1.8 Mutassuk meg, hogy AxField-ből következik, hogy Q végtelen. Mutassuk meg, hogy a racionális számoknak az összeadás és szorzással vett teste részalgebrája a mennyiségek (Q,+,·) testének.

SPECREL AXIÓMÁI: A FÉNYAXIÓMA

- AxPh

Minden inerciális megfigyelő világképében a fény sebessége mindenütt és minden irányban ugyanannyi és véges. Továbbá, mindenütt minden irányba ki lehet küldeni egy fotont.



Formálisan:

$$(\forall m \in IOb)(\exists c \in Q)(\forall p, q \in Q^4)$$

$$\left[\begin{array}{c} |p_s - q_s| = c \cdot |p_t - q_t| \\ \leftrightarrow \\ (\exists ph \in Ph)\ p, q \in wline_m(ph) \end{array}\right]$$

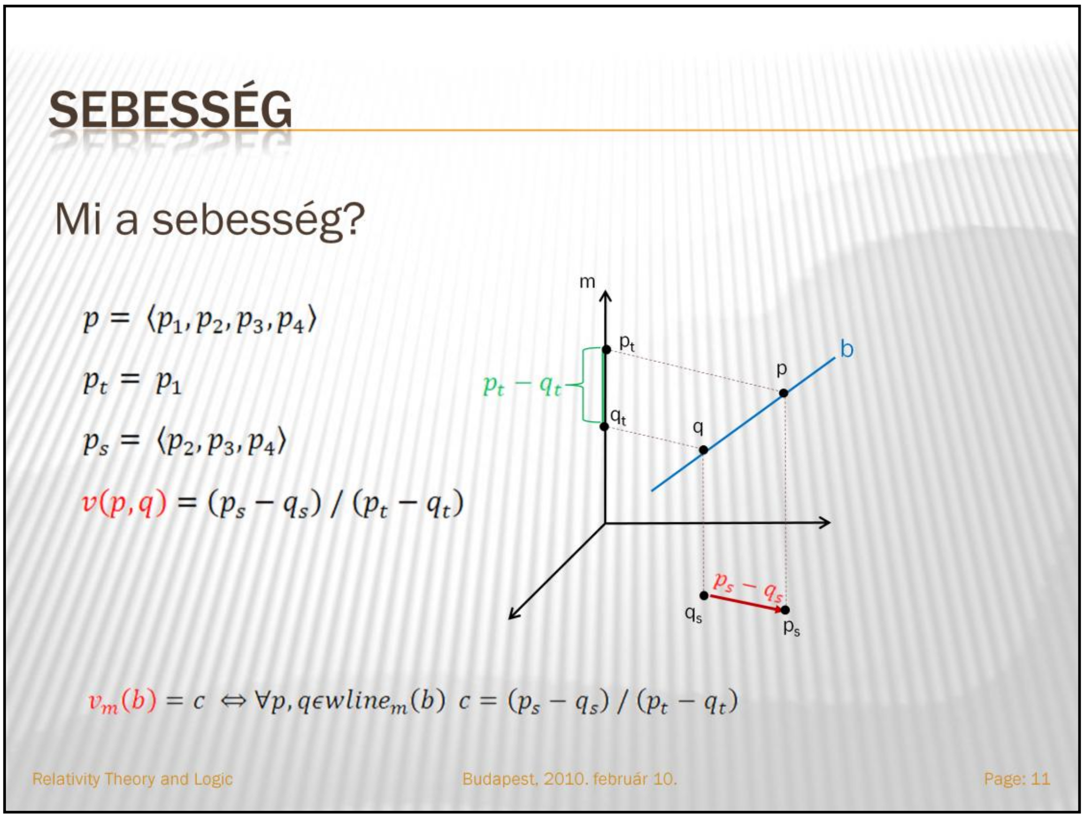
ahol $p_s = \langle p_2, p_3, p_4 \rangle$ és $p_t = p_1$.

$$|\langle r_1, r_2, \dots, r_n \rangle| = \sqrt{{r_1}^2 + {r_2}^2 + \dots + {r_n}^2}$$

Gyakorlat 1.2: Hol irtuk az AxPh formulájában, hogy a fénysebesség véges?
Gyakorlat 1.3: Fogalmazzuk meg, hogy a foton életútja egy egyenes részhalmaza (irjuk fel az egyenes képletét) és bizonyitsuk AxField,AxPh-ból, hogy ez igaz.

A p pontból kiinduló *fénykúp* azon fotonéletutaknak az úniója, melyeknek eleme a p pont. Fénykúp, nyomolvasás, fénygömb.

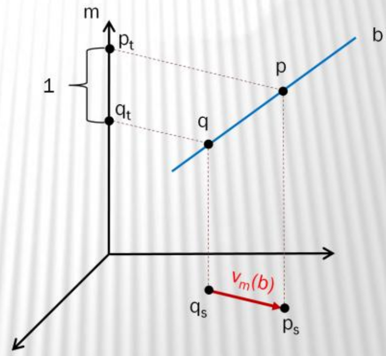
This axiom is the outcome of the Michelson&Morley experiment. Besides M&M this is being tested since then, nowadays it is tested by GPS technology. Key axiom, with a physical meaning.



p_t a p időkomponense, p_s a p térkomponense.
v(p,q) a p,q –n átfektetett egyenes meredeksége.
v_m(b) a b sebessége az m világképében, ez akkor létezik ha b világvonala az m világképében egyenes részhalmaza.

SPECREL AXIÓMÁI

Mi a sebesség?



$$p = \langle p_1, p_2, p_3, p_4 \rangle$$

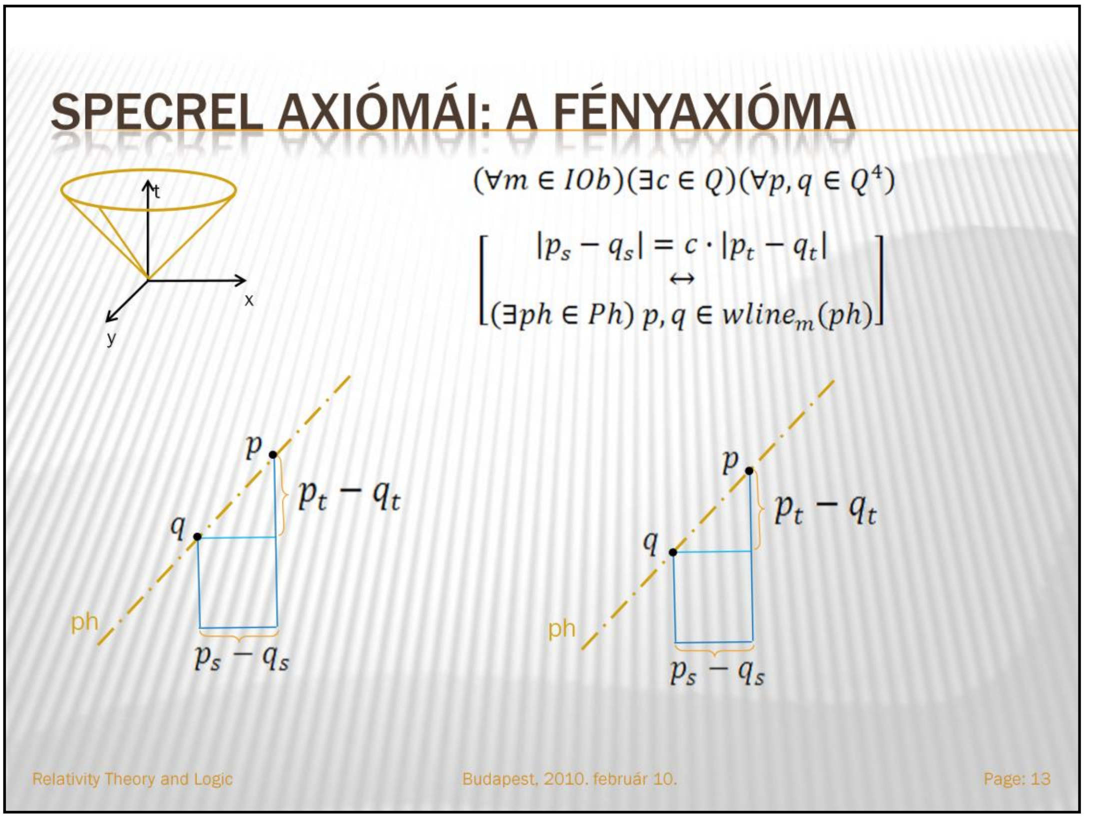
$$p_t = p_1$$

$$p_s = \langle p_2, p_3, p_4 \rangle$$

Relativity Theory and Logic Budapest, 2010. február 10. Page: 12

Ha b életútja egyenes, akkor a sebességet igy tudjuk ábrázolni.

$V_m(b)$ = speed of b relative to m. Space-component of p is denoted by p_s, time-component of p is denoted by p_t. This is how we formalize speed by using the field-structure of our theory (if the worldline of b is a subset of a straight line). In the picture you can replace 1 and $v_m(b)$ by t and $t \cdot v_m(b)$.

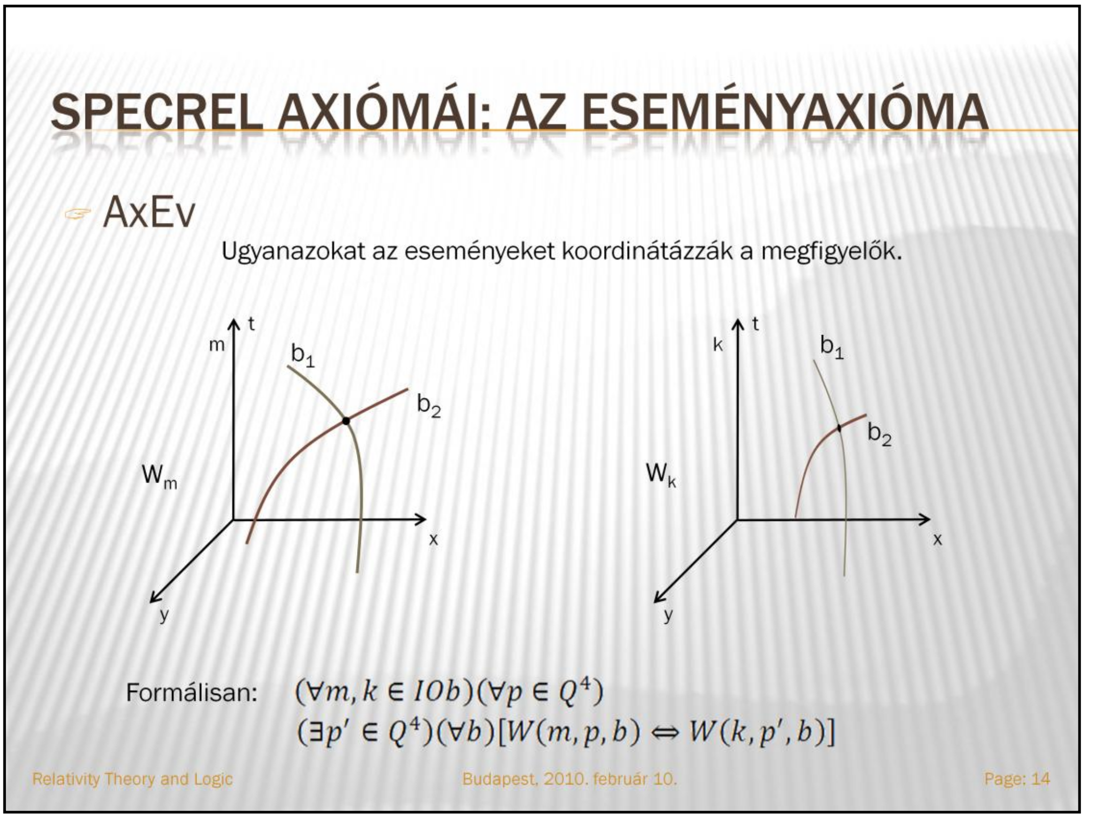


A Fényaxióma formulájának magyarázása: Ide másoltuk az axióma formális kimondását. Az első sor azt mondja, hogy a p,q –t összekötő egyenes meredeksége c, és a második sor azt mondja, hogy összeköti a két pontot egy fotonéletút.

A formula egyrészt azt mondja, hogyha a p-t és q –t összekötő egyenes meredeksége a fénysebesség, akkor van fotonéletút, ami p –t és q –t összeköti. Ez annak formalizáltja, hogy minden irányban ki lehet lőni egy fotont. A formula másrészt azt mondja, hogyha veszünk tetszőleges két p,q pontot egy fotonéletútról, akkor az őket összekötő egyenes meredeksége a fénysebesség. Ez annak a formalizáltja, hogy a fény sebessége mindenütt és minden irányban ugyanaz.

Az axióma megengedi (de nem kényszeriti persze), hogy minden megfigyelő világképében más legyen a fénysebesség.

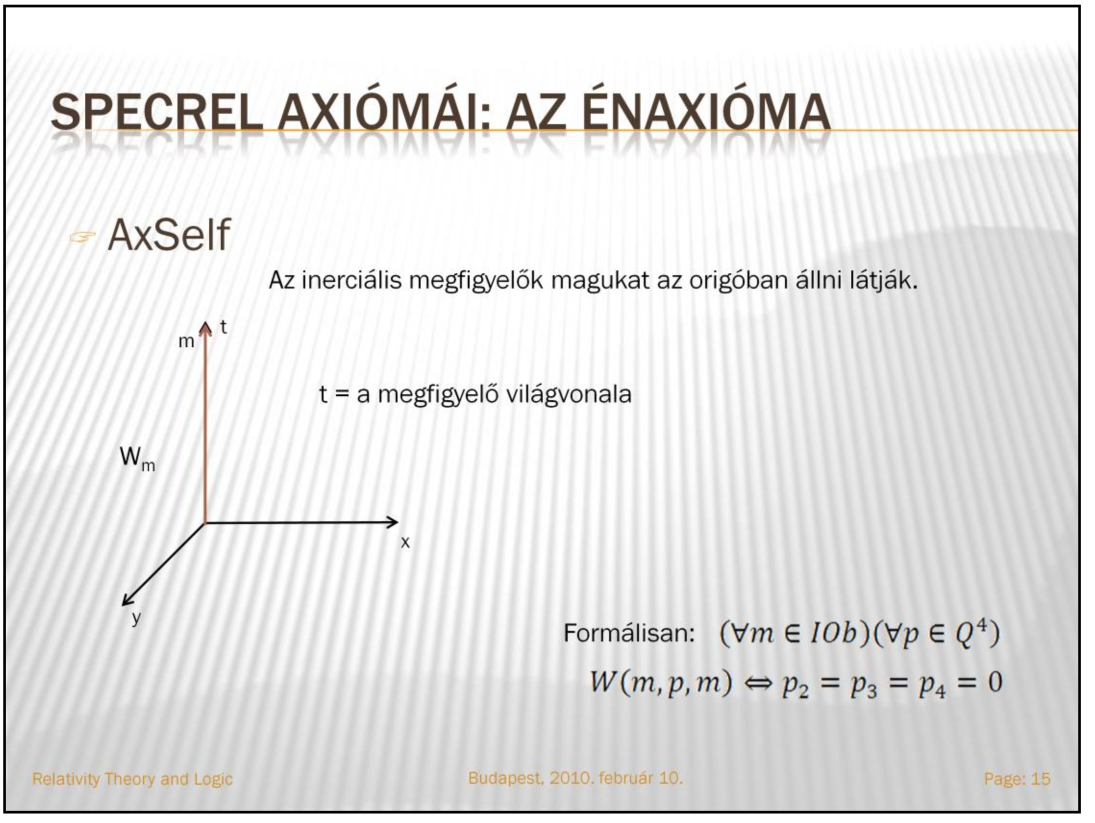
This axiom is the outcome of the Michelson&Morley experiment. Besides M&M this is being tested since then, nowadays it is tested by GPS technology. Key axiom, with a physical meaning.



Az axióma azt mondja, hogy van egy objektiv külvilág, amit a megfigyelők néznek. Eseménynek két vagy több bodi találkozását nevezzük. Ez az axióma két megfigyelő világképének kapcsolatáról szól.

Bármely két m,k megfigyelőre és p koordinátapontra igaz, hogy van egy p” pont, hogy az m megfigyelő ugyanazokat a bodikat látja a p-ben, mint a k megfigyelő a p” -ben. Tehát, az m ugyanazt az eseményt látja a p pontban, amit a k lát a p” pontban. Tehát ha m lát egy eseményt valahol (pl a p pontban), akkor a tetszőleges másik k megfigyelő is látja azt az eseményt (valahol, pl a p” pontban).

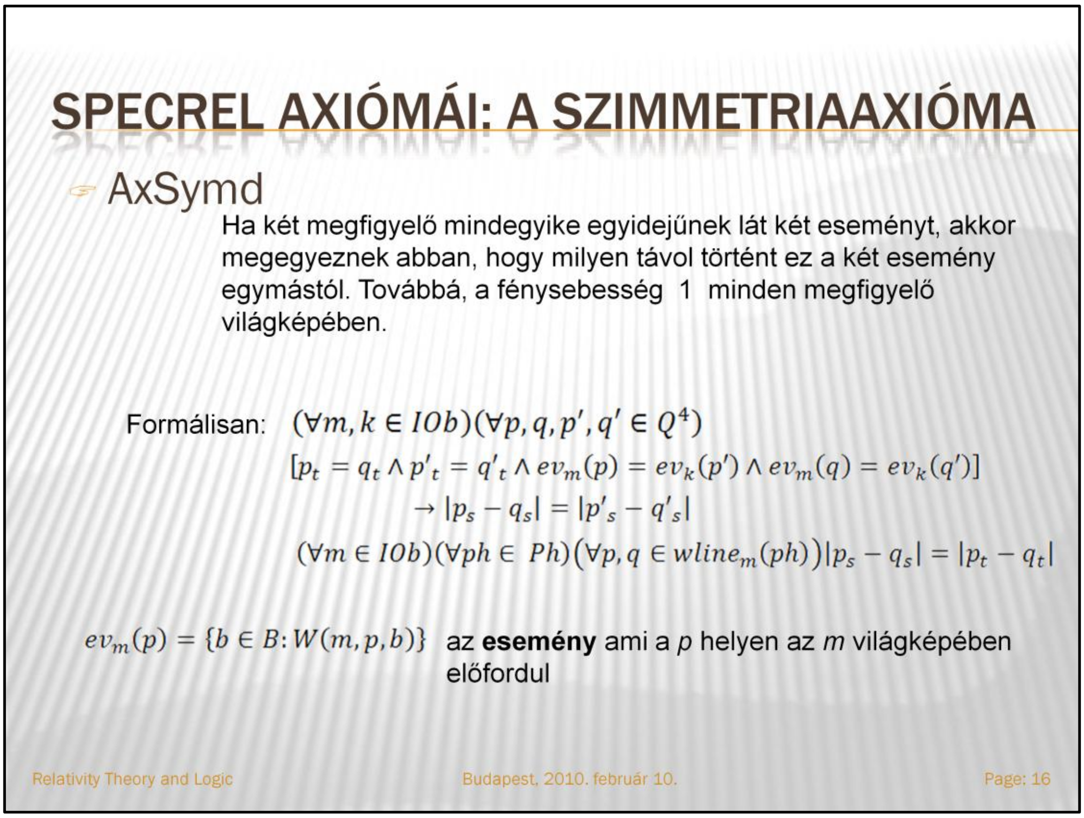
These bodies are possible bodies (=test particles). The same events exist for all observers. „sees” = coordinatizes. This means that there is an outside reality (or, all observers talk about the same outside reality).



Az Énaxióma azt mondja, hogy a koordinátarendszert olyan bodival személyesitjük meg, aki az origóban csücsül. Elhagyható ha a koordinátarendszerek (azaz megfigyelők) külön fajta létezők lennének (új szort a nyelven). Ez adminisztrativ axióma.

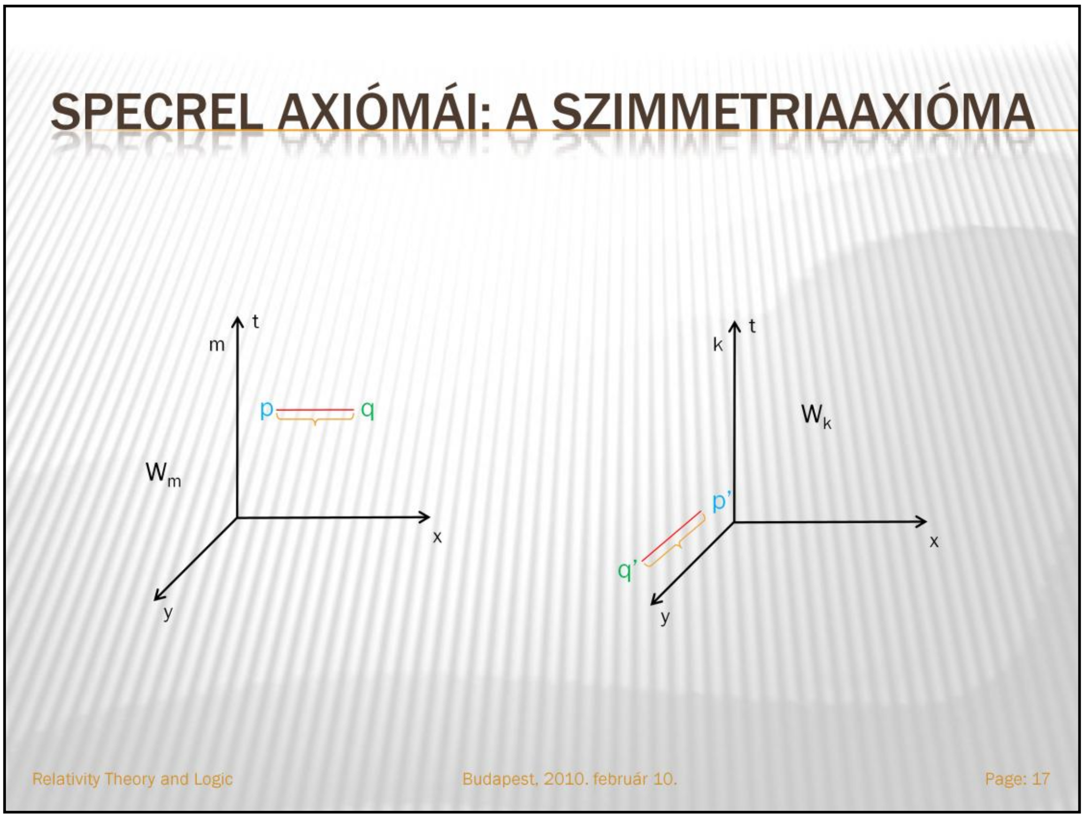
Gyakorlat 1.4: Bizonyitsuk AxField, AxPh és AxSelf-ből, hogy a megfigyelők nem fotonok ha a fénysebesség nem nulla. (Minden x-re IOb(x) –ből következik, hogy nem Ph(x).)

The last two axioms, AxSelf and AxSymd, are „book-keeping”, simplifying axioms. We could leave them out and nothing would be lost, only the formalizations of the theorems would become more complicated.

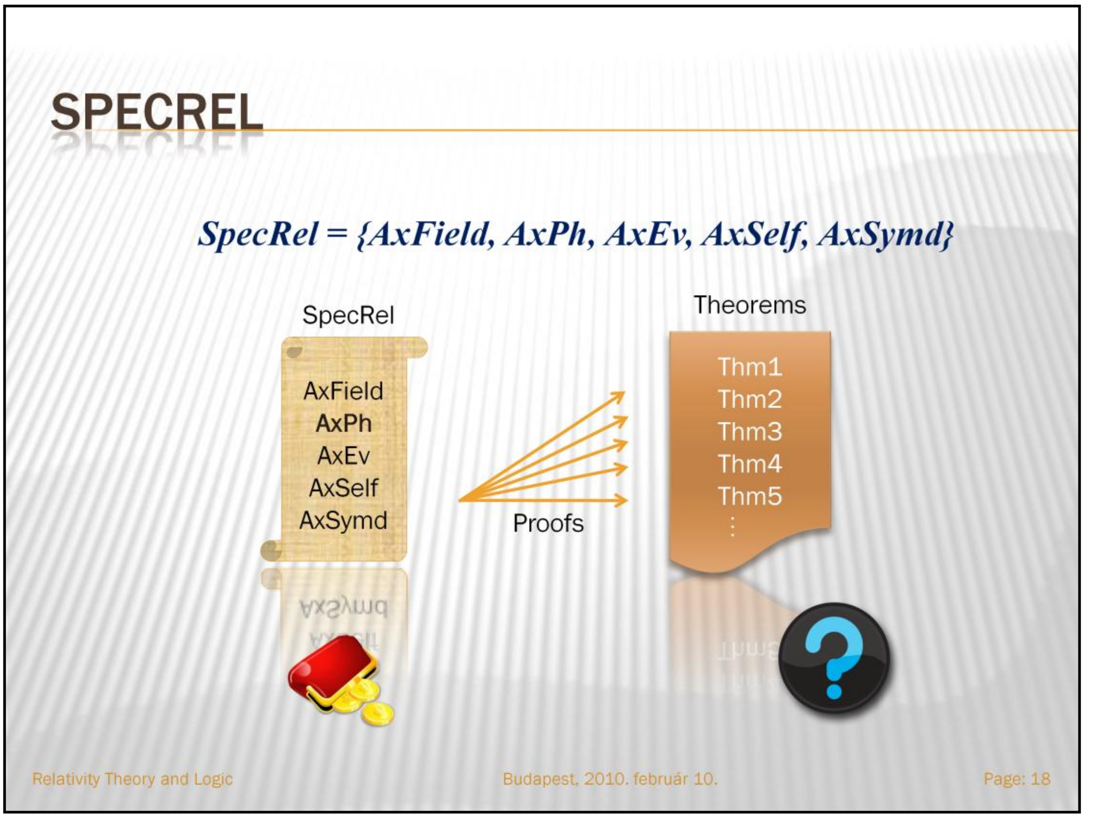


Ez az axióma azt mondja, hogy a különböző megfigyelők ugyanazokat a mértékegységeket használják. Arra való, hogy ne kelljen mértékegységeket konvertalni állandóan. A mozgás elmélete nem erről a konvertálásról szól.

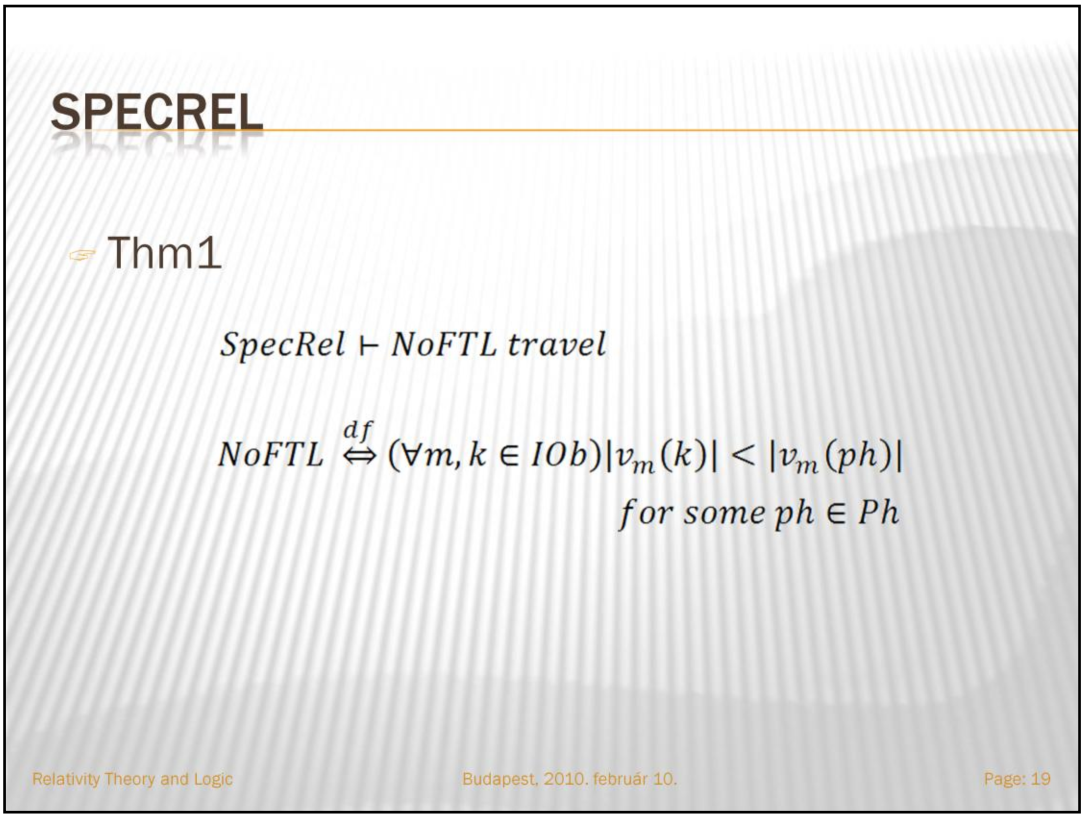
Symmetry axiom: all observers use the same units of measurements. This is a simplifying axiom. SpecRel without symmetry axiom ($SpecRel_0$) already proves all the important predictions of usual special relativity with the only exception that in $SpecRel_0$ different observers might use different units of measurements. The assumption that all observers use the same units of measurements is clearly of a book-keeping nature only and therefore it is expendable. So we could, in principle, regard $SpecRel_0$ as the full theory of SR. However, this would lead to complicated formulation of the important theorems and the complications would go in a completely irrelevant direction. Therefore we add to $SpecRel_0$ the so-called symmetry axiom, a simplifying principle. It is important to note that the symmetry axiom has no deep physical content, it is only conventional, by assuming it we do not use any relevant information.



A szimmetria axióma ábrázolása.

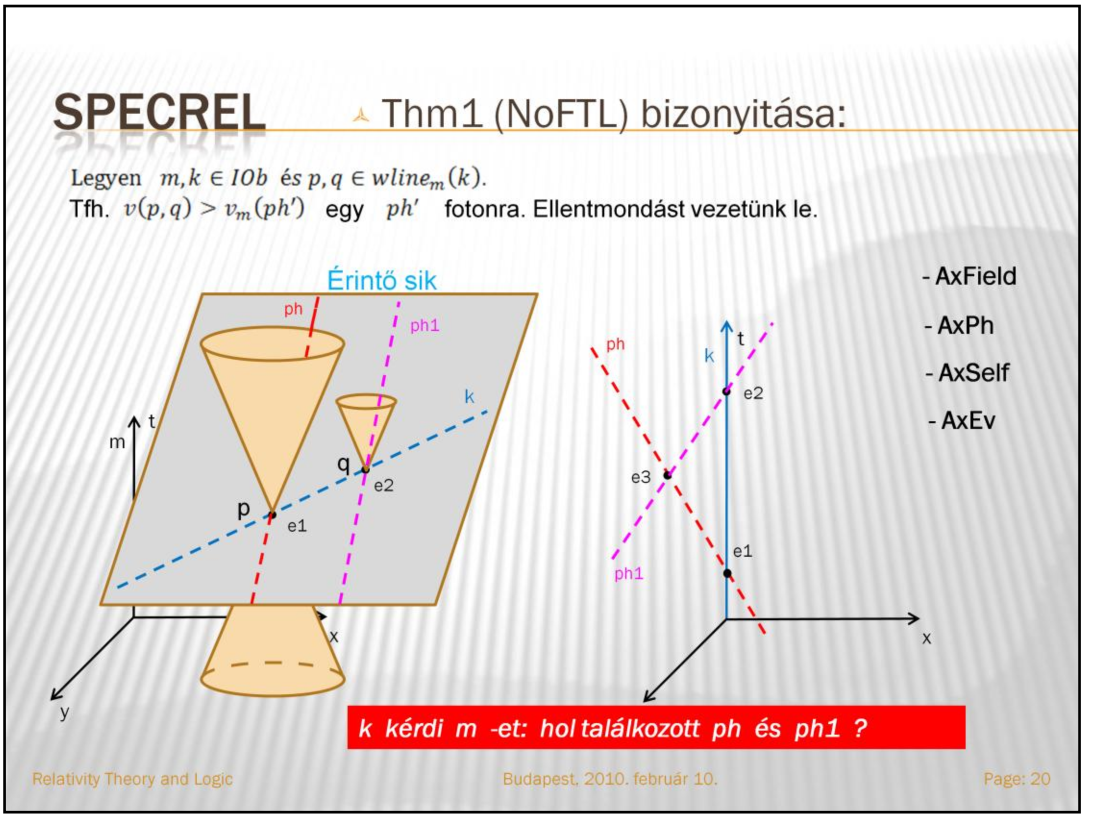


5 axioms, AxPh is the most important one of them.
We have paid, what do we get for our price?



Thm1 bizonyitásáról: Később majd bizonyitani fogjuk, hogy minden megfigyelő életútja egyenes, tehát a $v_m(k)$ létezik. Most azt bizonyitjuk, hogy k életútján akármely p,q pontra igaz, hogy meredekségük kisebb mint 1 (azaz v(p,q)<1).

This will be our generic example for "fancy theorem" from "plain axioms". Analog case will be $E=mc^2$ in place of NoFTL. NoFTL is removed from the cost-side and is put on the gain-side. Bonus: we can tackle "why type" questions, i.e., which axioms to weaken or leave out to get "FTL".



Bizonyitásvázlat: Tegyük fel, hogy m világképében k fénynél gyorsabban mozog. Legyen p,q két különböző pont a k életútján (m világképében). Az, hogy k fénynél gyorsabban mozog, azt jelenti, hogy k életútja a p-ből induló *fénykúp*on (= a p-n áthaladó összes foton életútjának úniója) kívül halad. A fénykúp szabályos kúp **AxPh** miatt. Emiatt van egy sik, ami tartalmazza p,q –t és érinti a kúpot (**AxField** miatt, mert AxField biztositja, hogy másodfokú egyenleteket pontosan úgy oldjunk meg mint a valós számok körében). Legyen ph egy foton, aminek életútja a kúp és ezen sik metszete. Van ilyen **AxPh** miatt. (Pontosabban, AxPh jelen alakja csak azt mondja, hogy ez az egyenes fotonéletutak uniója, és nem feltétlenül egy darab foton életútja. De ez könnyen megkerülhető a bizonyitás kis elbonyolitásával. Ld. Gyakorlatok.) Költözzünk most át k világképébe. **AxSelf** és **AxEv** miatt, a p-ben és q-ban m világképében előforduló események k világképében az időtengelyen fordulnak elő. Megint **AxField** miatt, van egy ugyanolyan meredekségű egyenes mint ph k világképbeli életútja, ami el is metszi ph életútját. Legyen ez egy ph1 foton életútja (**AxPh)**. Tehát ph és ph1 találkoznak k világképében. Menjünk vissza most m világképébe. Nézzük ph1 életútját az m világképében. Ha ez nincs benne az érintő sikban, akkor nem metszi a ph életútját, mert az benne van. Ha meg az érintő sikban van, akkor meg azért nem metszi, mert abban minden fotonéletút párhuzamos egymással és a p és q pontok különbözőek. Tehát ph és ph1 nem találkoznak m világképében, és ez az AxEv nem teljesülését jelenti.

Mivel axiomatikus közelitésben dolgozunk, lehet vizsgálni, hogy mely axiómákat kell elhagyni vagy gyengiteni, hogy a NoFTL már ne következzen. Mivel elsőrendű logikában dolgozunk, lehet olyan állitásokat is *bizonyitani*, hogy egy állitás nem következik.

Why type questions. E.g., preparing the road to future theories like Quantum Gravity.

Why type questions. Például, ha csak egy egyenesen való mozgásokat figyelünk (azaz a téridőnk 2 dimenziós), akkor lehet fénynél gyorsabban mozogni megfigyelőnek is. Általában: ha az idődimenziók száma (vajon hogyan lehet ez 1-nél több) megegyezik a térdimenziók számával, akkor lehet fénynél gyorsabban utazni megfigyelőnek. A fénynél gyorsabb mozgás összefügg az időutazással.

This is the first and most important paradigmatic effect.

The picture shows a spaceship as seen by an observer moving relative to the ship. Captain claims that the two clocks show the same time.

The paradigmatic effects of SR are about comparing the worldviews of inertial observers moving relative to each other. Next slide shows formal statement of the theorem.

This effect has deep philosophical consequences. E.g., there is no such thing as absolute present (only present relative to an observer). Most of the fancy, exciting things in Relativity and Cosmology are based on this Thm! Contradicts common sense. Like in models of set theory: external properties and internal properties (e.g., size of a set) may differ.

Paves the road for proving completeness theorem.

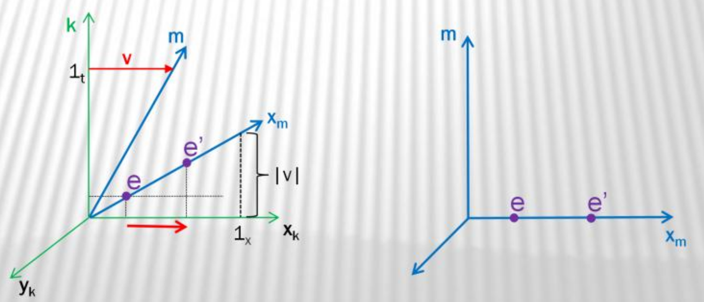
MOZGÓ ÓRÁK ELÁLLITÓDNAK

- Thm2 (óraelállitódás formálisan) Tfh SpecRel.

Legyen *m,k* ϵ *IOb* és *tfh az* e, e' *események egyidejűek m számára*,
$azaz\ loc_m(e)_t = loc_m(e')_t$

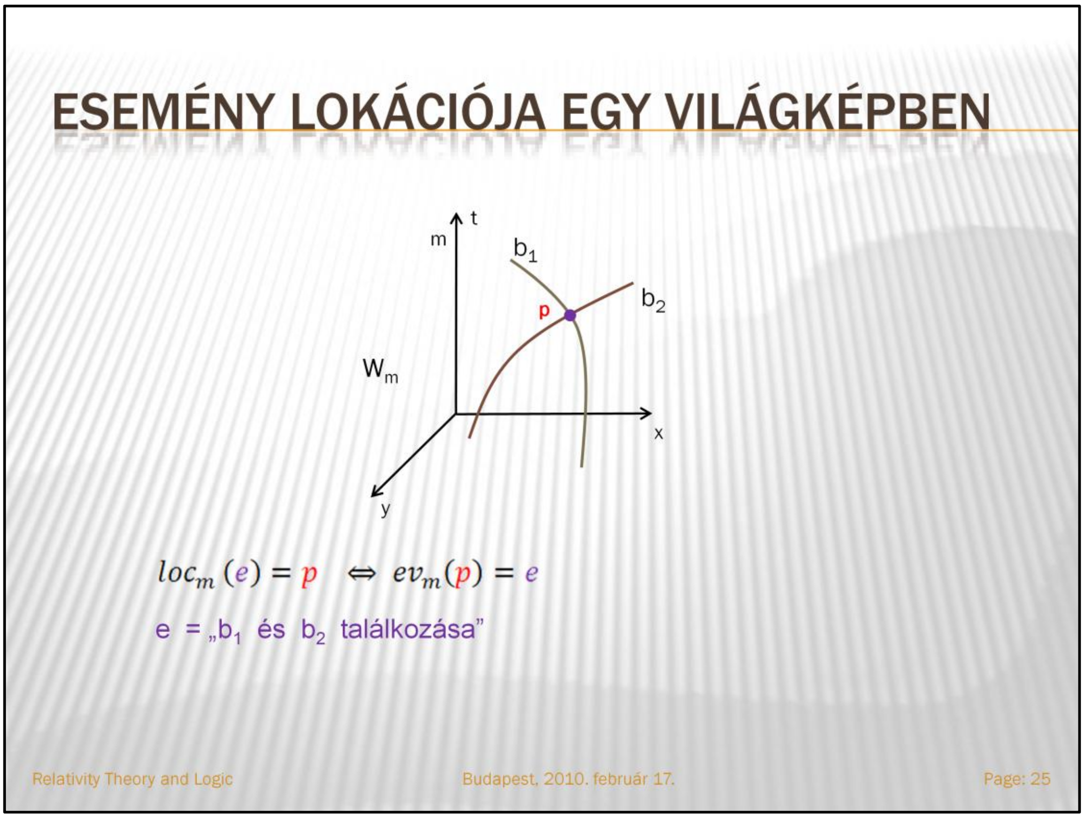
(1) Tfh e, e' *az m mozgásának irányában szeparáltak k világképében*,
$azaz\ \ loc_k(e)_s - loc_k(e')_s \parallel v_k(m)$

$Akkor\ \ |loc_k(e)_t - loc_k(e')_t| = |loc_k(e)_s - loc_k(e')_s| \cdot |v_k(m)|$



This is the formal statement of the (first part of the) effect. Only the formal statement has to be taken dead seriously (we can consult this if there is any confusion or misunderstanding).

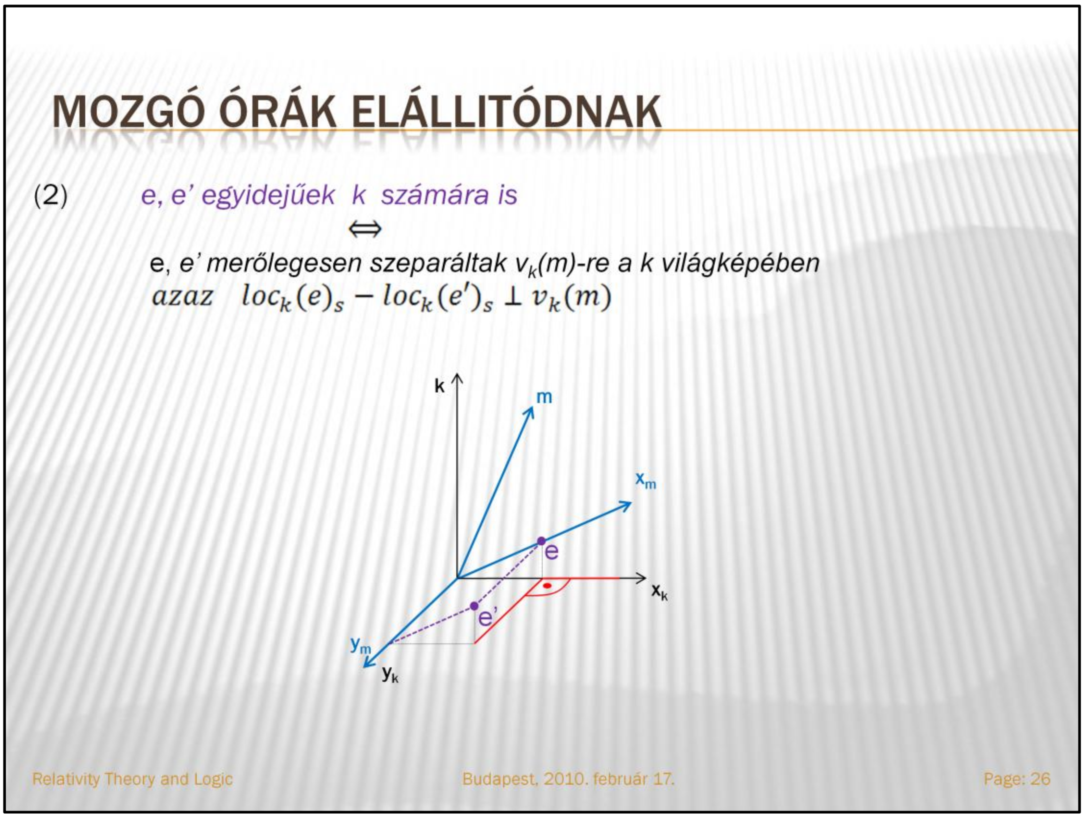
Events in the direction of motion do get out of synchronism.



$Loc_m(e)$ az a koordinátapont, ahol m látja e-t megtörténni. Ez az event-függvény inverze.

Gyakorlat 1.7: Bizonyitsuk SpecRel-ből, hogy minden megfigyelő minden eseményt legfeljebb egyszer lát.

Időkoordinátája . Felcsapódó, bedőlő. Mese: tér és idő felcserélődése n=2 –re. Szerepe feketelyukak eseményhorizontjánál.



This is the formal statement of the second part of the effect. Events separated orthogonally to the motion do not get out of synchronism, moreover only these do not get out of synchronism. Ez fontos lesz majd a szimmetria axióma használatakor.

ÓRAELÁLLITÓDÁS BIZONYITÁSA

A bizonyitásban használni fogunk két segédállitást, amit a következő órán eliminálunk majd a bizonyitásból.

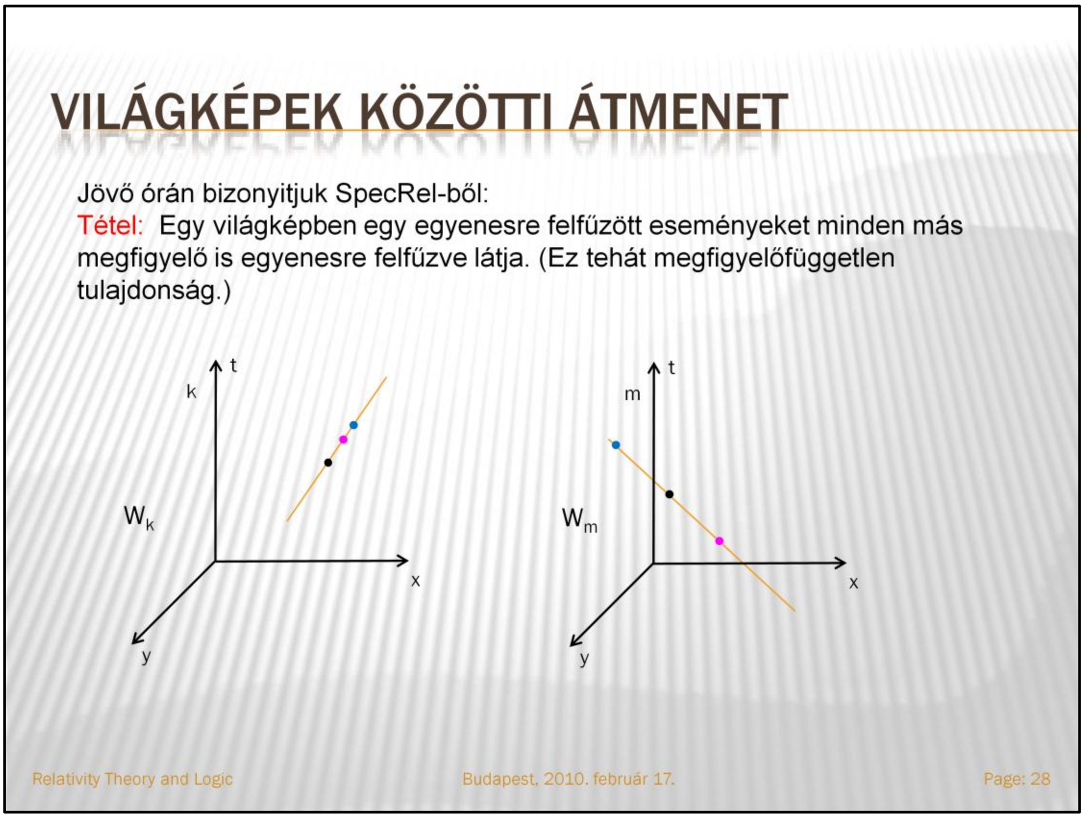
EgyenesAx: Minden megfigyelő életútja egyenes bármely másik megfigyelő világképében.

KisérletAx: Minden 1-nél meredekebb (azaz fénynél lassabb) egyenes életútja valamely megfigyelőnek, minden világképben.

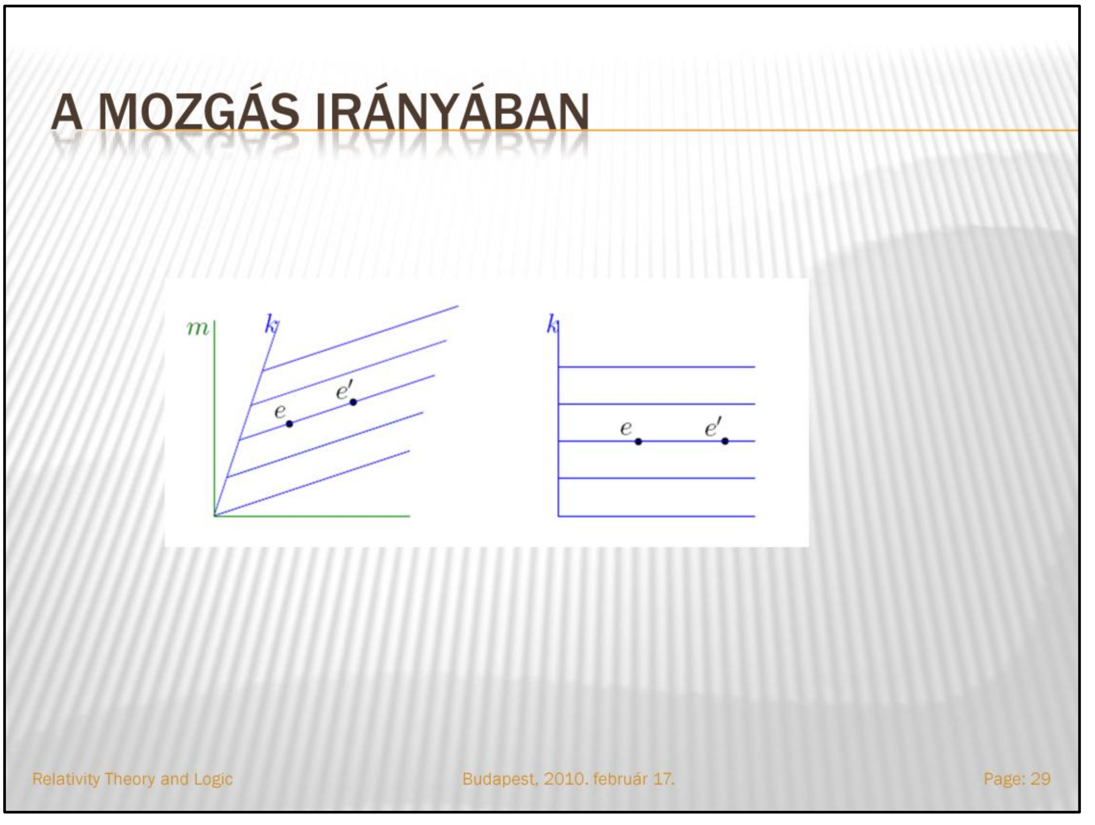
KisérletAx-ból csak azt fogjuk használni, hogy minden pontra le lehet állitani egy megfigyelőt (azaz hogy a nulla sebességű egyenesek megfigyelőéletutak).

Jövő órán bizonyitjuk SpecRel-ből:
Tétel: Egy világképben egy egyenesre felfűzött eseményeket minden megfigyelő egyenesre felfűzve látja. (Ez tehát megfigyelőfüggetlen tulajdonság.)

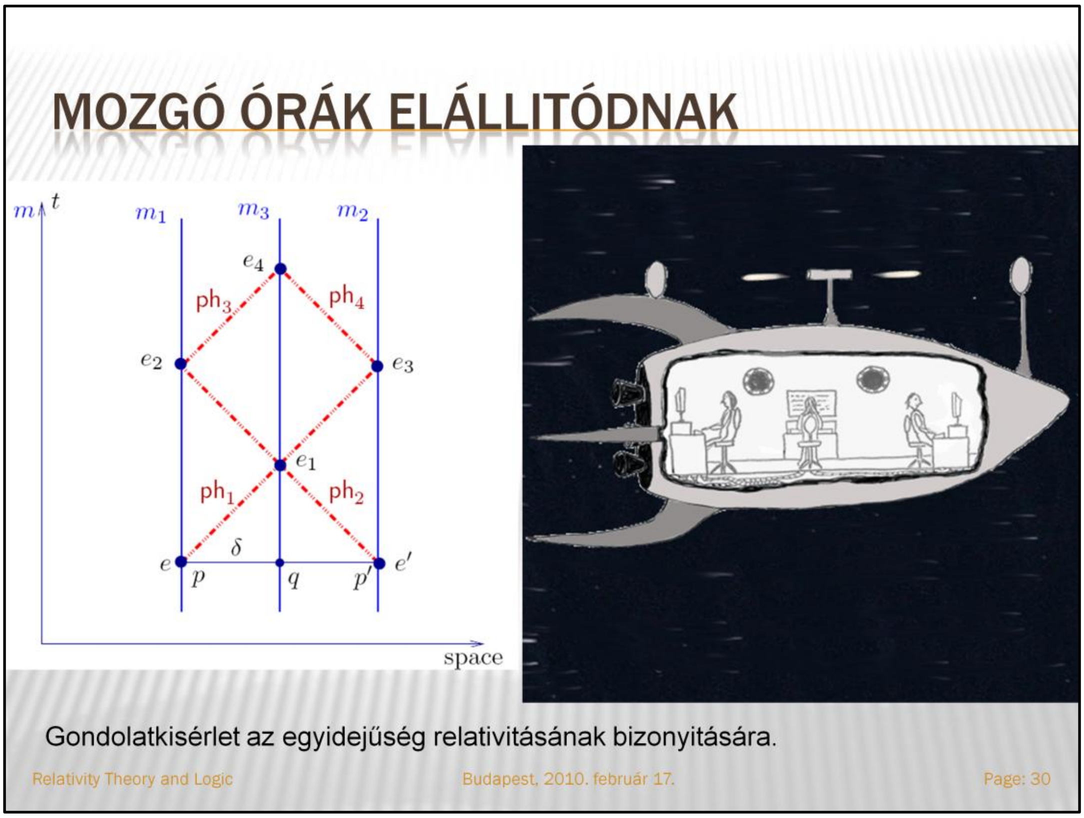
Az EgyenesAx következik a Tételből az Énaxióma használatával. A KisérletAx nem következik SpecRelből, viszont a KisérletAx-ból csak a Tétel állitását fogjuk használni a bizonyitásban (miszerint az „egyenesre felfűzve lenni” megfigyelőfüggetlen állitás).



Kétféle dolgot bizonyitunk tulajdonságokról, nevezetesen hogy megfigyelőfüggőek vagy megfigyelőfüggetlenek. Thm.2 azt mondja, hogy az egyidejűnek lenni az megfigyelőfüggő tulajdonság.



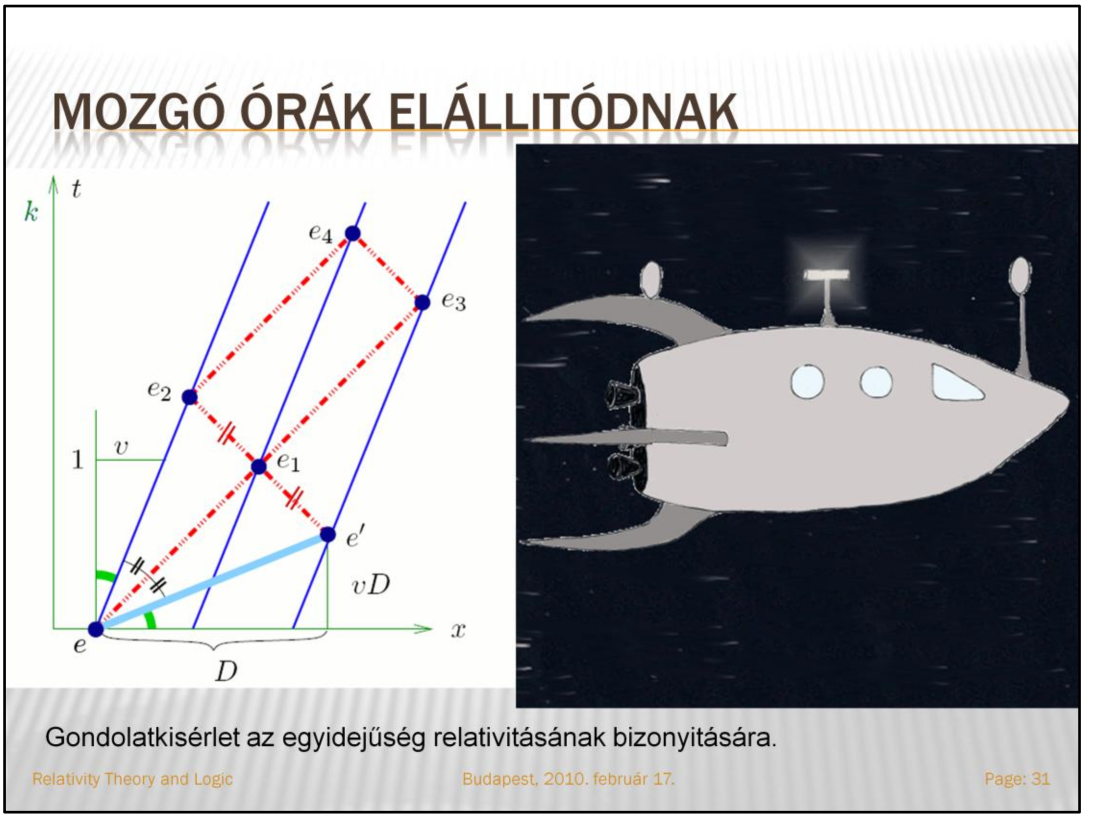
Thm.2 első állitásának ábrázolása mégegyszer. Ennek bizonyitásával kezdjük.



Experiment for establishing “simultaneity for m”.

This is the worldview of the ship. The captain is sitting in the middle of the ship and sends photon-signals to two mirrors, one at the nose and one at the rear of the ship. These two signals bounce on the mirrors and arrive back to the captain at the same time. This is how the captain knows that he is sitting exactly in the middle of the ship. By the photon-axiom the forward going and backward going photons travel with the same speed, thus the two bouncing events happen at the same time in this ship.

On the lelft-hand side there is the space-time diagram for the situation.



This is the worldview of an observer moving relative to the ship, lets call him Earthling. So this ship is moving in this worldview. We are following it with our camera, thats why it stays in the middle of the picture. Now by the photon-axiom, the Earthling sees the forward and backward moving photons move with the same speed. Since the ship moves in this worldview, the forward going photons race with the ship, thus the photons move slowly relative to the ship. By the same token, the backward going photons move very fast relative to the ship. By the event axiom, they meet where the captain sits, hence in the middle of the ship in this worldview, too. Therefore in this worldview the nose-bouncing event has to take place later than the rear-bouncing event.

MOZGÓ ÓRÁK ELÁLLITÓDNAK

Az elállitódás mértéke $v:(1-v)^2$ ha az űrhajó hossza 1 és sebessége v a k szerint:

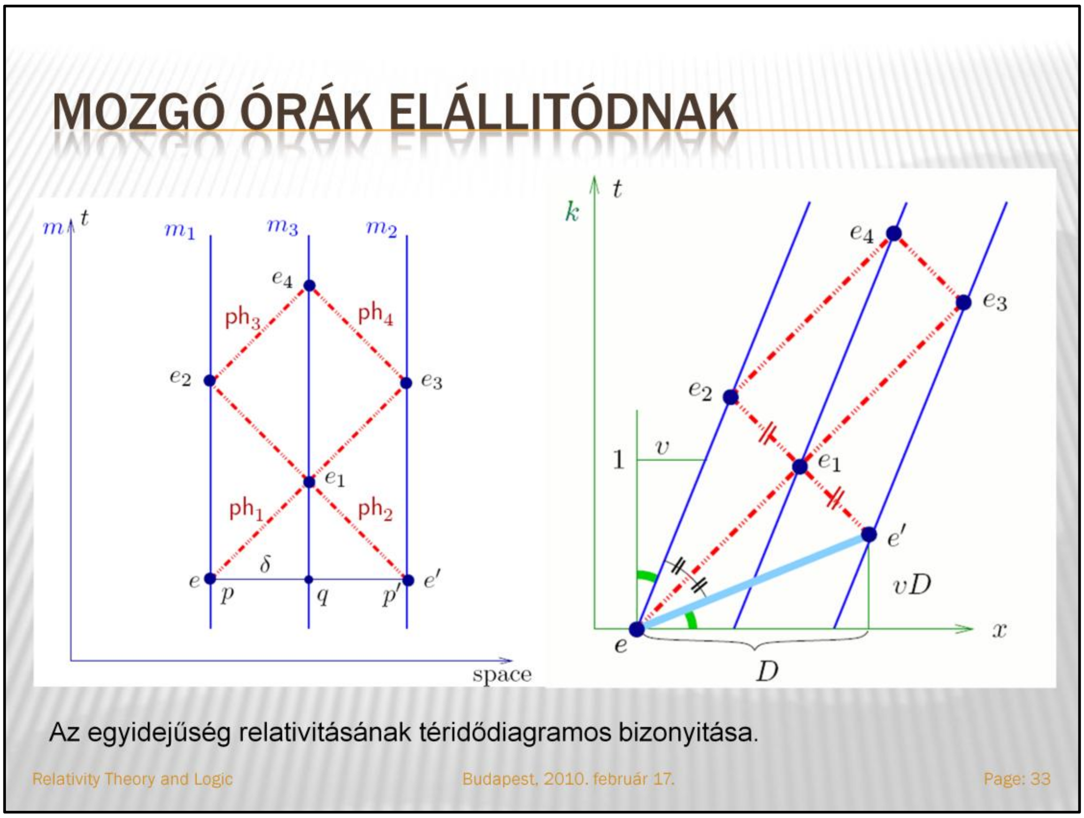
k szerint a fenékről kiküldött foton az űrhajóhoz képest 1-v sebességgel mozog, tehát 1:[(1-v).2] idő mulva éri el az űrhajó közepénél levő kapitányt. A hátulról kiküldött foton viszont 1+v sebességgel mozog az űrhajóhoz képest, tehát az 1:[(1+v).2] idő alatt éri el a középen lévő kapitányt. Ahhoz tehát, hogy ez a két foton középen találkozzon, a hátulról induló fotont

$1:[(1-v).2] - 1:[(1+v).2] = v:(1-v)^2$

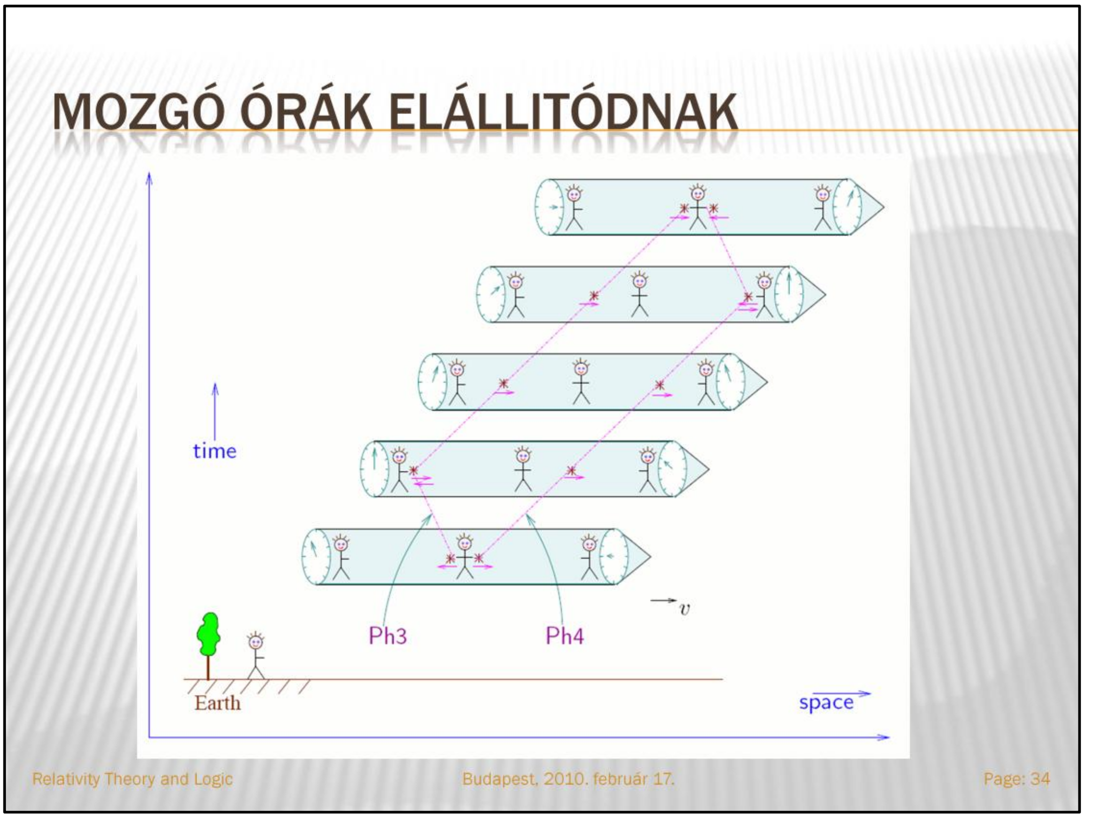
idővel később kell kiküldeni.

Kettőspontot irtunk osztás jelölésére.

Gyakorlat 1.9: Miért nem v –t kaptunk végeredményként, hiszen azt mondtuk, hogy a felcsapódó szimultanitás meredeksége -v ?

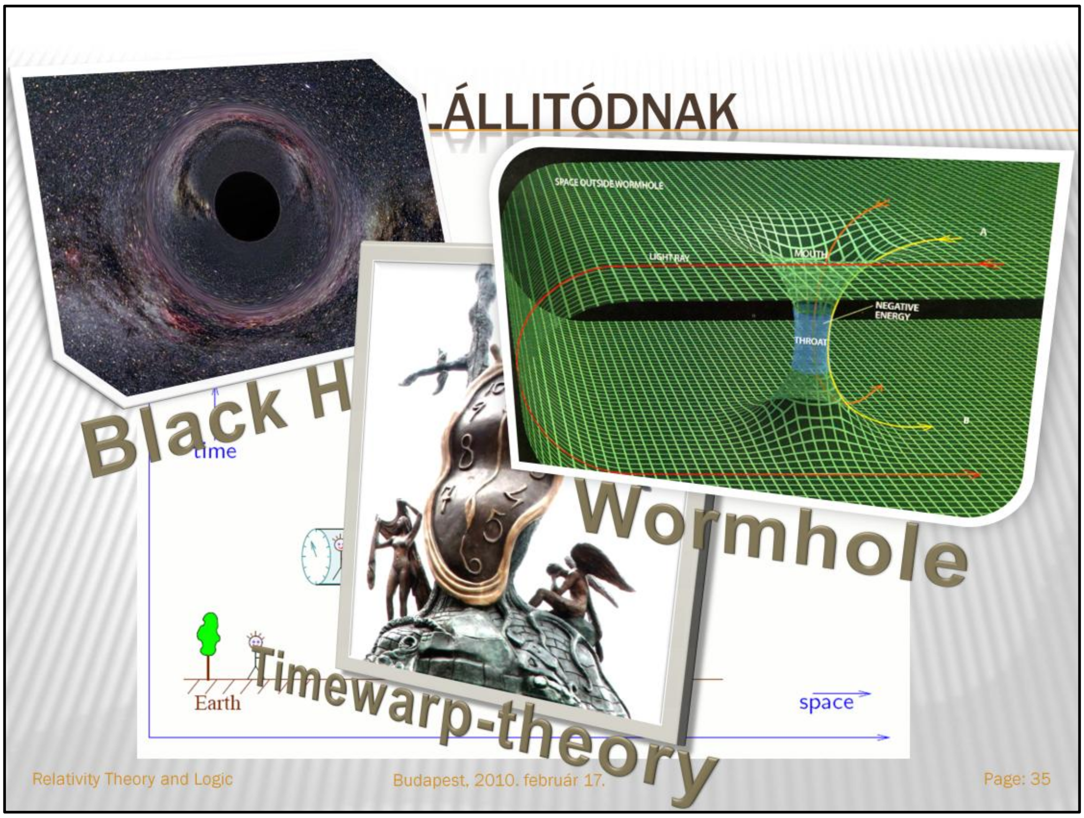


Ugyanez a bizonyitás téridődiagrammosan elmondva.



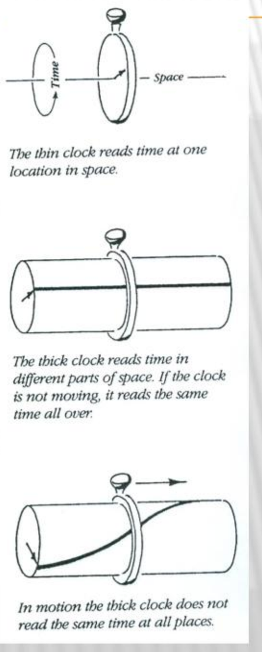
Ez a bizonyitás összefoglalása téridőrajz képregény alakjában. Középkarcsi a Kapitány.

As a consolation, “present” becomes a defined, “testable” concept (half-simultaneity). This leads up to black-hole, wormhole, timewarp-theory (via Einstein`s equivalence principle).

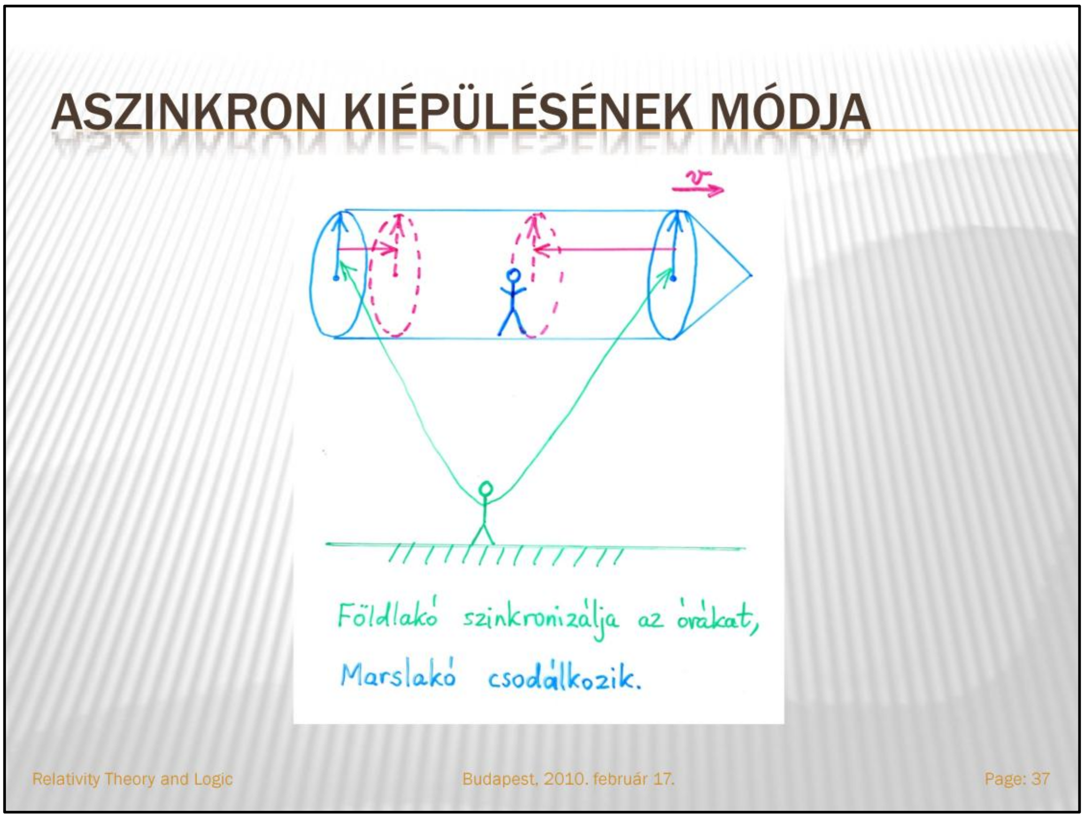


As a consolation, “present” becomes a defined, “testable” concept (half-simultaneity). This leads up to black-hole, wormhole, timewarp-theory (via Einstein`s equivalence principle).

ASZINKRON MÉLTATÁSA



Ez a rajz Lewis Carrol Epstein Relativity visualized cimű könyvéből van (ld. Ajánlott Irodalom a honlapon). A henger az űrhajó különböző helyein levő órákból áll, a hengeren levő vonal az óramutatók hegyeinek helye.



Igy alakul ki ez a relativisztikus effektus. Ha a Földlakó szinkronizálja az órákat, akkor az űrhajóban középen levő kapitányhoz a hátullevó óra képe későbben ér oda mint az elülső óra képe, ezért a kapitány azt fogja látni (fényjelekkel), hogy a hátulsó óra kevesebbet mutat mint az elülső óra. Mivel a kapitány tudja, hogy ő középen van, ezért a két órának ugyanazt kéne mutatnia. Rendes kapitány lévén beállitja az óráit, szól a hátul lévő tisztnek, hogy állitsa előre az óramutatót.

Gyakorlat 1.10: Hogyan állapitja meg (= számolja ki kisérletek eredményét felhasználva) a kapitány, hogy mennyivel előre kell a tisztjének állitania az órát?

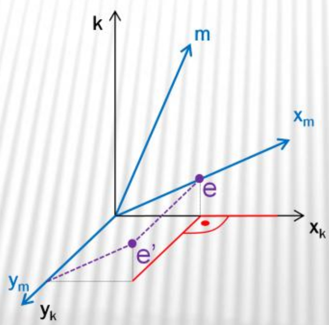
MOZGÓ ÓRÁK NEM ÁLLITÓDNAK EL MERŐLEGESEN

(2) *e, e' egyidejűek k számára is*

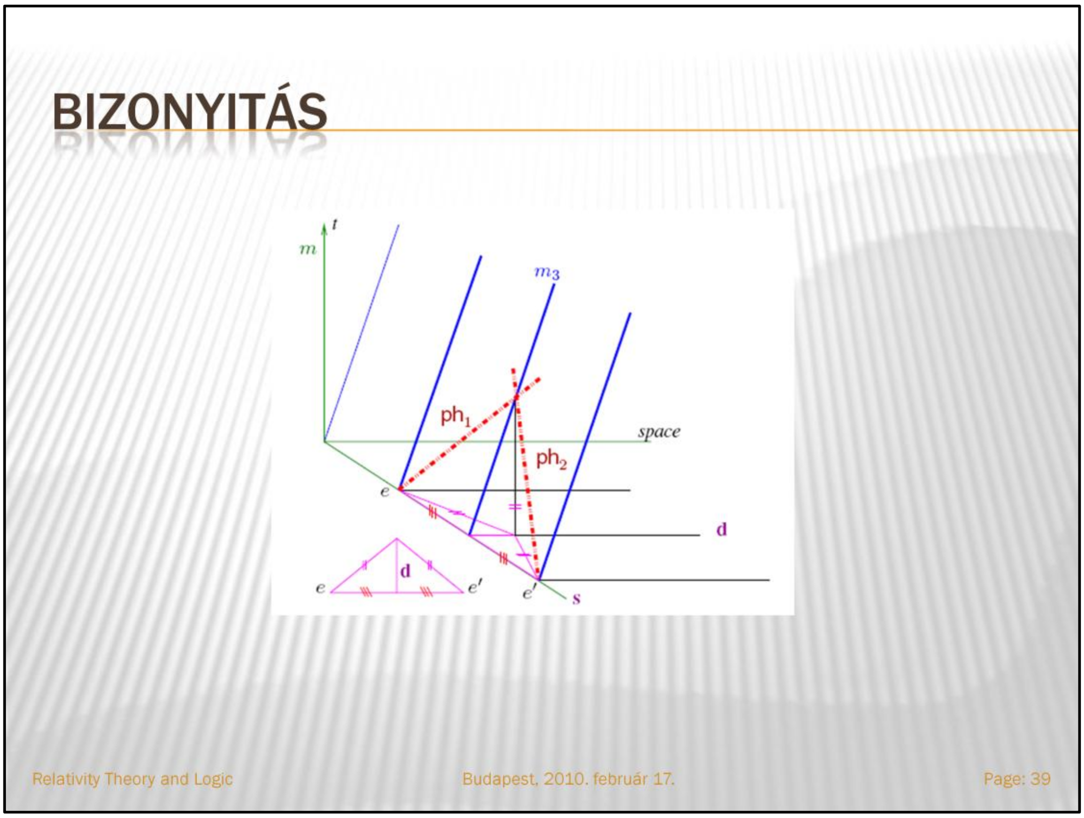
$\Leftrightarrow$

e, e' merőlegesen szeparáltak $v_k(m)$-re a k világképében

azaz $loc_k(e)_s - loc_k(e')_s \perp v_k(m)$

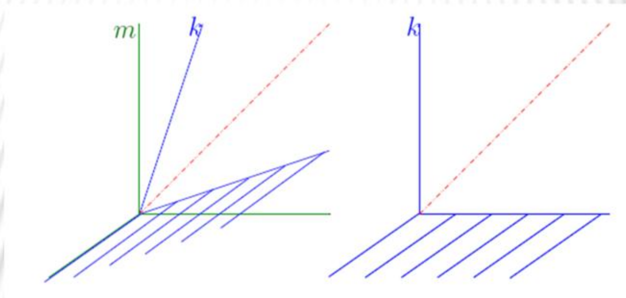


Events separated orthogonally to the motion do not get out of synchronism. Ez fontos lesz majd a szimmetria axióma használatakor.



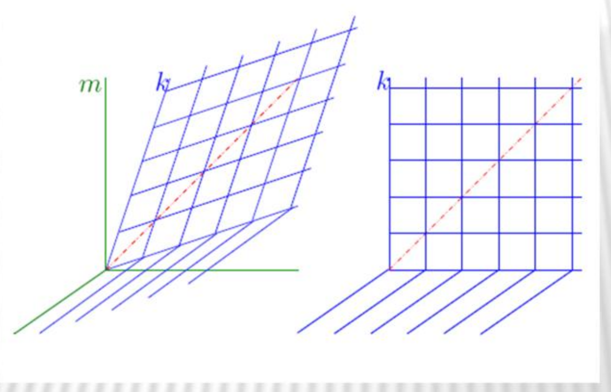
Annak téridős bizonyitása, hogy pontosan azon események szimultánok mindkét megfigyelő számára, amik a mozgásirányra merőlegesen vannak szeparálva.

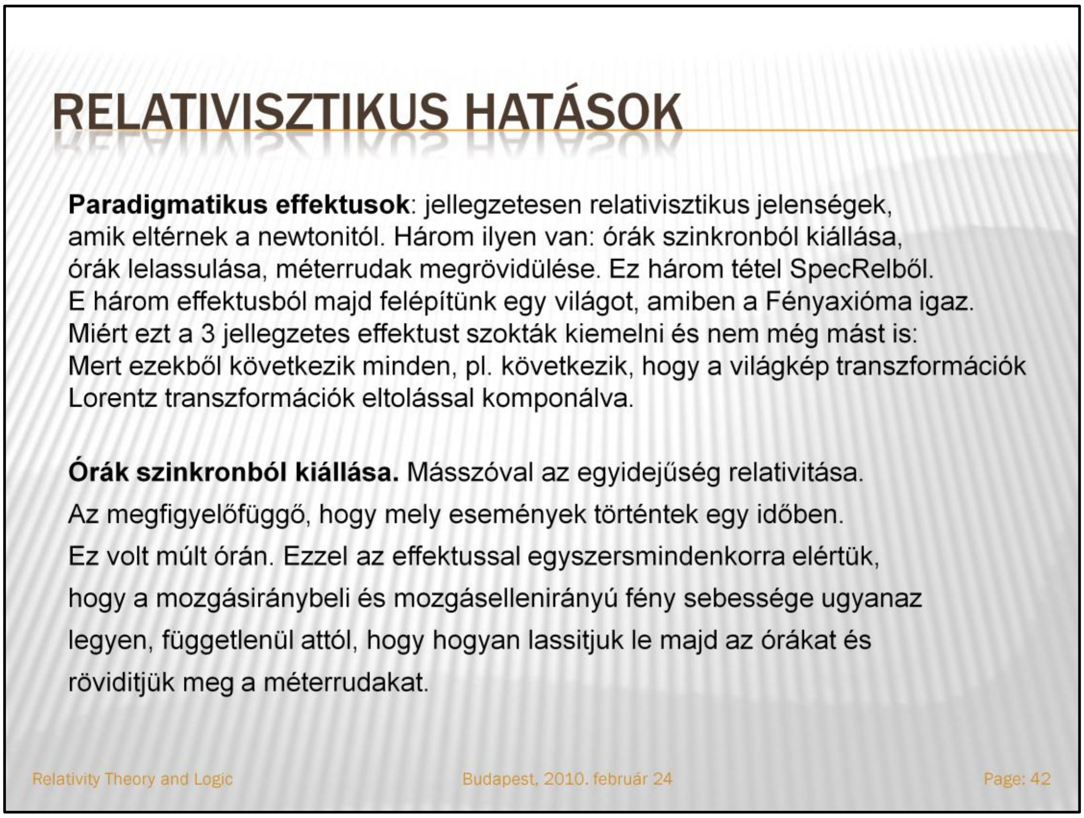
A MOZGÁSRA MERŐLEGES IRÁNYBAN



Ezt bizonyitottuk.

ÖSSZEFOGLALVA





Paradigmatikus effektusok: jellegzetesen relativisztikus jelenségek, amik eltérnek a newtonitól. Három ilyen van: órák szinkronból kiállása, órák lelassulása, méterrudak megrövidülése. Ez három tétel lesz SpecRelből. E három effektusból majd felépítünk egy világot, amiben a Fény Axióma igaz. Miért ezt a 3 jellegzetes effektust szokták kiemelni és nem még mást is: Mert ezekből következik minden, pl következik, hogy a világkép transzformációk Lorentz transzformációk.

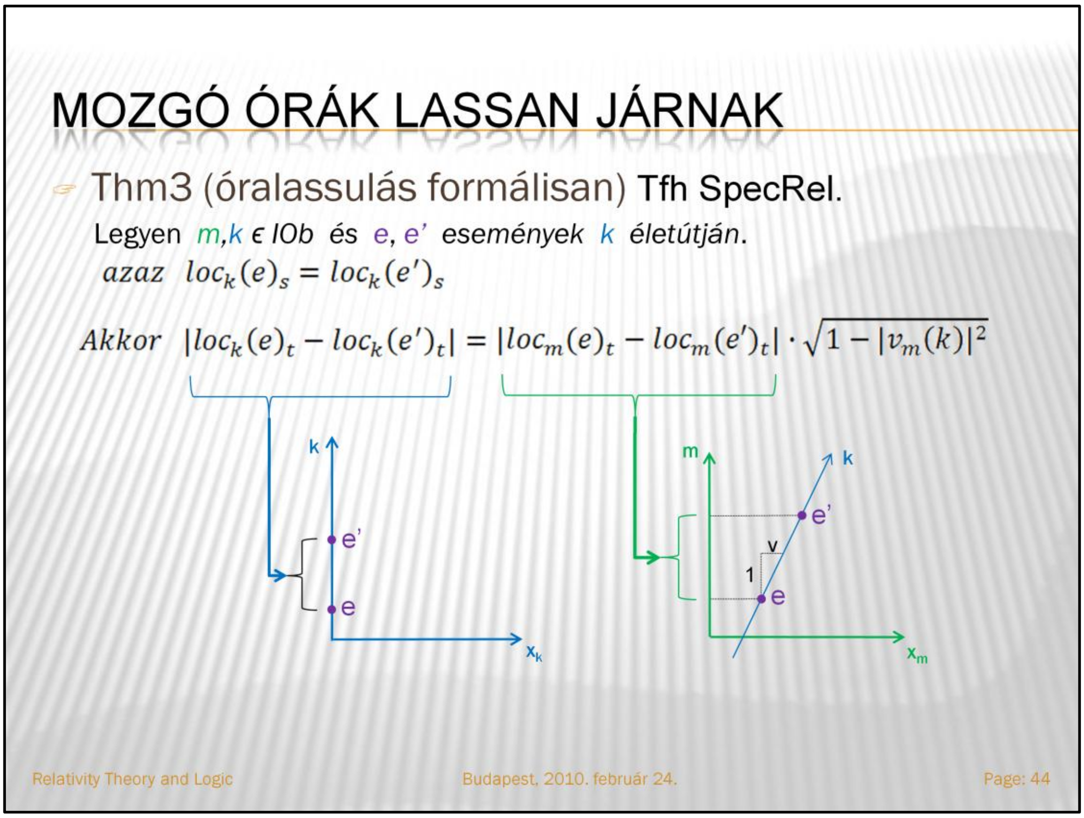
Órák szinkronból kiállása. Másszóval az egyidejűség relativitása. Az megfigyelőfüggő, hogy mely események történtek egy időben. Ez volt múlt órán. Mozgássíkban ezt kaptuk. A teljes síkon megmutatni. Ezzel az effektussal egyszersmindenkorra elértük, hogy a mozgásiránybeli és mozgásellenirányú fény sebessége ugyanaz legyen, függetlenül attól, hogy hogyan lassitjuk le majd az órákat és röviditjük meg a méterrudakat.

RELATIVISZTIKUS HATÁSOK

Thm3

- Mozgó órák lassan járnak
- Mozgó űrhajók megrövidülnek

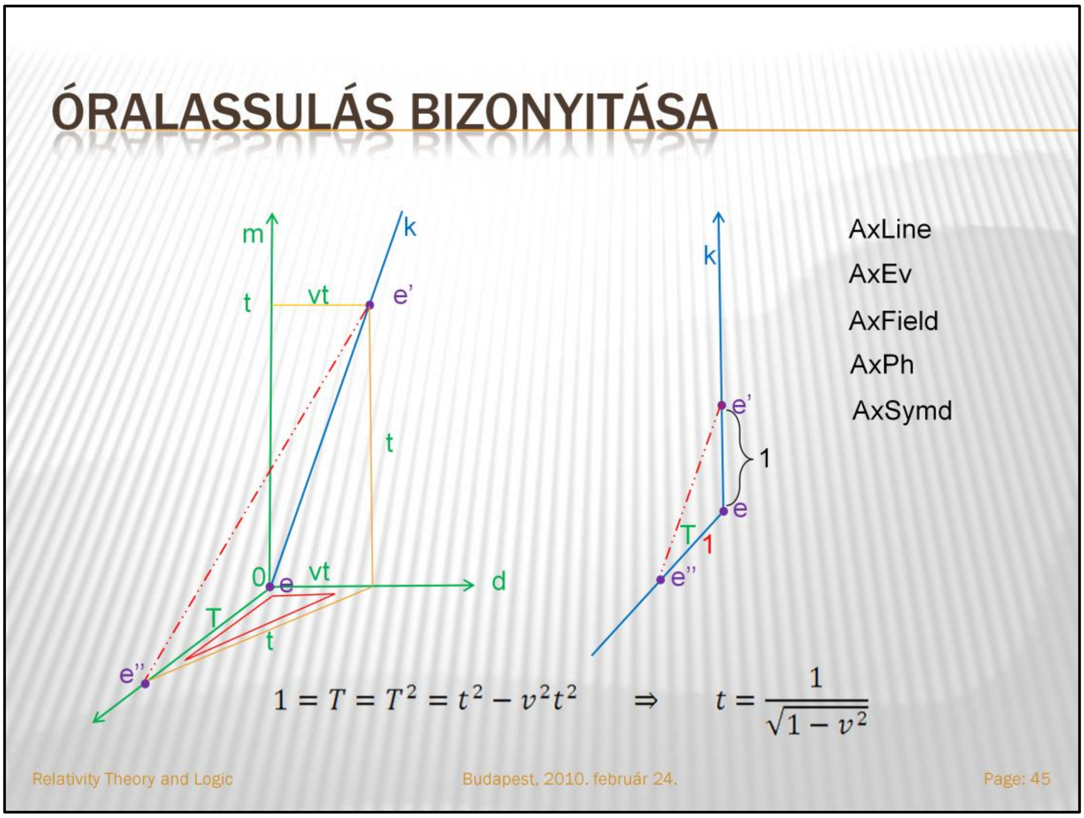
These are the other two paradigmatic effects of special relativity theory. They can be stated and proved analogously to the previous one, as will be shown in the next slides. The three effects together prove the theorem coming afterwards, which is the key in proving a completeness theorem for SpecRel.



Órák lelassulása. Angolul time dilatation. Pontosabban megfogalmazva: mozgó óra lassabban jár mint az álló. Állónak hívjuk azt az űrhajót, akinek a világképébe éppen beleköltöztünk. Sarkosabban: mozgás hatására az órák lelassulnak. (Látni fogjuk később, hogy gyorsulás folyamán az órák hogyan lassulnak le.)

Ami a v sebességgel mozgó órán T ideig tart, az az álló megfigyelő szerint (T osztva gyök 1-vnégyzet) ideig tart, ami nagyobb T-nél. A formális kimondásban T az egyenlet baloldala.

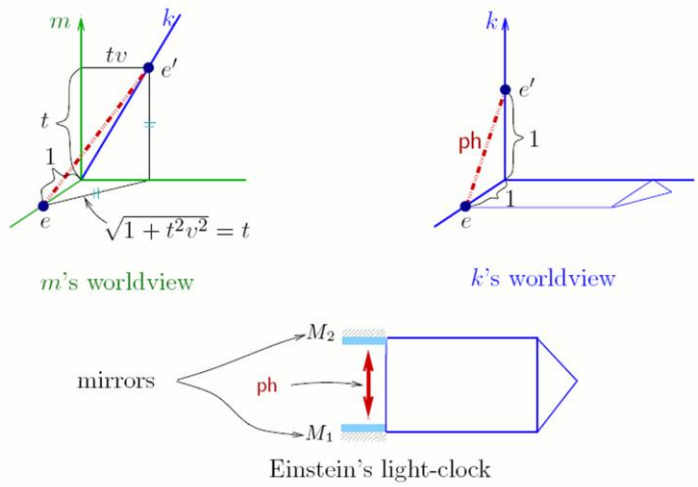
K measures less time between e and e' than m. In other words, k's clocks tick slowly as m observes them. This is called relativistic time dilation.



Felhasználjuk az AxLinet a bizonyitásban. AxLine = EgyenesAx = megfigyelő életútja egyenes minden másik megfigyelő világképében is.

Gyakorlat 2.5. Irjuk le az időlassulás bizonyitását csak a tér-re koncentrálva, azaz nem a téridődiagramra koncentrálva.

MOZGÓ ÓRÁK LASSAN JÁRNAK



Thought-experiment proving time-dilation (Einstein's light-clock).

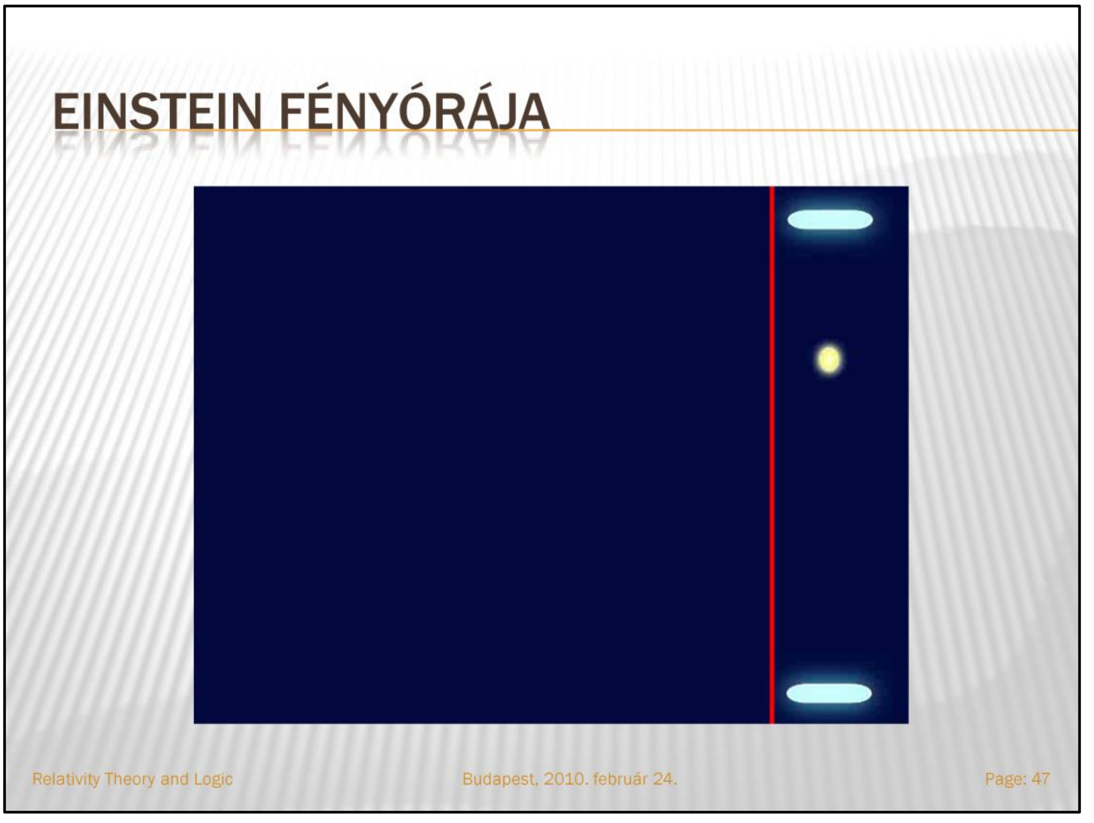
Bizonyítás: Einstein fényórája, derékszögű háromszög T, Tvt befogóval és t átfogóval. Innen t=(T-szer 1 osztva gyök 1-vnégyzet). Azaz amit a mozgó óra T-nek mér, azt az álló t –nek, ami nagyobb mint T. Téridődiagrammon ugyanez volt az előző oldalon.

Világos, hogy ennek az effektusnak a megfogalmazása érzékeny a mértékegységek megválasztására, tehát a Szimmetria Axiómát használtuk a bizonyításban. Aszinkronnál nem kellett. Ez az állítás mégsem a mértékegységek megválasztásáról szól, mert szimmetria axióma nélkül is igaz, hogy bármely két egymáshoz képest mozgó megfigyelő közül az egyik biztosan úgy fogja látni, hogy a másik órája lassabban jár. Tehát az nem lehet, hogy mindkét megfigyelő azt gondolja, hogy a másik órája jól jár (mint a newtoni világban). Az sem igaz a Szimmetria Axióma nélkül, hogy a mozgó órák egyenletesen járnak.

Gyakorlat 2.2: Bizonyítsuk SpecRel_0 (=SpecRel – AxSymd)-ból, hogy bármely két egymáshoz képest mozgó megfigyelő közül az egyik biztos úgy fogja látni, hogy a másik órája lassabban jár mint az övé.

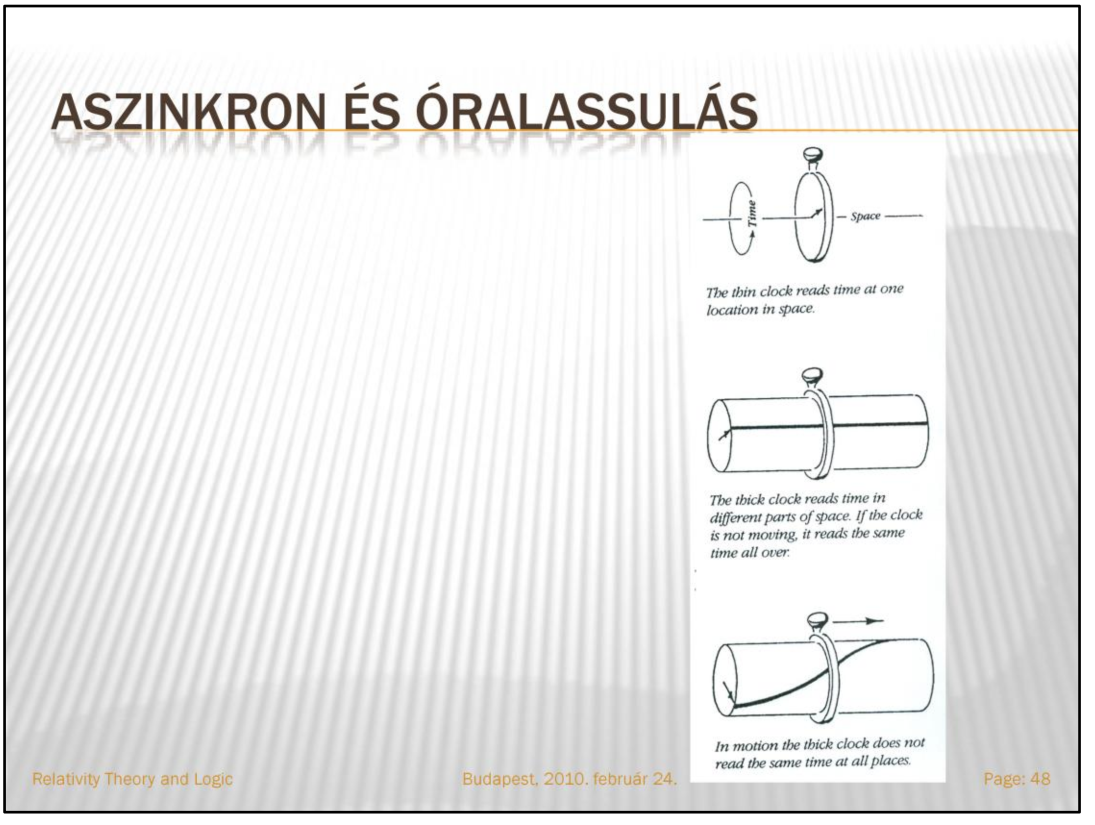
Gyakorlat 2.3: Bizonyítsuk, hogy SpecRel_0-ból nem következik, hogy a mozgó órák egyenletesen járnak. (Az eddig elmondott anyag tudásával ez még nehéz feladat. Egy alkalommal később már könnyebb feladat lesz.) Fogalmazzuk meg formálisan a SpecRel nyelvén, hogy „az órák egyenletesen járnak”.

Gyakorlat2.4: Bizonyitsuk SpecRel_0-ból, hogy az a tulajdonsága két eseménypárnak, hogy a köztük eltelt idő r-szeres, ahol r racionális szám, az megfigyelőfüggetlen. (Megjegyzés: a racionális számok minden testben megnevezhetők.)



Ez Einstein fényórája. Ezt láttuk az első órán. Az óralassulás bizonyitását el lehet mondani ezen animáció terminológiájával is.

Gyakorlat 2.6. Kössük az óralassulás bizonyitását nyelvileg az Einstein órákhoz.



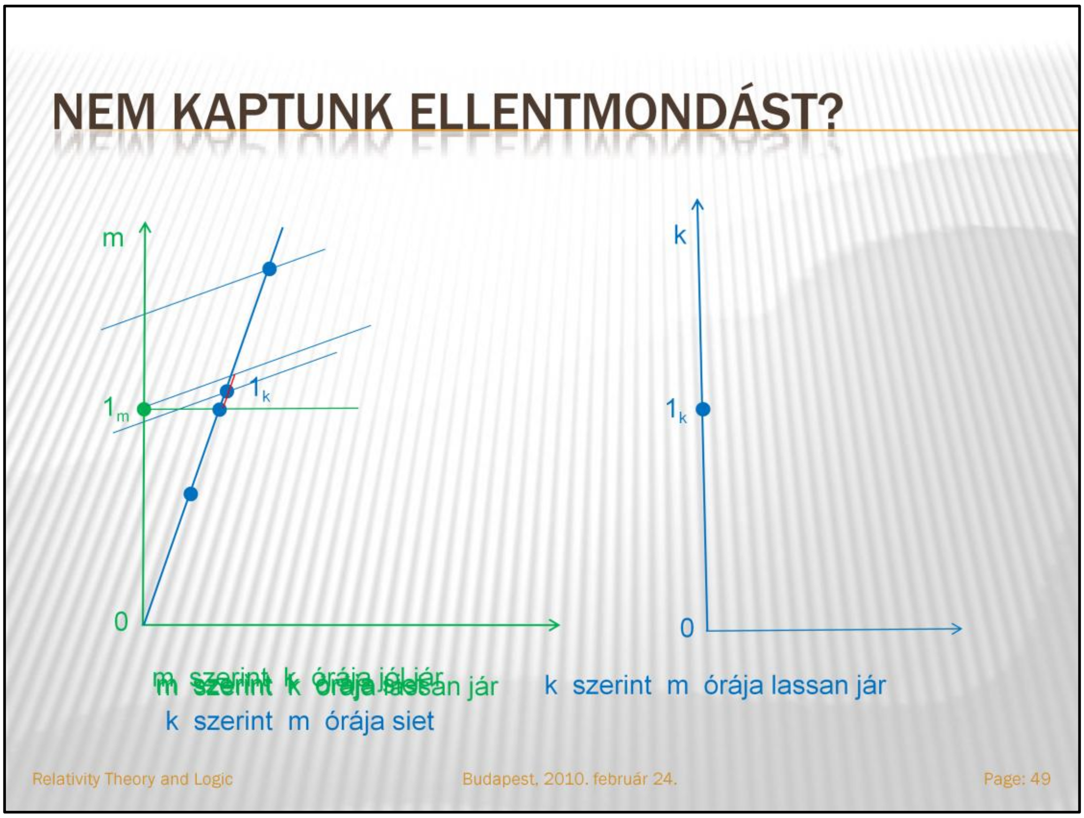
Ez a rajz Lewis Carrol Epstein Relativity visualized cimű könyvéből van (ld. Ajánlott Irodalom a honlapon). A henger az űrhajó különböző helyein levő órákból áll, a hengeren levő vonal az óramutatók hegyeinek helye.

Megjegyzés: Nem következik SpecRelből, hogy hátrafelé vagy előrefelé járnak az órák, mindkettő lehetséges. Azért nem adtuk hozzá SpecRel-hez ezt az axiómát, mert kimutatjuk majd hogy SpecRel ekvivalens a Minkowski geometirával és MG-ban nincs időirányítás. Áltrelben majd hozzáadjuk ezt az axiómát is SpecRelhez, mert általában a sokaságok időirányítottak. Másik okunk nem hozzáadni az, hogy két dimenzióban egymáshoz képest fénysebességnél gyorsabban mozgó megfigyelők közül az egyik biztosan úgy látja, hogy a másik órája hátrafelé jár. FTL az időutazással kapcsolatos. Ld. Ajánlott irodalomban Andréka-Madarász-Németi 1312 oldalas anyagban sec.2.7, 110-122 old.

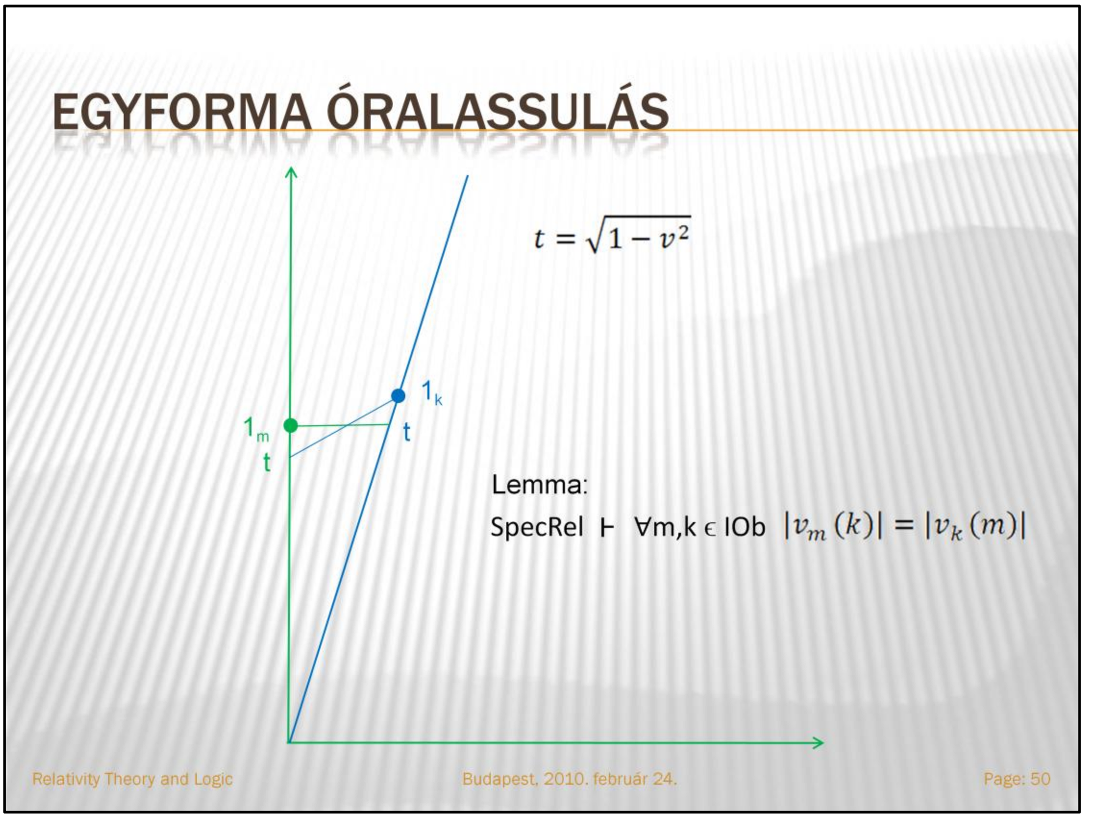
Gyakorlat 2.7: Fogalmazzuk meg, hogy k órája előrefelé jár az m szerint és bizonyitsuk, hogy ez nem következik SpecRel-ből.

Vizuálisan elmondani az Epsteinbeli órahurkán, hogy mit kaptunk eddig: Minél jobban csavarodik az órák hegye, annál lassabban forog a hurka, limeszben megközeliti azt, hogy a hurka áll.

Gyakorlat: A hurkán az órahegyek csavarodása mit közelit meg ahogy a hurka lassan megáll?



Nem kaptunk-e ellentmondást? Mindkettőnek úgy kell látni, hogy a másik órája lelassult. Lehetséges ez? Téridődiagrammon megmutatni, hogy ez hogyan lehetséges az aszinkron miatt. Ez lehetne bizonyítása is az aszinkron tételnek. Abszolút idő mellett nem lehetséges úgy látni mindkettőnek, hogy a másik órája lassabban jár.



Az óralassulás mértéke is egyforma! Mert $|v_m(k)| = |v_k(m)|$ bizonyitható SpecRelből. És forditva, Thm.3-ból bizonyitható, hogy a két sebesség ugyanaz.

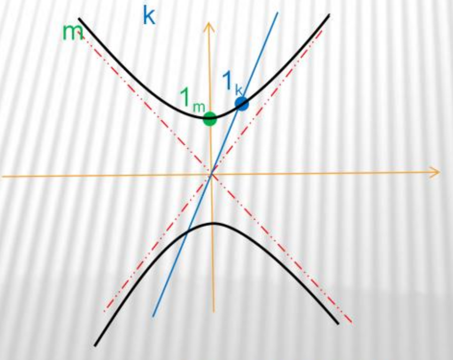
Gyakorlat 2.10. Bizonyitsuk SpecRelből, hogy $|v_m(k)| = |v_k(m)|$. Bizonyitsuk, hogy AxSymd nélkül ez nem igaz.

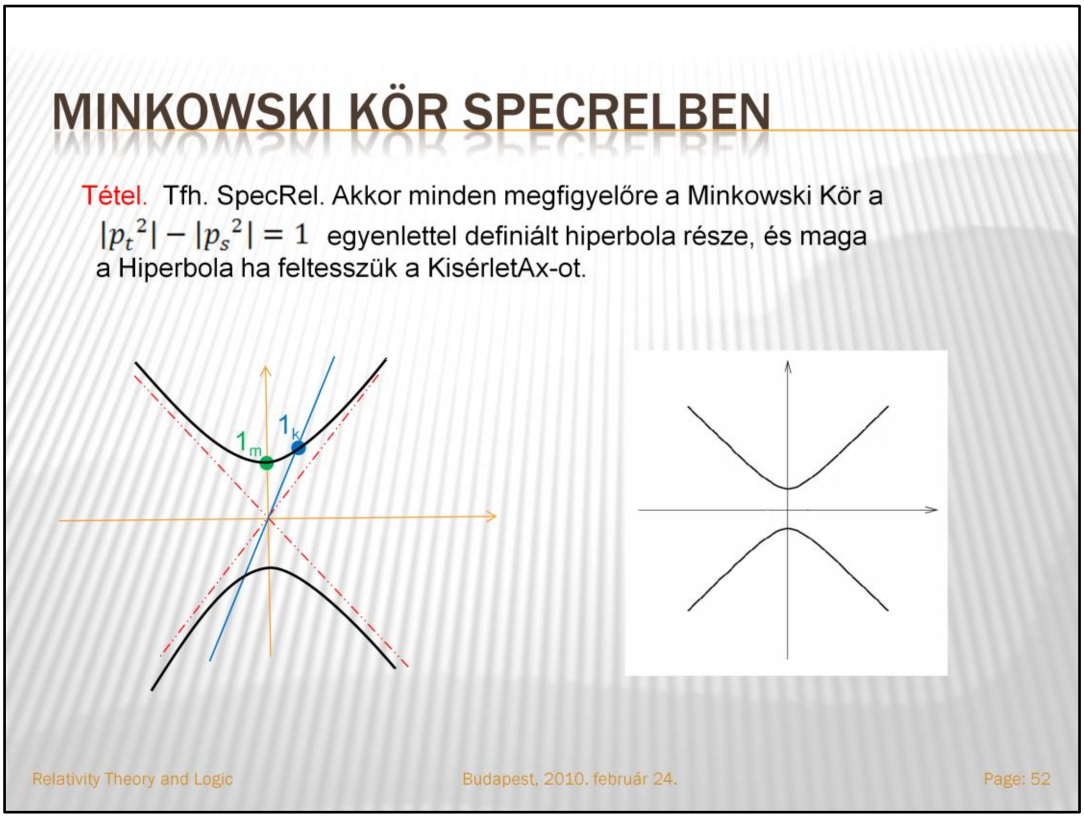
Thm. AxSymd ekvivalens azzal, hogy egymás óralassulásának mértékét bármely két megfigyelő ugyanúgy látja. Az utóbbi állitást gyakran AxSymt –vel jelöljük.

MINKOWSKI KÖR DEFINICIÓJA

Az m Minkowski Köre azon koordinátapontok halmaza, ahol valamely k megfigyelő órája 1-et vagy -1 –et mutat úgy hogy ugyanakkor k órája az origóban 0-t mutat:

$$p \epsilon MK_m \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \quad \exists k \epsilon IOb \ \ ev_m(o) = ev_k(o) \text{ és}$$
$$ev_m(p) = ev_k(1,0,0,0) \ \ vagy \ \ ev_m(p) = ev_k(-1,0,0,0)$$





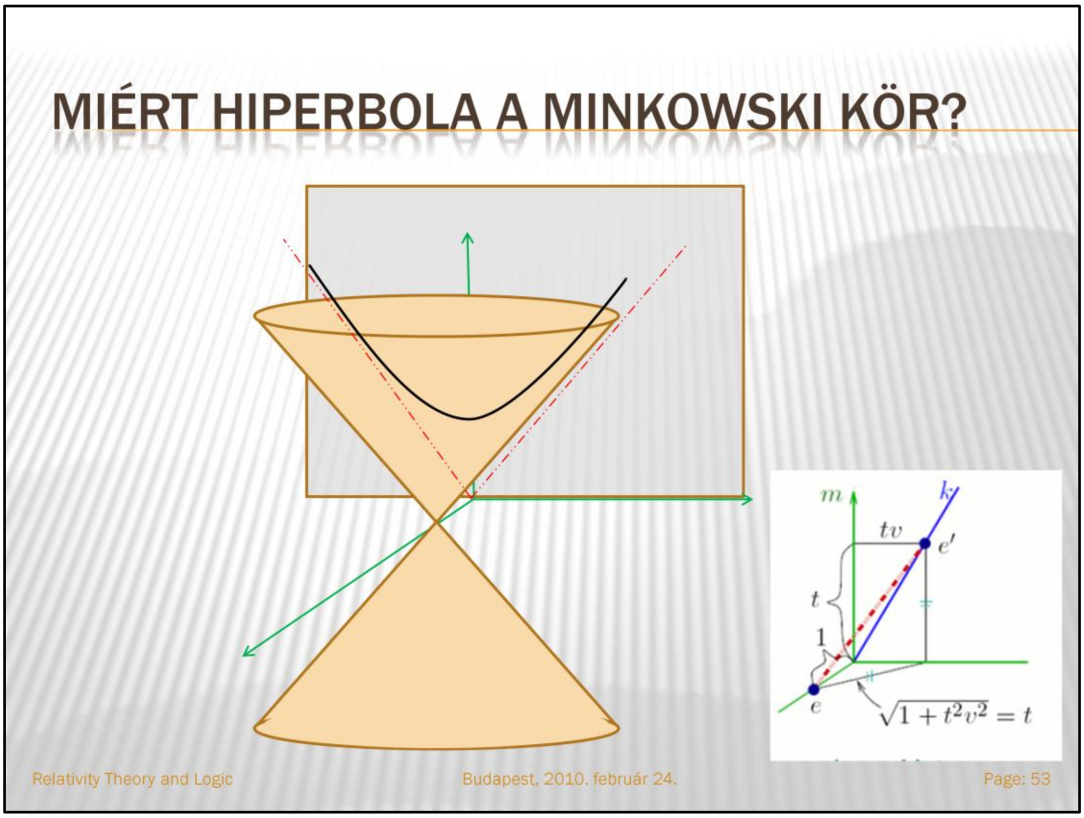
SpecRel$^+$ = SpecRel + AxThExp.

Azt kaptuk, hogy SpecRel$^+$ -ból következik, hogy a Minkowski Kör Hiperbola. Rajz.

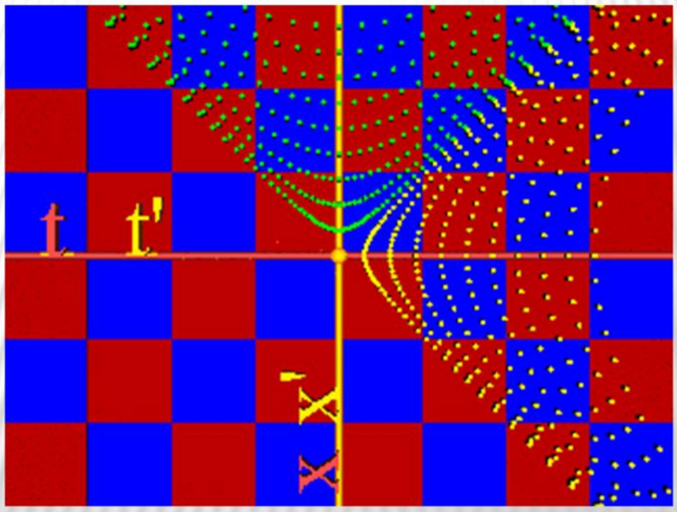
Minkowski Kör (Gömb) defja (ahol origóból kiinduló megfigyelők órája 1-et vagy mínusz 1-et mutat). Láttuk, hogy SpecRel$^+$-ból következik, hogy minden megfigyelő Minkowski köre a $p_t$négyzet – $p_s$négyzet=1 egyenlettel definiált hiperbola. Tehát SpecRel-ben a Minkowski kör megfigyelőfüggetlen.

Gyakorlat 2.9: Bizonyítsuk SpecRel0-ból, hogy a következő állitások ekvivalensek:

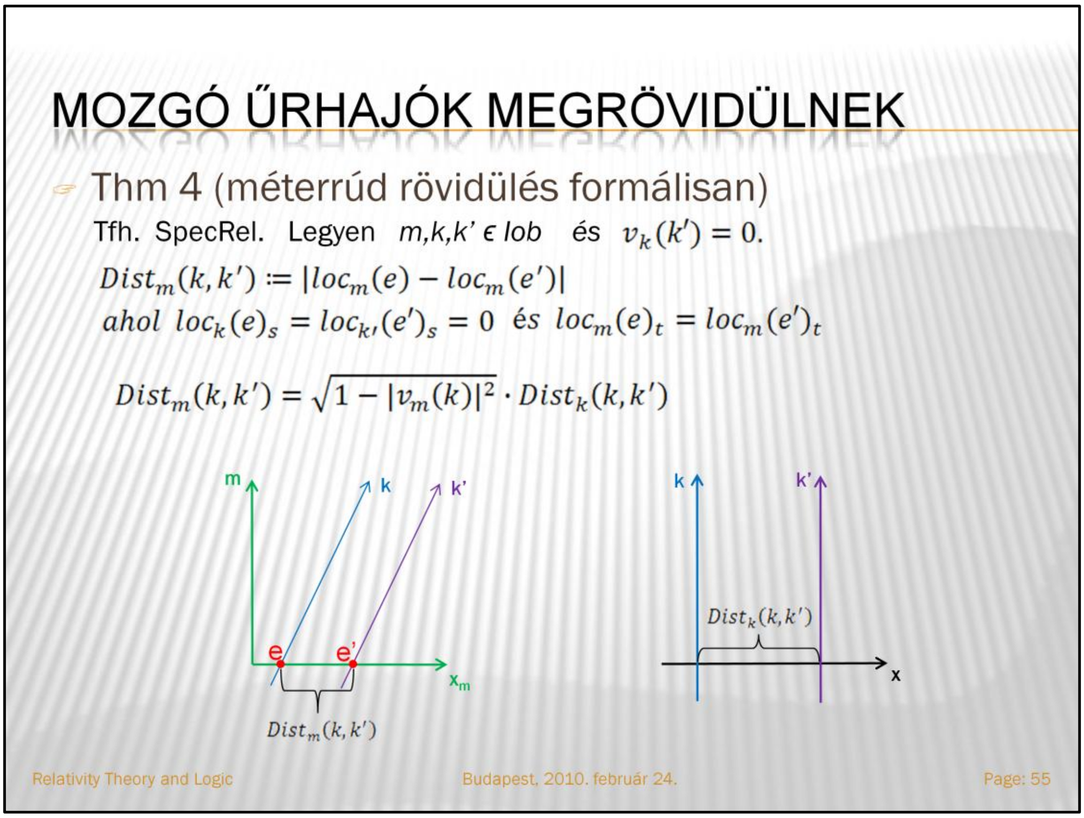
i. AxSymd ekvivalens azzal, hogy
ii. bármely két megfigyelő Mink köre ugyanaz ez pedig ekvivalens azzal, hogy
iii. az egyik megfigyelő Mink köre az imenti hiperbola ez pedig ekvivalens azzal, hogy
iv. minden megfigyelő Mink köre az imenti hiperbola.



Na már megint egy miért tipusú kérdés. Rajzoljunk be kicsit többet, mint ami feltétlenül kell a bizonyitáshoz. Merjünk többet csinálni, mint ami a haszonhoz kell.



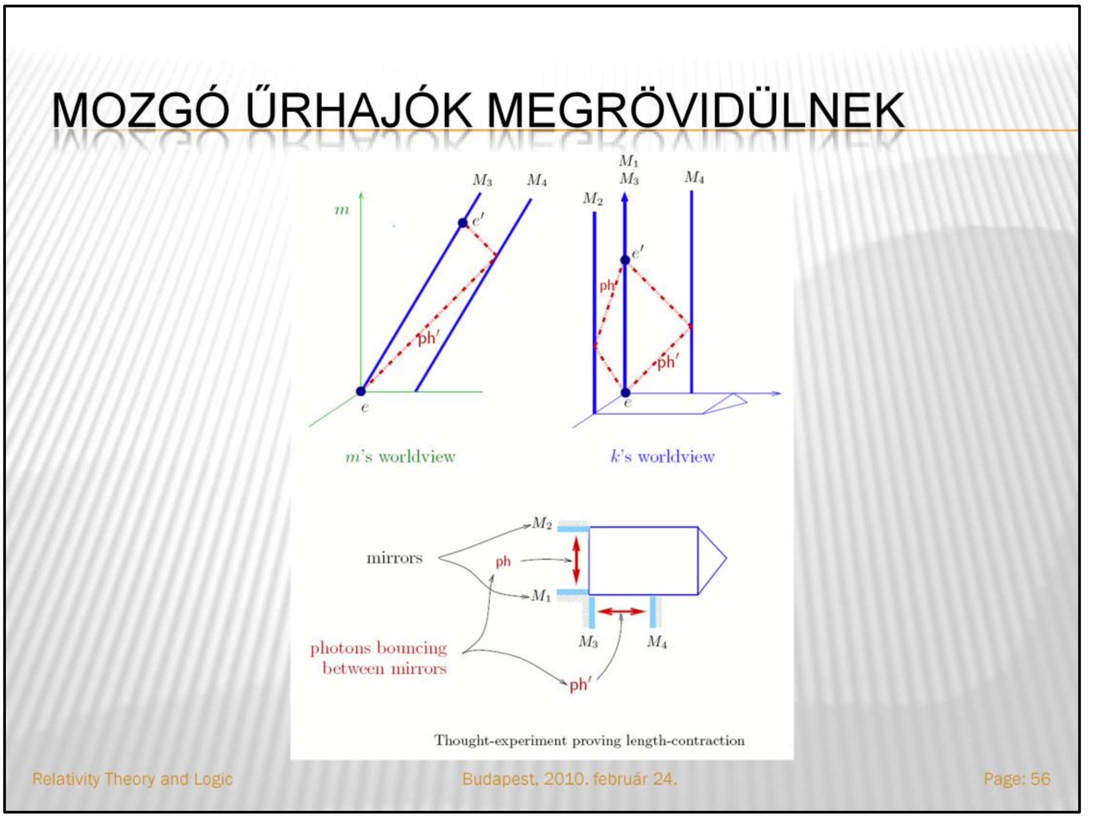
Szabó Endre kollégánk honlapjáról való. Látszik rajta, hogy a Minkowski körök helyben maradnak.



According to m, k's ship is shorter than what k claims. This is called relativistic length contraction.

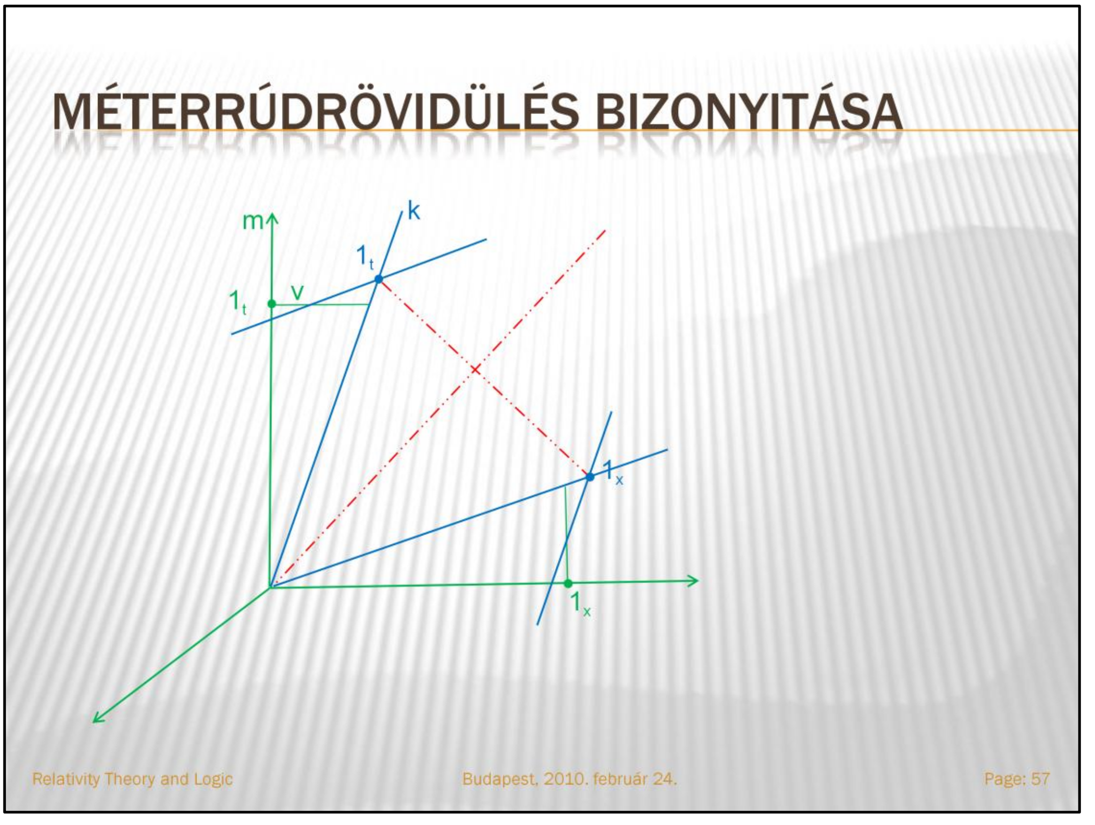
Intuitiven a tétel (Thm.4) azt mondja, hogy ha k szerint két hely közötti távolság T, akkor az m szerint, akinek világképében k v sebességgel mozog, a két mozgó hely közötti tértávolság csak T-szer gyök 1-vnégyzet.

Távolságot másként mérünk, mint időt. Időt a k életútján levő két esemény időkülönbségeként mértünk. Az igy mért idő a newtoni kinematika szerint megfigyelőfüggetlen, SpecRel szerint nem. Miért nem úgy mérünk távolságot, hogy veszünk két eseményt és ezek közti tértávolságot mérjük? Ez newtoni kinematikában sem megfigyelőfüggetlen. Példa: Budapesten vonatraszállás és Szegeden a vonaton kávéivás eseménye között Budapesten maradt barát szerint más tértávolság van mint a vonaton levőnek. Tehát másképpen mérünk tértávolságot. Mi a hely? Az m helyei az m –hez képest álló bodik (életútjai).

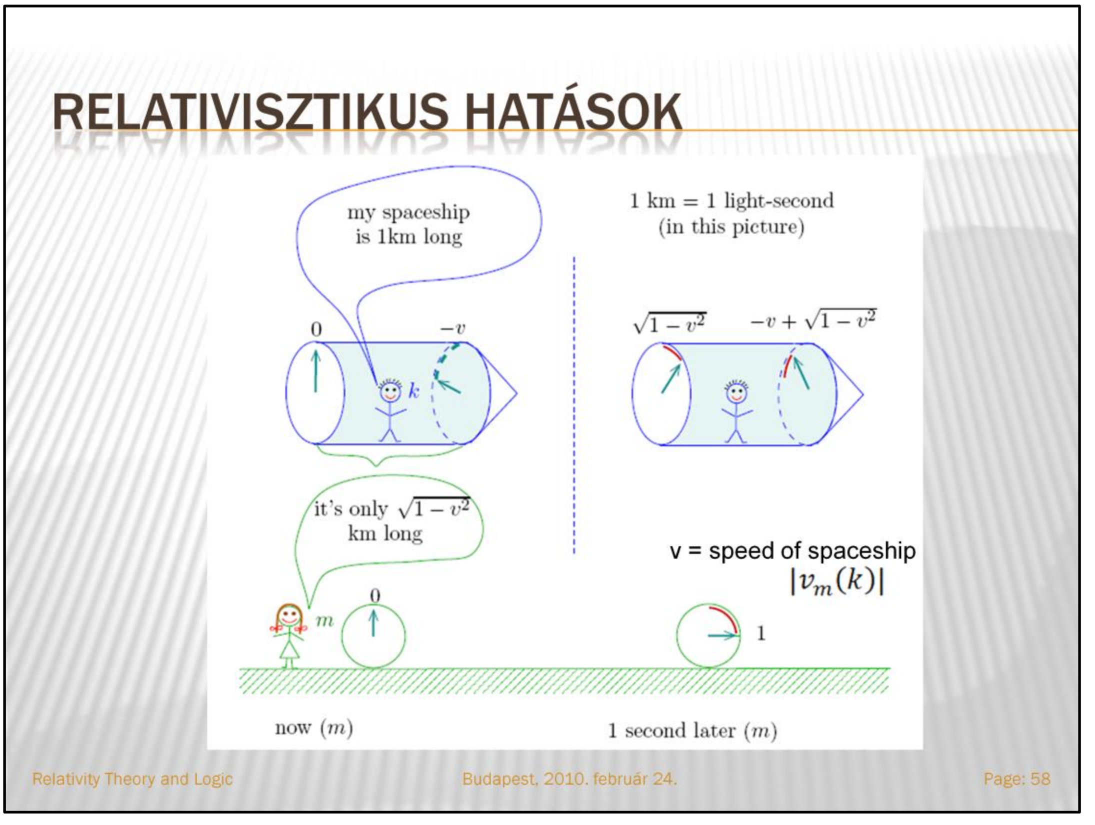


Proof of relativistic length contraction (via thought experiment).

Dupla-Einstein óra: az egyik foton a mozgásirányra merőlegesen, a másik a mozgásirányban pattog. Mennyi időre van szüksége a fotonnak az űrhajó végéből az űrhajó elejére jutni az m szerint? Az m világképében az űrhajó mozog, tehát a fotonnak több mint 1 km-t (ami k szerint az űrhajó hossza) kell megtennie. Ugyanakkor viszont k órája lelassul, tehát a két ellentétes hatást kell összehasonlitani. Ezt könnyen végig lehet számolni, de mi egy másik, téridős bizonyitást adunk a következő lapon.



Itt van egy egyszerűbb téridődiagrammos bizonyitás, az előző tételek felhasználásával.



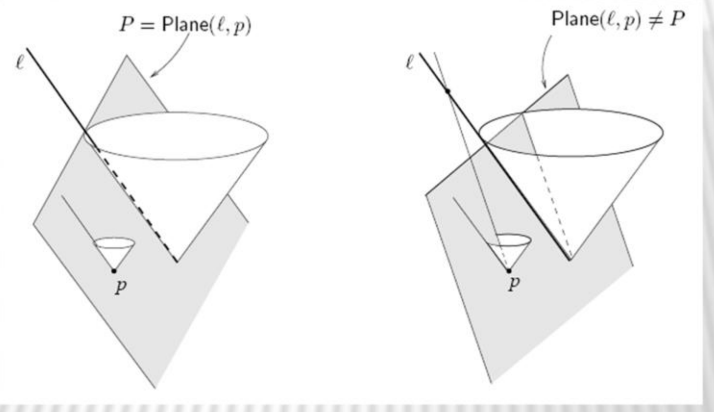
A három paradigmatikus effektus összefoglalása egy képen. v = speed of spaceship. Quantitatively, too.

EGYENES AXIÓMA BIZONYITÁSA

Azt bizonyitjuk, hogy a pontok „fényszerű szeparáltsága” tulajdonságából ki lehet fejezni az „egyenesnek lenni” tulajdonságot.

Öt lépésben bizonyitunk. Minden lépés egy gondolat.

1. Ki lehet fejezni az 1 dőlésszögű egyenesnek (azaz fényegyenesnek) lenni tulajdonságot, annak felhasználásával, hogy a fotonháromszögek elfajulók.
2. Ki lehet fejezni a 3-dimenziós altérben fénykúp érintősikjának lenni tulajdonságot úgy, hogy ezek pontosan azok a pontok, ahonnan nem lehet valamely előre adott fényegyenest fotonnal eltalálni+ez az egyenes. Négy dimenzióban ez a tulajdonság a sikot tartalmazó altér. (Id. A NoFTL bizonyitását.)

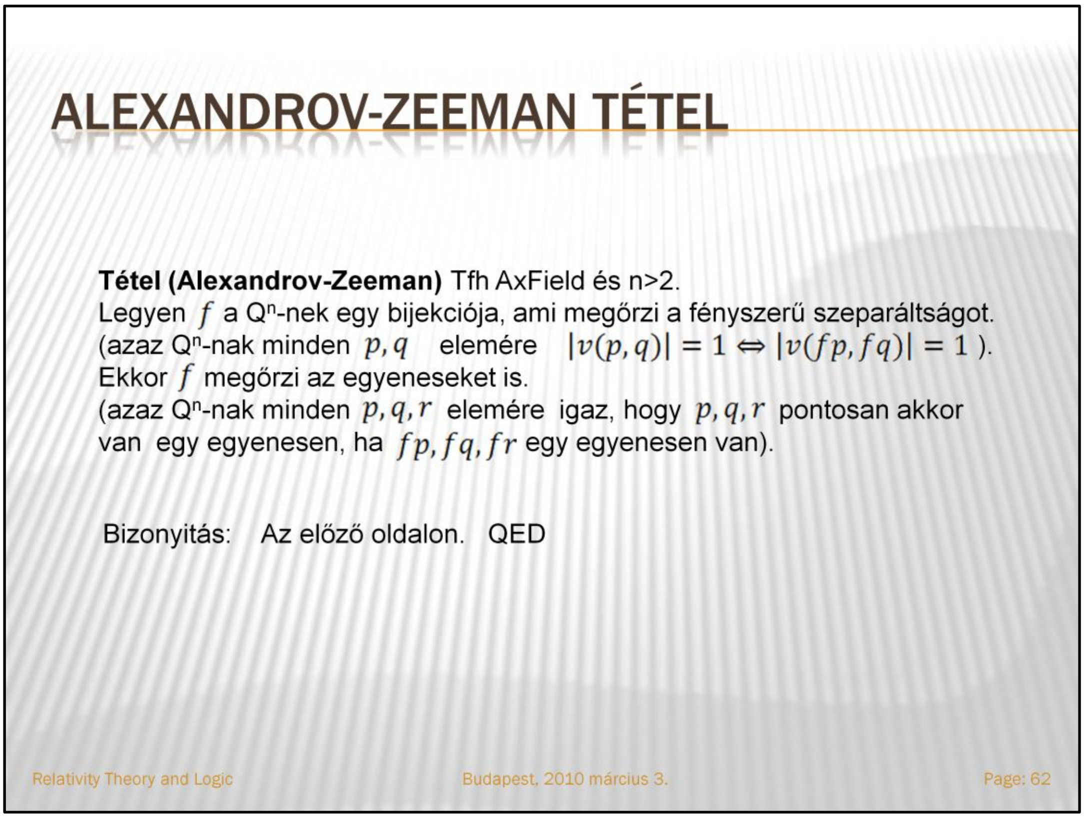

$P = \mathsf{Plane}(\ell, p)$
ℓ
p
$\mathsf{Plane}(\ell, p) \neq P$
ℓ
p

EGYENES AXIÓMA BIZONYITÁSA

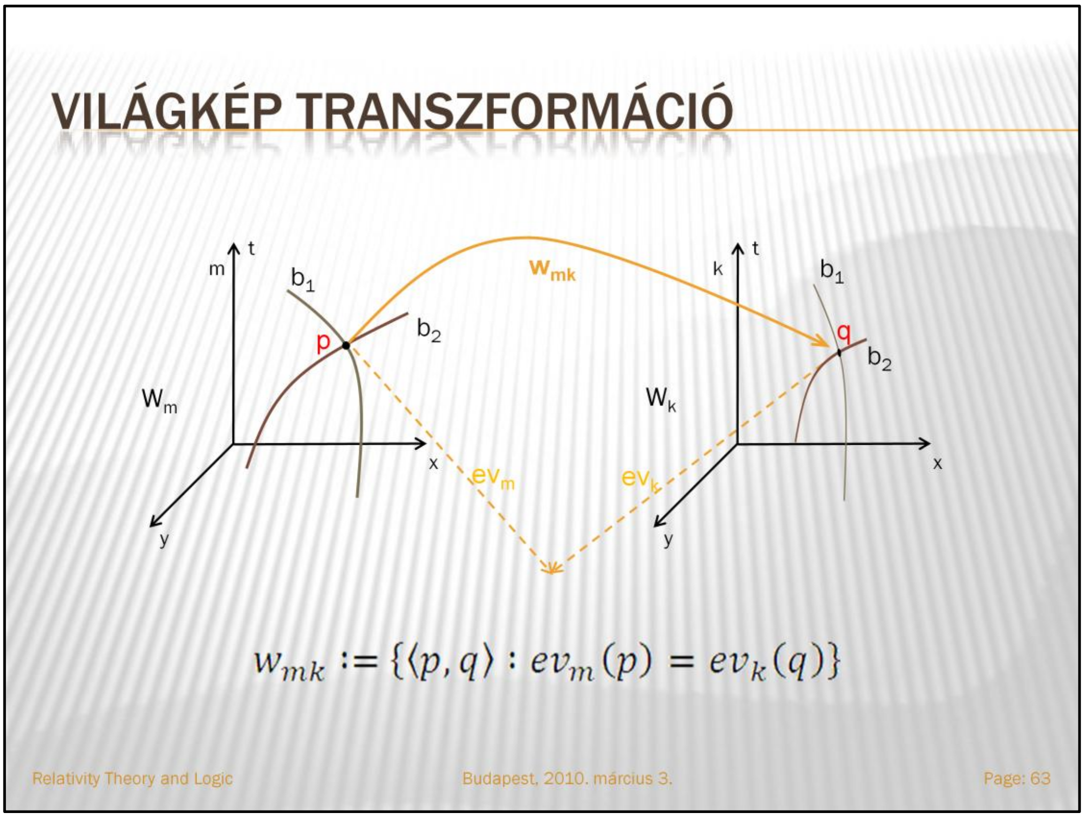
Azt bizonyitjuk, hogy a pontok „fényszerű szeparáltsága” tulajdonságából ki lehet fejezni az „egyenesnek lenni” tulajdonságot.

Öt lépésben bizonyitunk. Minden lépés egy gondolat.

1. Ki lehet fejezni az 1 dőlésszögű egyenesnek (azaz fényegyenesnek) lenni tulajdonságot, annak felhasználásával, hogy a fotonháromszögek elfajulók.
2. Ki lehet fejezni a 3-dimenziós altérben fénykúp érintősikjának lenni tulajdonságot úgy, hogy ezek pontosan azok a pontok, ahonnan nem lehet valamely előre adott fényegyenest fotonnal eltalálni+ez az egyenes. Négy dimenzióban ez a tulajdonság a sikot tartalmazó altér. (ld. A NoFTL bizonyitását.)
3. Ki lehet fejezni ezen sikok (illetve alterek) metszetével a „fénykúpon kivüli (azaz térszerű) egyenesnek lenni” tulajdonságot.
4. Térszerű egyenesekkel minden sikot ki tudunk „kövezni”, azaz minden sik előáll mint adott két (p-ben) metsző térszerű egyenesek mindegyikét nem a p-ben metsző egyenesek uniója + a p.
5. Végül minden egyenest megkapunk sikok metszeteként.



Ezzel most befejezzük a három paradigmatikus effektus bizonyitását. De előbb nevet adunk a gyereknek.



Mondtuk, hogy a paradigmatikus effektusok két megfigyelő világképének összehasolitásáról szólnak. Adjunk hát nevet a gyereknek.

Az m,k megfigyelők világképtranszformációja azokat a p,q koordinátapontokat köti össze, ahol m ugyanazt az eseményt látja mint k.

Ez egy binér reláció, ha nem kötünk ki semmi axiómát, akkor tetszőleges binér reláció lehet. **Gyakorlat:** Legyen R tetszőleges binér reláció a Q-n. Adjunk egy modelljét a nyelvnek (tehát semmilyen axióma nem kell teljesüljön), ahol ez a reláció két megfigyelő közti világképtranszformáció. SpecRelből bizonyitható, hogy a világképtranszformációk bijekciók.

Erről érdemes kicsit mesélni. Térképösszehasolitás, ha pl nem ugyanaz a lépték két térkép között, és nem pont felfelé van az észak. Vannak ilyen térképek, ahol külön nyillal jelzik, hogy merre van észak.

comparison between two maps of the same city. The worldview transformation w_{mk} connects spacetime locations where m and k, respectively, “see” the same events.

$w_{mk} = ev_m$ circle ev_k^{-1}, w_{mk} is a binary relation between coordinate systems.

Lemma 1: Tfh. $SpecRel_0$ és c>0. A w_{mk} világképtranszformációk bijekciók a Q^n-en, akik egyenest egyenesbe visznek.

Biz.: AxPh miatt m és k minden Q^n-beli pontban lát eseményt.
AxEv azt mondja, hogy w_{mk} értelmezési tartománya és értékkészlete is Q^n .
Gyakorlat 1.7 szerint minden megfigyelő minden eseményt max. egyszer lát (megoldás a honlapon.) Ez azt mondja, hogy w_{mk} függvény és injektiv.
AxPh meg azt mondja, hogy w_{mk} megőrzi a fényszerű szeparáltságot.
Alexandrov-ZeemanTétel szerint akkor w_{mk} egyenest egyenesbe visz .
QED

Tétel 5: SpecRel $\vdash$ AxLine.

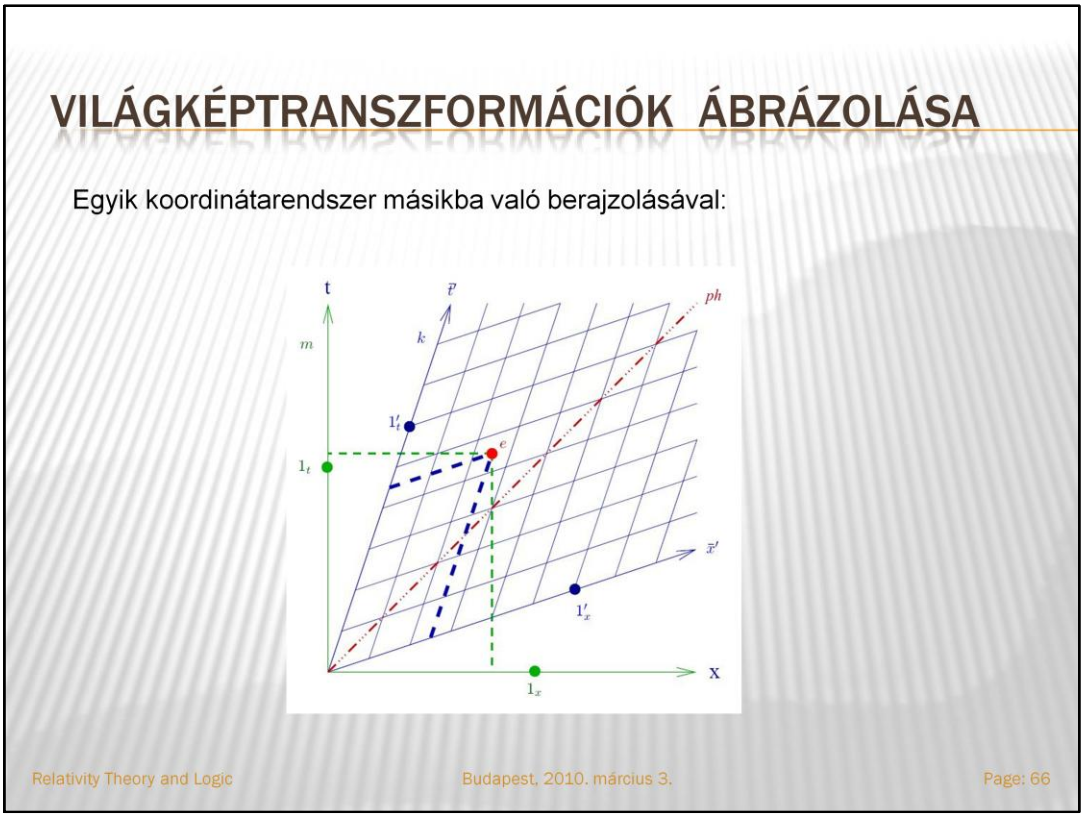
Biz.: AxSelf szerint m életútja a saját világképében egyenes.
Ekkor a Lemma 1 szerint minden más k megfigyelő világképében is egyenes.
QED

Eseménynek két vagy több bodi találkozását hivtuk. $Ev_m(p)$ az m világképében a p helyen előforduló bodik halmaza.

Ezzel a három paradigmatikus effektus bizonyitása be van fejezve:

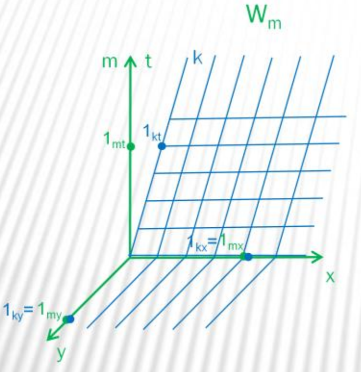
AxLine-t bizonyittuk SpecRel-ből.

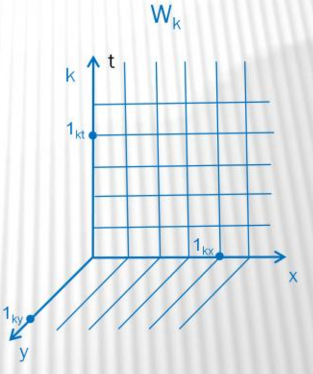
A Kisérlet Axiómát pedig csak arra használtuk a paradigmatikus tételek bizonyitásában, hogy megnevezzünk egyeneseket annak érdekében, hogy azok a másik megfigyelő világképében is egyenesek legyenek.
Ezt Lemma 1 adja nekünk.



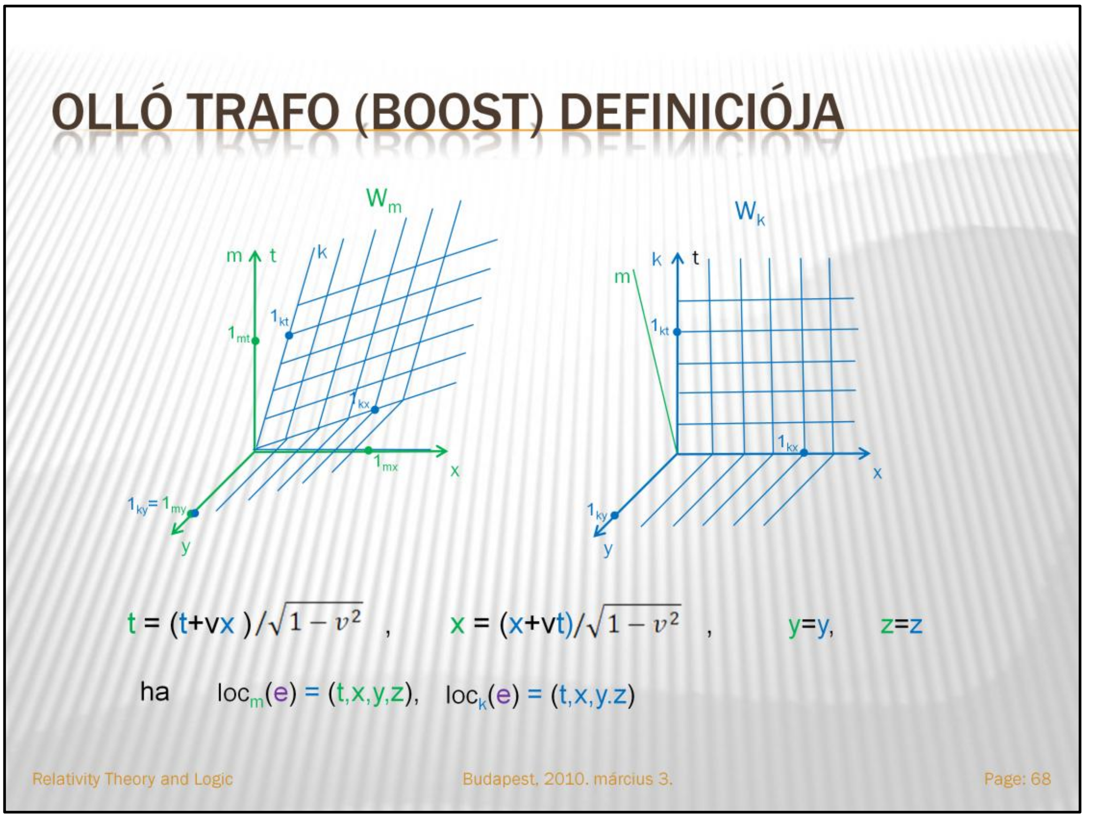
$W_{mk}(loc_m(e)) = loc_k(e)$ minden e eseményre. Az e esemény a piros pont, az m koordinatarendszerében a koordinátatengelyekkel párhuzamos vonalakkal levetitjuk e helyét a tengelyekre és leolvassuk az ottani számokat. A k koordinátarendszerében ugyanezt csináljuk, csak most a kék vonalak mentén vetitünk és a kék tengelyekről olvassuk le a számokat.

NEWTONI VILÁGKÉPTRAFO



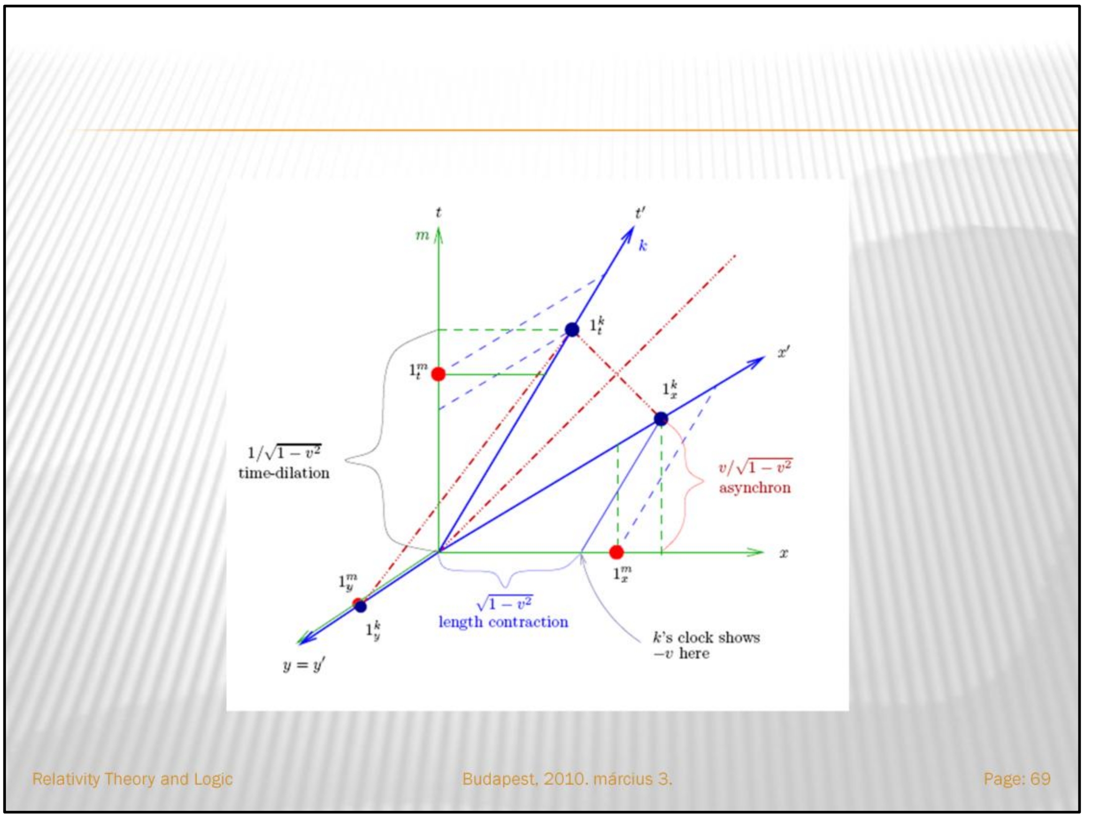


$t=t,\quad x=x+vt,\quad y=y,\quad z=z$ ha $loc_m(e) = (t,x,y,z),\quad loc_k(e) = (t,x,y,z)$



Ha k életútja az m világképében a tx-sikban van, és ugyanakkor az m életútja a k világképében is a tx-sikban van (ezt hivják sztenderd konfigulációnak), akkor a világképtrafo éppen a v-olló trafo. Csinos formula, szimmetrikusabb, mint a newtoni.

Az aszinkron tétel ott jelenik meg a formulában, hogy a t képletében az x is előfordul, az időlassulás ott jelenik meg, hogy van egy v-től függő szorzó.



Az előző ábra több részlettel.

A három fényvonal a három paradigmatikus effektus bizonyitásából jön.

OLLÓ-TRAFO MEGŐRZI FÉNYKÚPOT

Számolás:

Tfh. $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$.
Kell: $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Tudjuk: $t = (t+vx)/\sqrt{1-v^2}$, $x = (x+vt)/\sqrt{1-v^2}$, $y=y$

Beirva amit tudunk, kell:

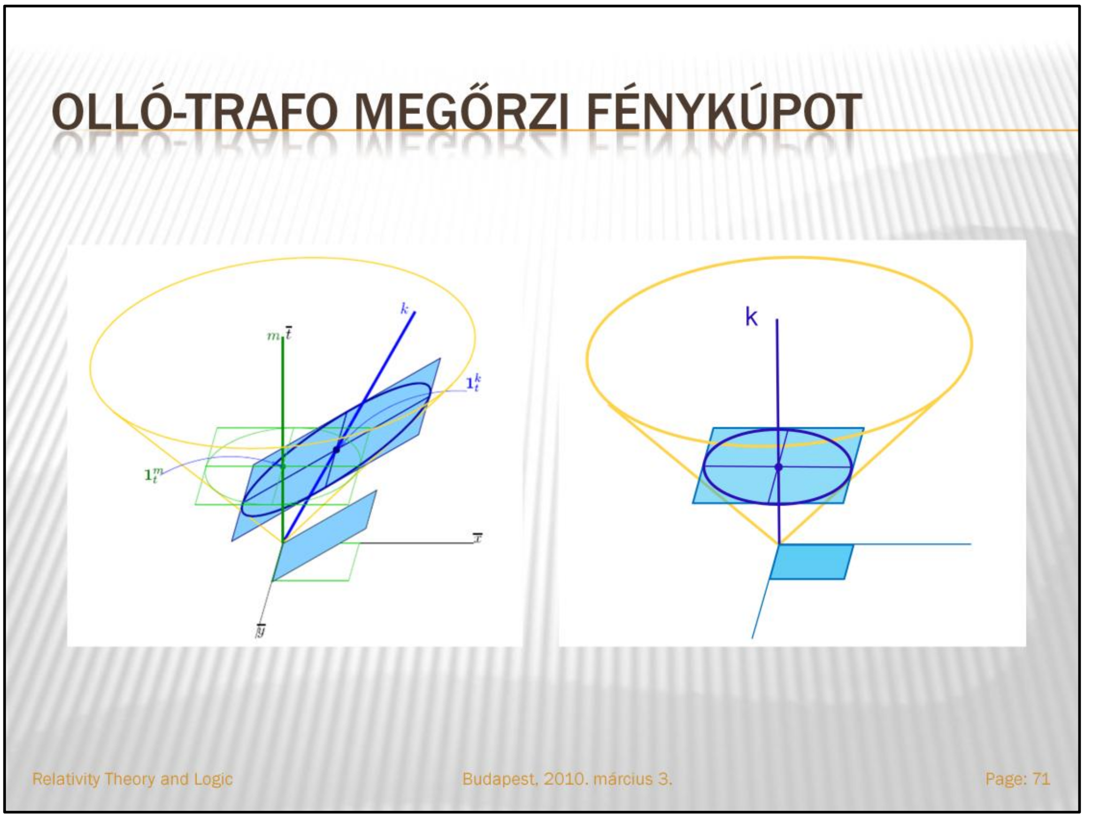
$(t^2+v^2x^2+2tvx)/(1-v^2) = (t^2+v^2x^2+2tvx)/(1-v^2) + y^2 + z^2$, azaz kell

$(t^2+v^2x^2+\cancel{2tvx})/(1-v^2) = (x^2+v^2t^2+\cancel{2xvt})/(1-v^2) + y^2 + z^2$, azaz kell

$(t^2-v^2t^2)/(1-v^2) = (x^2-v^2x^2)/(1-v^2) + y^2 + z^2$, azaz kell

$t^2 = x^2 + y^2 + z^2$, ezt pedig feltettük.

Szerencsénk volt?



Itt a geometriai bizonyitas:

Nézzük a w_{km} –t. Ez sikot sikba visz, és a három paradigmatikus effektussal elértük, hogy a k világképebeli kör két berajzolt átlójának a körrel való metszéspontját w_{km} a kúpra vigye. Azt kell látnunk, hogy a kör többi pontját is a kúpra viszi. Az m világképében a sik képének metszete a kúppal ellipszis, és a kör két átlója ezen ellipszis kis és nagytengelyébe megy. Kör affin képe ellipszis (a w_{km} affin transzformáció), tehát a kör képe a baloldali ellipszis és készen vagyunk.

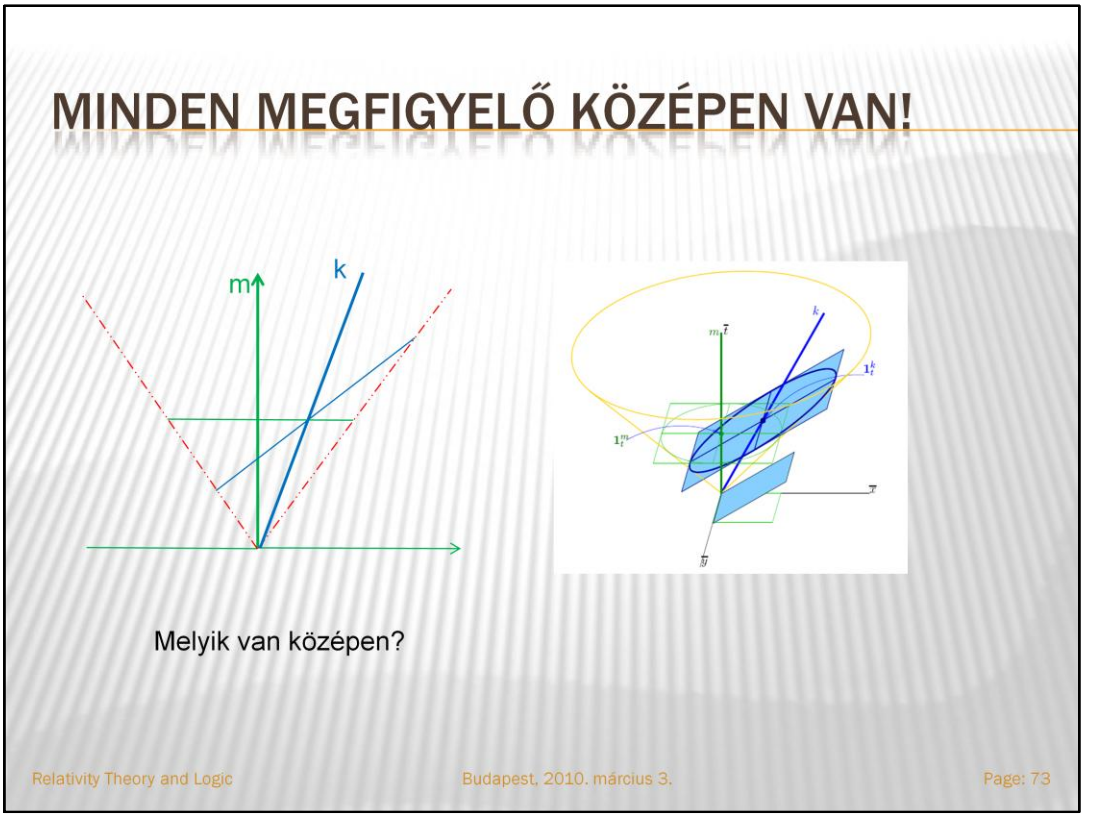
SPECREL KONZISZTENS

- Thm6 SpecRel + KisérletAx

  konzisztens, van modellje.

Bizonyitás: Megadunk egy modellt, tetszőleges Euklidészi test felett.
Legyen (Q,+,.) Euklideszi test.
A fotonok legyenek az 1 meredekségű egyenesek.
Csak egy megfigyelő van a *t* időtengely.
A megfigyelők legyenek az 1-nél kisebb meredekségű egyenesek.
A W világképreláció legyen olyan, hogy a *t* időtengely (mint megfigyelő) világképében a fotonok és megfigyelők életútjai sajátmaguk.
Legyen *m* egy tetszőleges megfigyelő, meredeksége legyen *v*.
Az *m* világképét úgy szerkesztjük meg, hogy a w_{tm} világképtrafo egy elforgatás komponálva a *v*-olló trafo legyen.
Ellenőrizhető, hogy ez teljesiti SpecRel+KisérletAx –ot.

QED

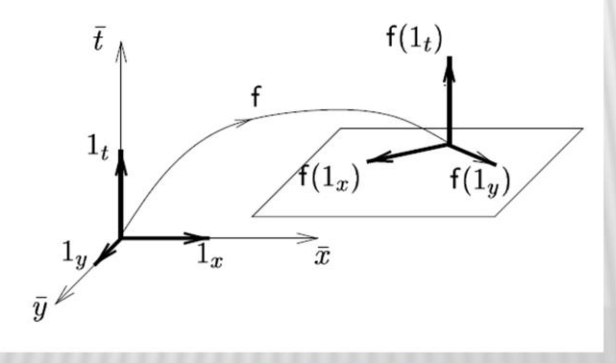


A Fényaxióma azt mondja, hogy minden megfigyelő magát a fénygömb közepének hiszi. M felvillant egy zseblámpát pontosan mikor k elhalad mellette. Ez k –nak pont ugyanolyan mintha ő gyujtotta volna meg a zseblámpát. Egyetlen táguló fénygömb van, de mindkettő azt hiszi, hogy ő van középen miközben mozognak egymáshoz képest.

M azt mondja k-nak, hogy: Te k a fénykúp szélén vagy, én középen vagyok. K visszavág: dehogyis, én vagyok középen és te vagy a fénykúp szélén! A szimultanitas pontosan annyira dől be, hogy k közepen legyen. Az időegységet pontosan annyira kell feljebb tolni, hogy az y iranyú metszet a fénykúppal 1 legyen. K úgy választja meg az x irányú egységeit, hogy az ellipszis nagytengelyét ugyanannyinak mérje mint a kistengelyt.

SPECREL MODELLJEI

- Definició:
  - Az f transzformációt **tér-izo** transzformációnak nevezzük, ha az x,y,z altéren egybevágóság, és a t időtengelyen eltolás esetleg tükrözéssel komponálva.



SPECREL VILÁGKÉPTRANSZFORMÁCIÓI

- A Thm.6-ban megadott modell lényegében az egyetlen modellje SpecRel –nek, variációktól eltekintve.
- Miben lehet eltérni a fenti modelltől?

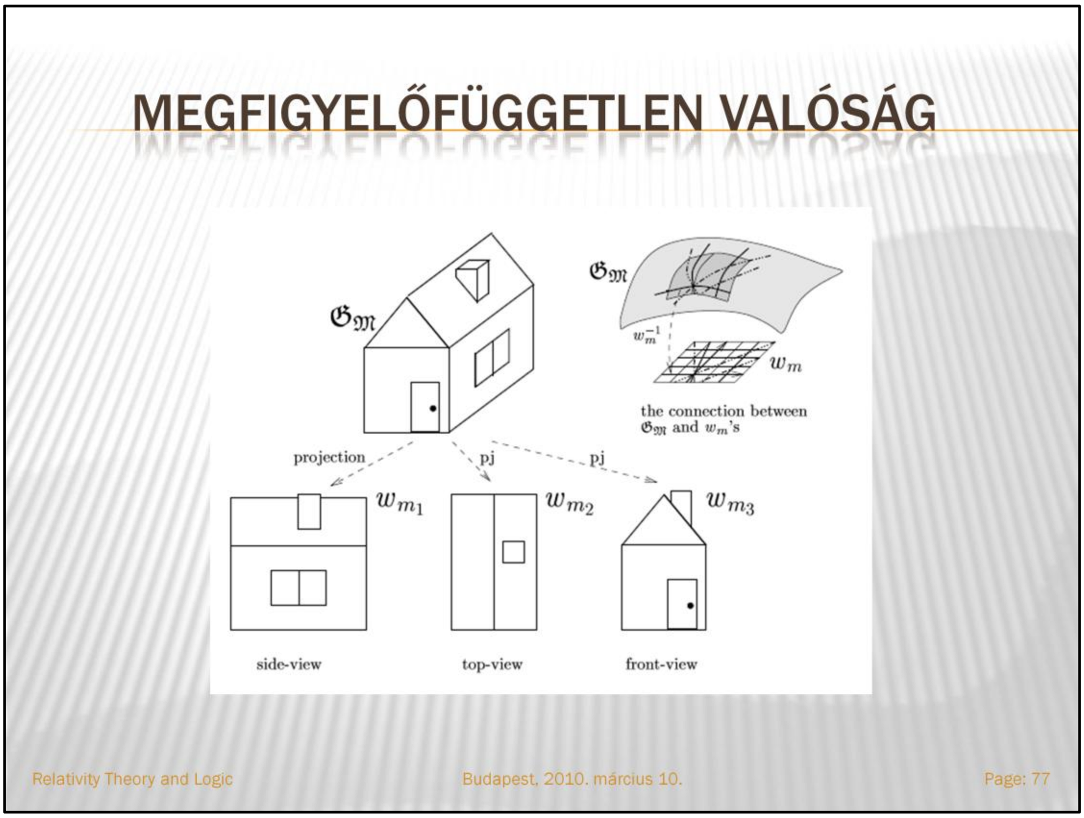
- Thm7 SpecRel modelljeinek világképtranszformációi pontosan a
  tér-izo komponálva
  olló-trafo komponálva
  tér-izo alakú függvények.

SPECREL_0 VILÁGKÉPTRANSZFORMÁCIÓI

Definició. Legyen g automorfizmusa a (Q,+,.) testnek. Ez indukál egy természetes bijekciót Q^4 –en, úgy hogy a (t,x,y,z) koordinátapontot a (gt,gx,gy,gz) koordinátapontba viszi. Ezeket a függvényeket test-automorfizmus-indukálta bijekcióknak hivjuk.

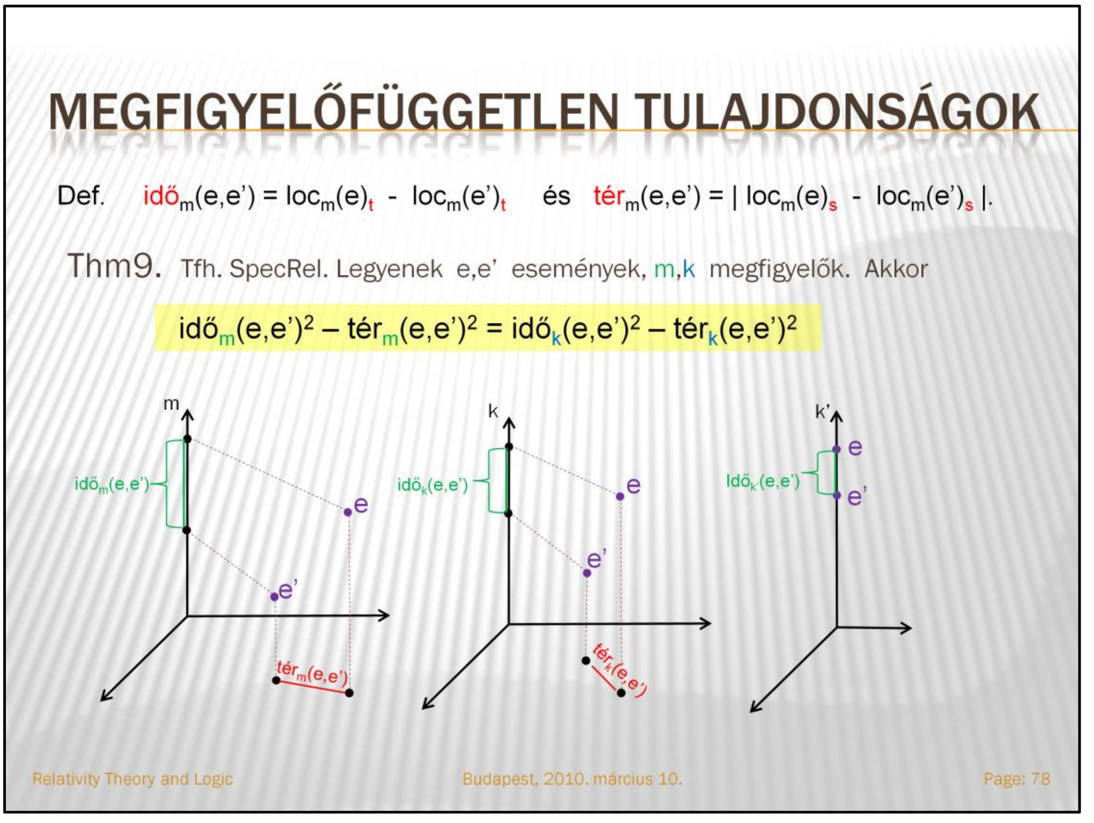
- Thm8 SpecRel_0 + c>0 modelljeinek világképtranszformációi pontosan a
  tér-izo komponálva
  olló-trafo komponálva
  nagyitás komponálva
  automorfizmus-indukálta bijekció komponálva
  tér-izo alakú függvények.

Ezeket az automorfizmusokat lehet arra használni, hogy pl. azt bizonyitsuk, hogy SpecRel_0 –ból nem következik, hogy $v_m(k)=v_k(m)$.



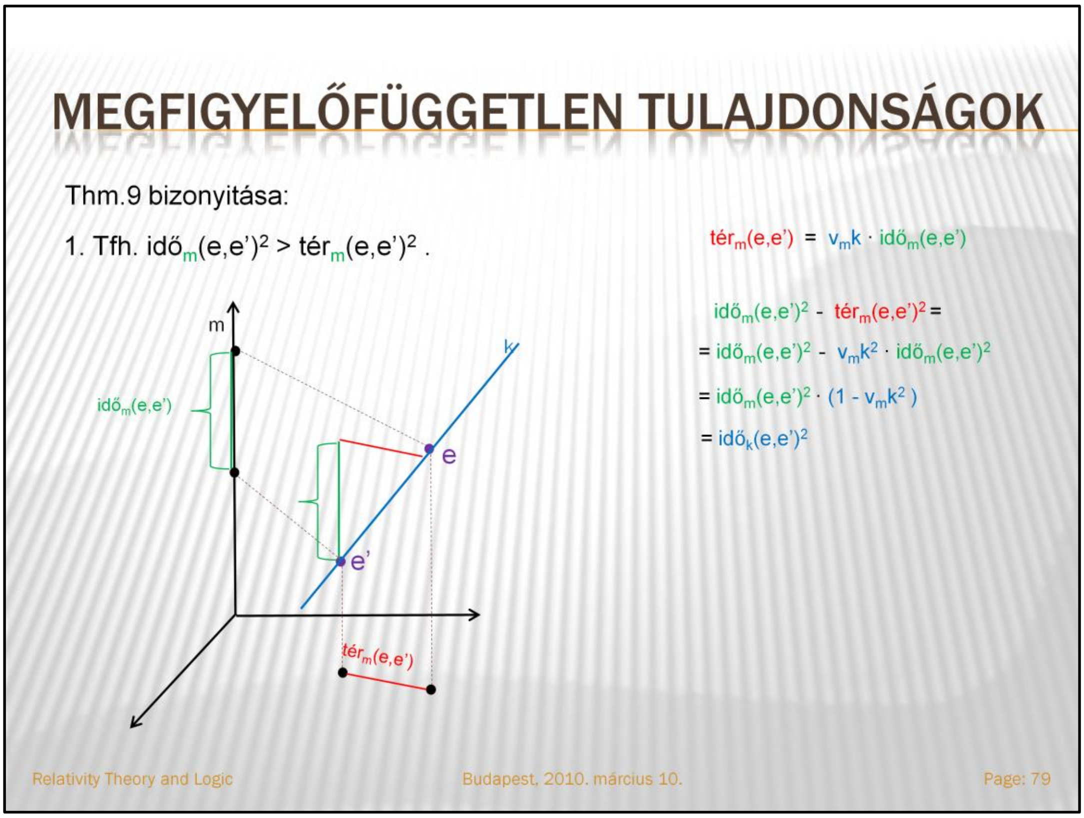
Láttuk newtoni kinematikában, hogy két esemény közt eltelt időt egyformán látja mindenki (megfigyelőfüggetlen, abszolút), de köztük való tértávolság megfigyelőfüggő. Aztán láttuk, hogy SpecRelben két esemény közt eltelt idő is megfigyelőfüggő és ünnepeltük, hogy SpecRel mennyire szimmetrikusabb mint a newtoni kinematika. Miért örülünk annak, hogy mostmár semmit sem látnak egyformán a megfigyelők? Nihilisták vagyunk tán? Ó nem, van itt rend, nagyonis.

A mai alkalmat e szép új rend felfedezésének szenteljük. Keressük azt a megfigyelőfüggetlen valóságot, aminek vetületei az egyes megfigyelők világképei. Analógia ábrázoló geometriával. E szép új rendet úgy hivják, hogy relativisztikus geometria (vagy Minkowski geometria), ez az a megfigyelőfüggetlen valóság, amit minden megfigyelő egyformán lát. Látni fogjuk, hogy ez a geometriai elmélet ekvivalens (a matematikai logikai értelemben) a mi SpecRel elméletünkkel.



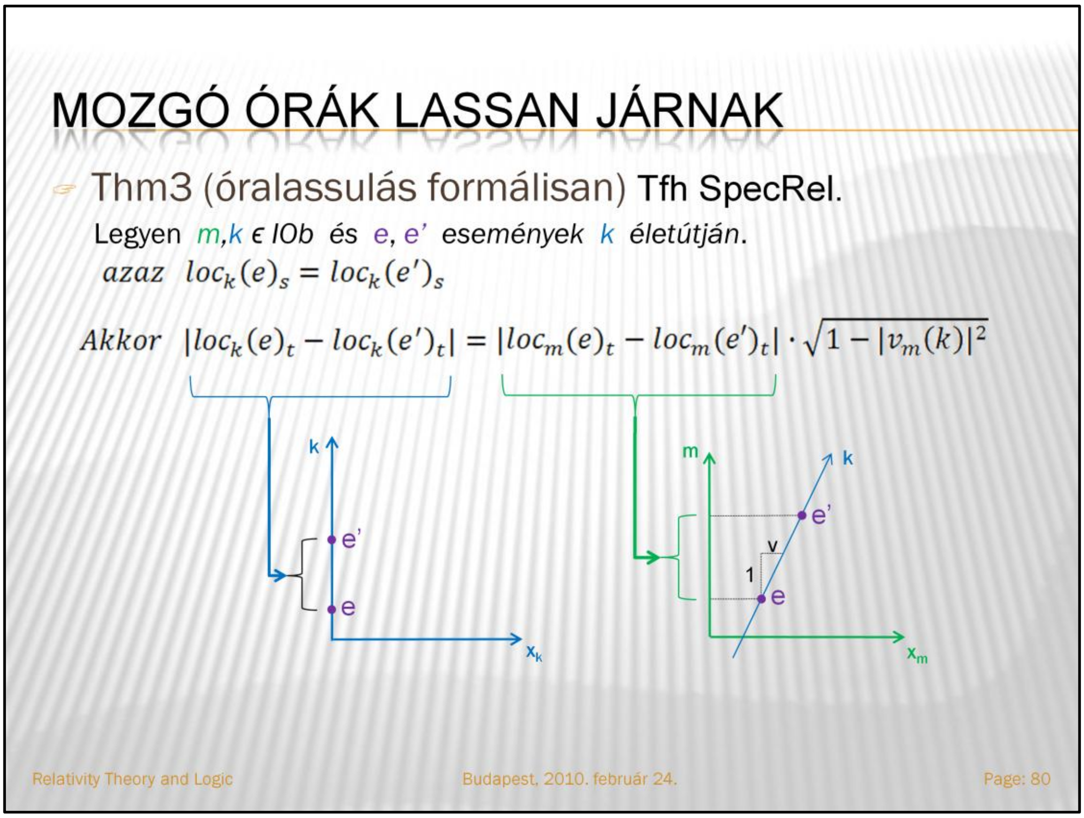
Az első tételünk azt mondja, hogy ha az időtávolságot és tértávolságot nem is látják a megfigyelők egyformán, e kettőnek van egy keveréke, amit egyformán látnak. Ha m nagyobb teret mér e,e' között, akkor több időt is mér. E,e'-n áthaladó megfigyelő méri a legkevesebb időt, mert neki tér(e,e')=0. E tételből következik a NoFTL tétel, és az időlassulás tétele is. Sőt, a fotonaxióma egy részét is mondja (azaz, hogy $v_m(ph)=1$ mindenkinek ha valakinek).

Kovariáns mennyiségeknek is hivják az ilyeneket.



Legyen k megfigyelő, akinek életútján van az e és e' . Nem tettük fel a KisérletAx –ot, de minden modellt ki lehet terjeszteni tetszőleges megfigyelőkkel, tehát terjesszük ki a modellt ilyen k megfigyelővel. Az új modellben m világképében e,e' helye nem változik, és a modellben igaz SpecRel. Emiatt lehet általában feltenni, hogy a KisérletAx igaz.

$\text{Idő}_m(e,e')^2 > \text{Tér}_m(e,e')^2$ azt jelenti, hogy van k megfigyelő akinek életútján van e és e', és e megfigyelő pontosan gyök($\text{Idő}_m(e,e')^2 - \text{Tér}_m(e,e')^2$) időt mér e két esemény között. Ezért látja minden m megfigyelő ezt az $\text{Idő}_m(e,e')^2 - \text{Tér}_m(e,e')^2$ mennyiséget egyformának.

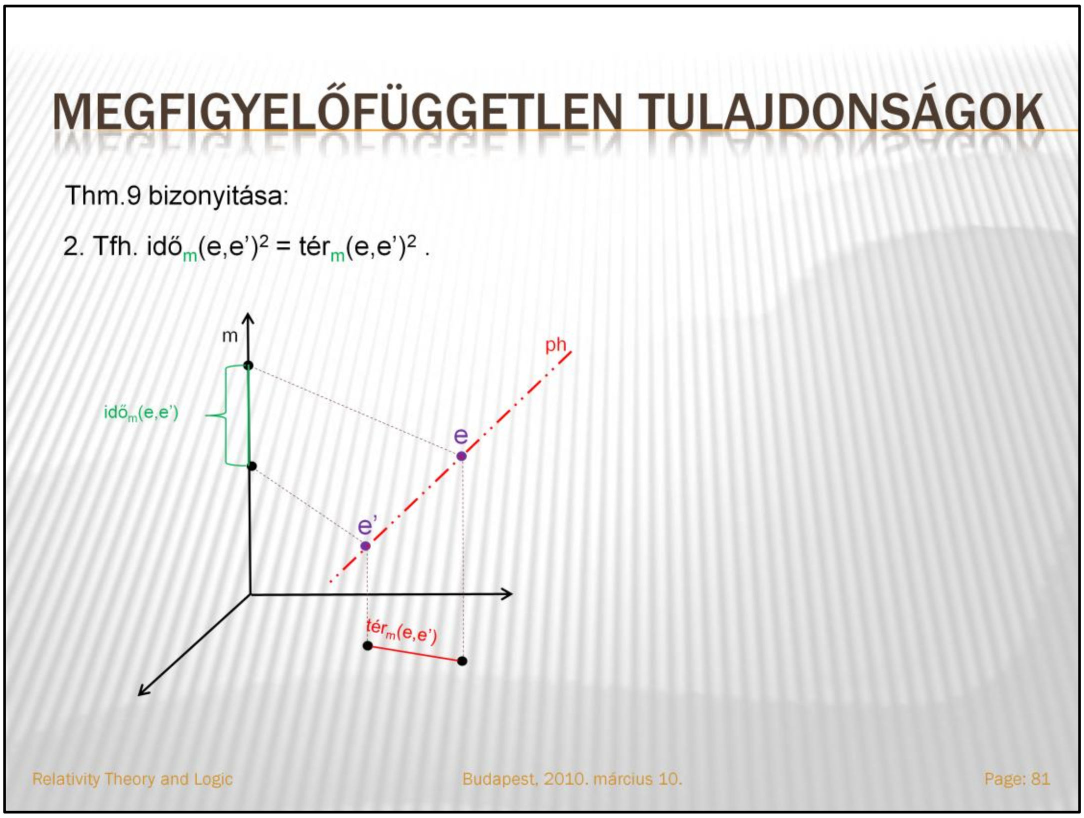


Az eredeti óralassulás tétel kimondását idemásoltuk.

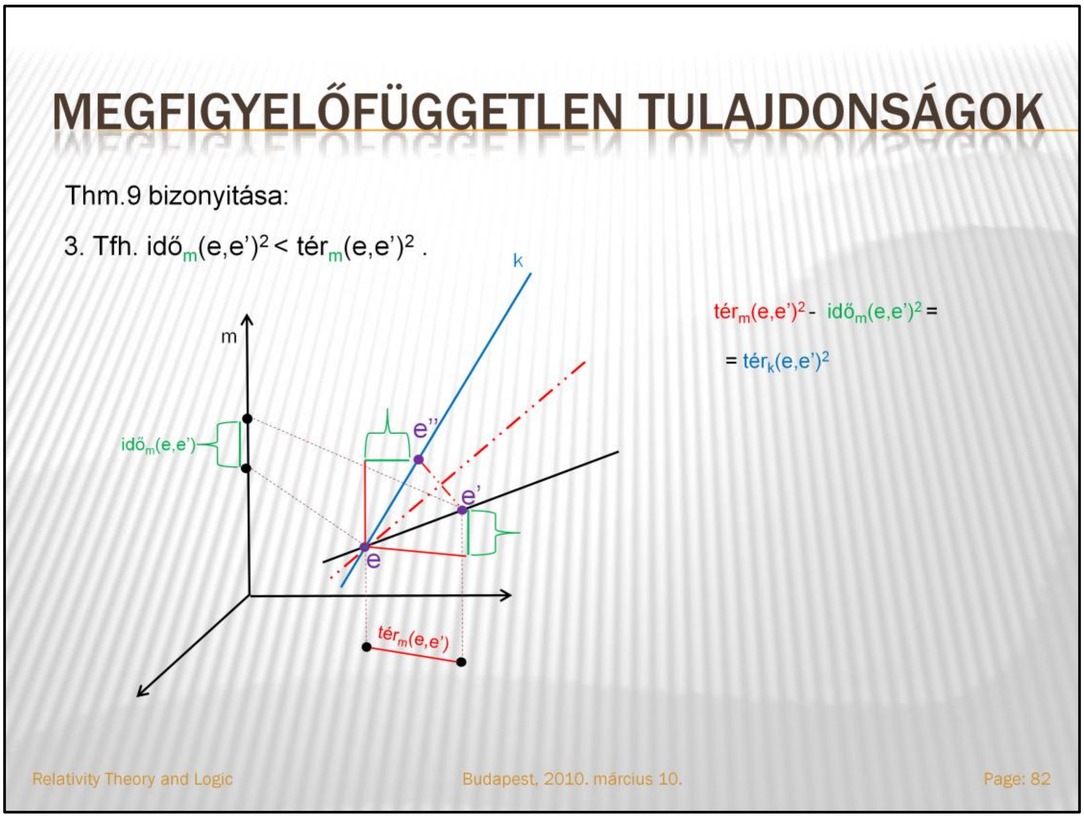
Órák lelassulása. Angolul time dilatation. Pontosabban megfogalmazva: mozgó óra lassabban jár mint az álló. Állónak hívjuk azt az űrhajót, akinek a világképébe éppen beleköltöztünk. Sarkosabban: mozgás hatására az órák lelassulnak. (Látni fogjuk később, hogy gyorsulás folyamán az órák hogyan lassulnak le.)

Ami a v sebességgel mozgó órán T ideig tart, az az álló megfigyelő szerint (T osztva gyök 1-vnégyzet) ideig tart, ami nagyobb T-nél. A formális kimondásban T az egyenlet baloldala.

K measures less time between e and e' than m. In other words, k's clocks tick slowly as m observes them. This is called relativistic time dilation.



Ebben az esetben van foton akinek életútján van e,e', és akkor minden más k megfigyelő világképében is foton köti össze e,e' –t, tehát AxPh miatt nekik is egyenlő a két mennyiség ($Idő_k(e,e')^2$ és $Tér_k(e,e')^2$).



Nincs k megfigyelő, akinek életútján van az e és e' . Viszont van k megfigyelő, akinek e és e' egyidejű, és ennyi tértávolságot mér. Nem tettük fel a KisérletAx –ot, de minden modellt ki lehet terjeszteni tetszőleges megfigyelőkkel, tehát terjesszük ki a modellt ilyen k megfigyelővel. Az új modellben m világképében e,e' helye nem változik, és a modellben igaz SpecRel. Emiatt lehet általában feltenni, hogy a KisérletAx igaz.

RELATIVISZTIKUS TÁVOLSÁG DEFINICIÓJA

Definició. Legyen (Q,+,·) egy Euklidészi test. Definiáljuk a
$\mu : Q^4 \times Q^4 \to Q$ függvényt a következőképpen

$$\mu(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sqrt{(p_t - q_t)^2 - |p_s - q_s|^2} & ha \quad (p_t - q_t)^2 > |p_s - q_s|^2 \\ 0 & ha \quad (p_t - q_t)^2 = |p_s - q_s|^2 \\ -\sqrt{|p_s - q_s|^2 - (p_t - q_t)^2} & ha \quad (p_t - q_t)^2 < |p_s - q_s|^2 \end{cases}$$

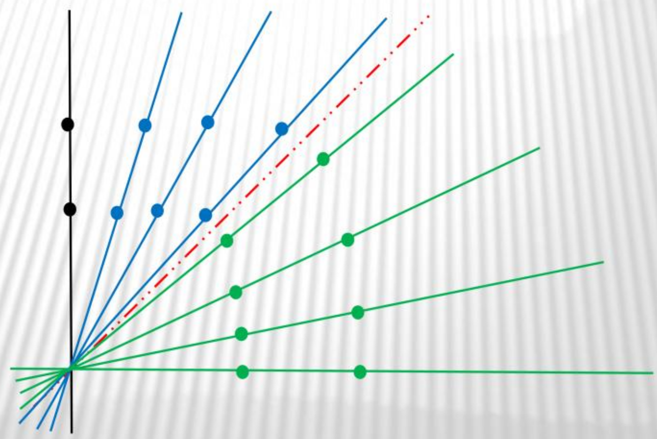
Időszerűen, fényszerűen, térszerűen szeparált pontok

Relativity Theory and Logic Budapest, 2010. március 10. Page: 83

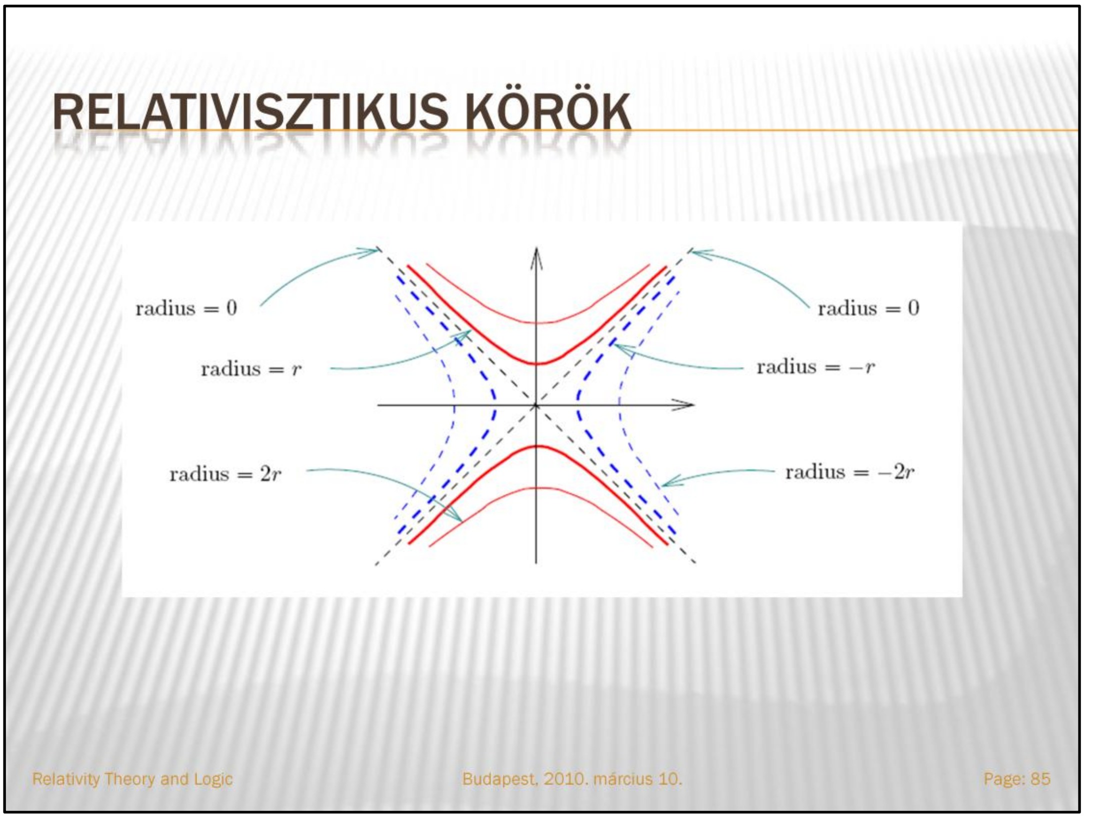
Látni fogjuk, hogy egy bizonyos értelemben ez az egyetlen tulajdonság, amit minden megfigyelő egyformán lát, minden más megfigyelőfüggetlen tulajdonság definiálható lesz ebből.

RELATIVISZTIKUS TÁVOLSÁG

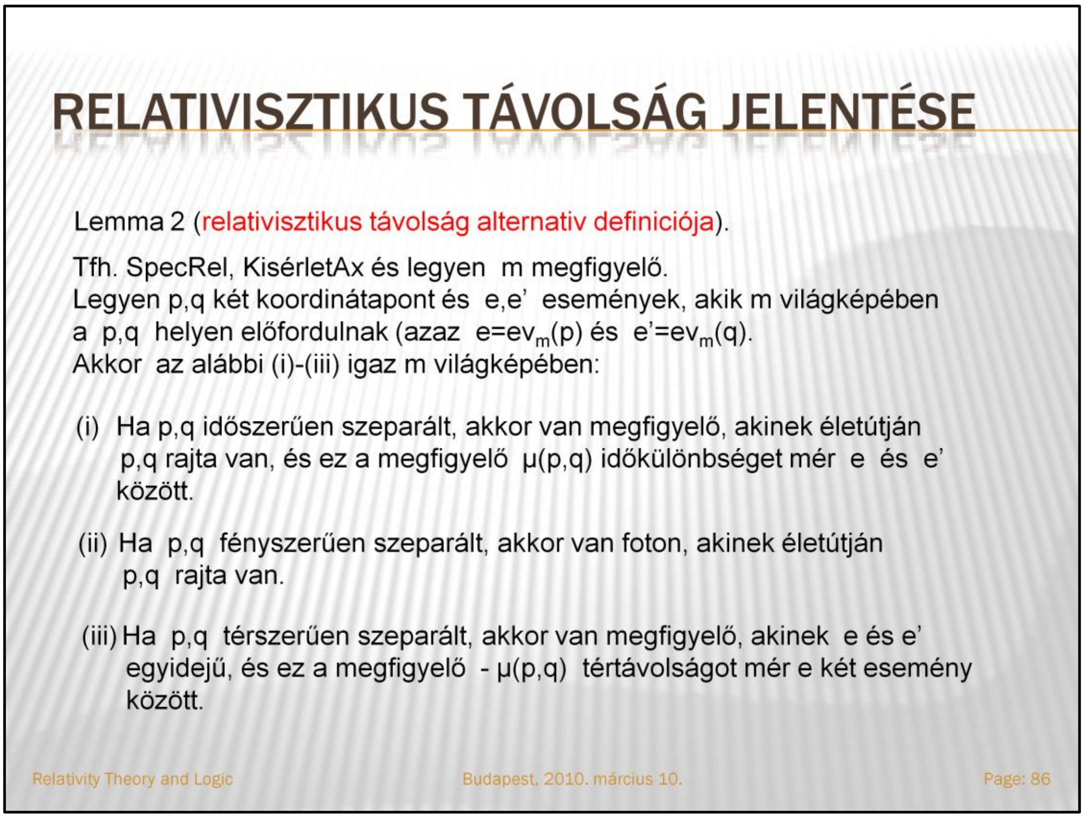
$$\mu(p,q) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sqrt{(p_t - q_t)^2 - |p_s - q_s|^2} & ha \quad (p_t - q_t)^2 \geq |p_s - q_s|^2 \\ 0 & ha \quad (p_t - q_t)^2 = |p_s - q_s|^2 \\ -\sqrt{|p_s - q_s|^2 - (p_t - q_t)^2} & ha \quad (p_t - q_t)^2 \leq |p_s - q_s|^2 \end{cases}$$



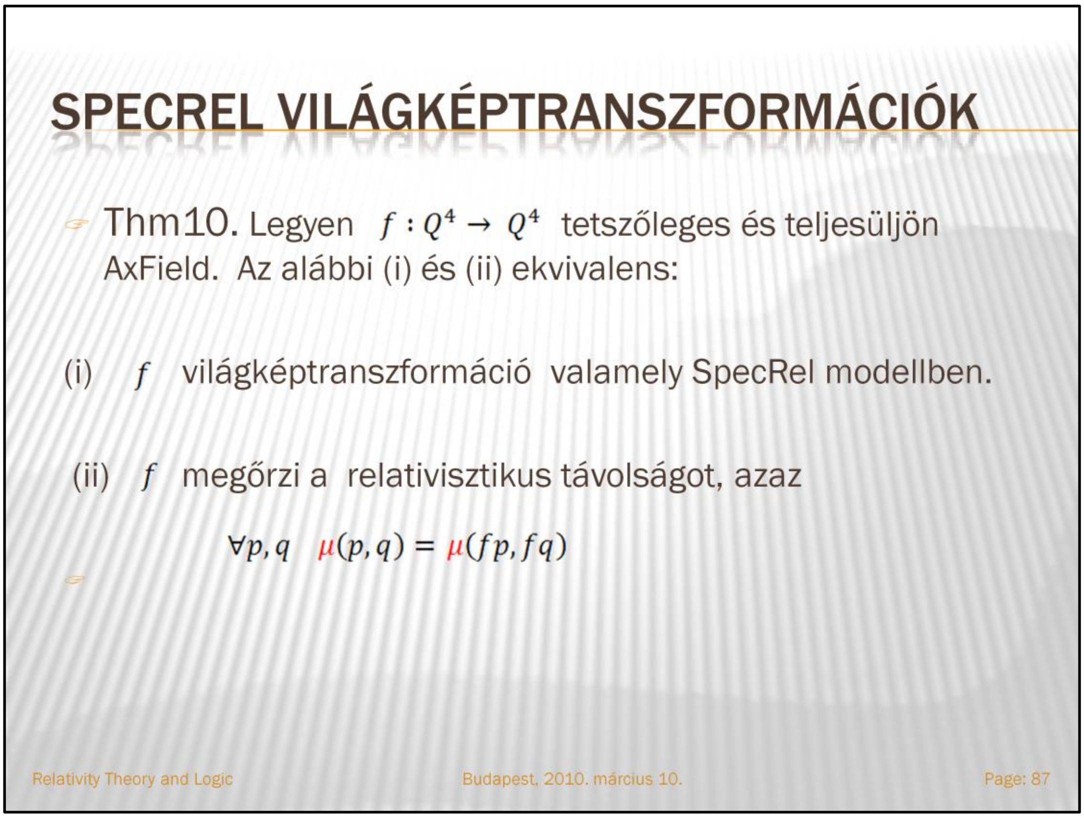
Relativisztikus távolság körüljárása, hasonlitás euklideszi távolsághoz. Függőleges egyenesen ugyanaz mint euklideszi távolság. Minél jobban van döntve az egyenes, annál kevesebb a relativisztikus távolság mint az euklideszi. 45-fokosnál már nulla. Térszerűnél ugyanigy, csak szimmetrikusan felfelé döntve.



Van távolságunk, akkor vannak köreink is. Igy néznek ki. Minél nagyobb a sugár, annál inkább egy egyenespárnak néz ki a kör.



Igy átfogalmazva nyilvánvalóan megfigyelőfüggetlen. (Persze kell tudni hozzá a paradigmatikus effektusokat.) Lemmát bizonyitottuk az előző tétel bizonyitása során.



Ez a tétel már mutatja, hogy a relativisztikus távolság és SpecRel közel vannak. Minden világképtrafora megőrzőtt tulajdonság definiálható lesz μ-ből (egyszerűsitő axiómák mellett).

THM.10 BIZONYITÁSA

1. SpecRel világképtranszformációk megőrzik a relativisztikus távolságot, Lemma 2 miatt.

2. Tfh f megőrzi a relativisztikus távolságot. Először bizonyitjuk, hogy akkor f bijekció, 5 lépésben:

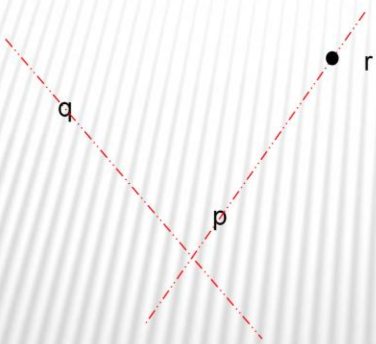
a) f egy-egyértelmű.
b) Időszerű egyenest időszerű egyenesre visz.
c) Térszerű egyenest térszerű egyenesre visz.
d) Sikot sikra visz.
e) f értékkészlete az egész Q^4.

Aztán konstruálunk egy SpecRel modellt, amiben f világképtrafo.

THM.10 BIZONYITÁSA

a) f egy-egyértelmű:

Legyen p,q különböző. Van r, hogy $\mu(p,r) = 0$ és $\mu(q,r) \neq 0$:

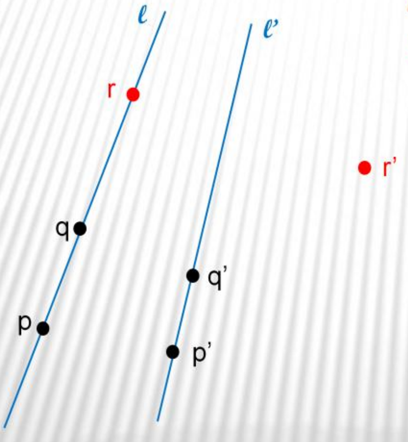


Vegyünk egy álló sikot, ami tartalmazza p,q –t. Ebben minden ponton pontosan két fényegyenes megy át. Vegyünk p-n és q-n átmenő nem párhuzamos két fényegyenest, és legyen r a p-n átmenő fényegyenesen olyan pont, ami nem a két fényegyenes metszéspontja. Akkor r fényszerűen szeparált p-től de nem q-tól (mert nincs nem-elfajuló fényháromszög). Igy f(r) fényszerűen szeparált f(p) –től és nem fényszerűen szeparált f(q) –tól , tehát f(p) nem lehet egyenlő f(q)-val.

THM.10 BIZONYITÁSA

b) Időszerű egyenest időszerű egyenesre visz.

$$\mu(p,q) + \mu(q,r) = \mu(p,r)$$
$$\mu(p',q') + \mu(q',r') = \mu(p',r')$$



THM.10 BIZONYITÁSA, LEMMA3

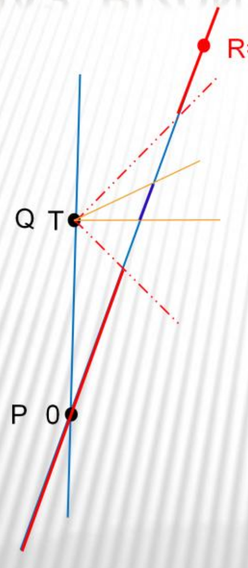
Lemma 3. Legyen p,q,r olyan, hogy bármely kettő közülük időszerűen szeparált (tehát pq, pr, és qr időszerűen szeparált). Tegyük fel továbbá, hogy μ(p,q), μ(p,r), és μ(q,r) közül valamelyik a másik kettő összege. Akkor p,q,r egy egyenesen van.

Bizonyitás: A tér-izo és olló-trafok megőrzik a μ relativisztikus távolságot, mert Thm.7 szerint SpecRel modellben világképtrafok, amikről láttuk már, hogy megőrzik μ-t. Ugyanezek megőrzik az egy egyenesen lenni tulajdonságot is, mert affin transzformációk. Tér-izo és olló-trafo inverze is tér-izo illetve olló-trafo. Tfh. μ(p,q)=μ(p,r)+μ(r,q). Mivel p,q,r -ek időszerűen szeparáltak, tér-izo és olló-trafok komponálásával p,q,r bevihető a tx-sikba úgy, hogy ha P,Q,R a képeik a tx-sikban, akkor P az origo, és Q az időtengelyen van.
Elég P,Q,R –ről látni, hogy egy egyenesen van. Tudjuk, hogy
P az origo, és μ(P,Q)=μ(P,R)+μ(R,Q), tehát
μ(P,Q) > μ(P,R), μ(P,Q) > μ(R,Q), legyen
Q=(T,0,0,0), és
R=(t,tv,0,0).

Gyakorlat: Bizonyitsuk, hogy az olló-trafok nem őrzik meg az időkoordinátákon a rendezést.

Eltolással elérhető, hogy p az origo. Forgatással elérhető, hogy q a tx sikban legyen. Mivel pq időszerű, olló-trafoval elérhető, hogy q az időtengelyen legyen. Mindez alatt p maradt az origóban. Most mégegy forgatással elérhető, hogy r a tx-sikban legyen. Ezalatt p,q maradt a helyén mert a t tengelyen voltak és forgatást alkalmaztunk.

LEMMA3 BIZONYITÁSA



$\mu(P,Q)=\mu(P,R)+\mu(R,Q)$.

Q,R időszerűen szeparált

$|t-T| > tv$. Ha $t>T$, akkor

$t > T+tv$,

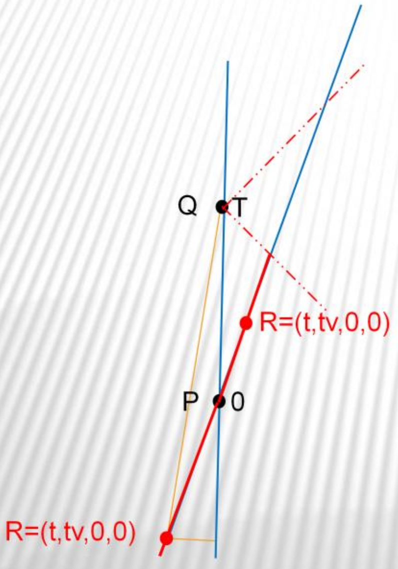
$t^2 > T^2+t^2v^2+2Ttv$,

$t^2 - t^2v^2 > T^2$,

$\mu(P,R) > \mu(P,Q)$.

Tehát $t<T$.

LEMMA3 BIZONYITÁSA



μ(P,Q)=μ(P,R)+μ(R,Q).

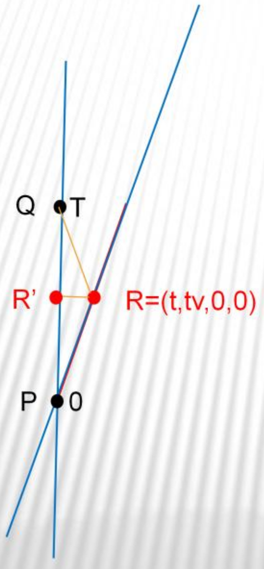
Ha t < 0 , akkor

μ(R,Q) > μ(P,Q) , mert

$(t+T)^2-t^2v^2 > T^2$.

Tehát 0 < t < T.

LEMMA3 BIZONYITÁSA



$\mu(P,Q)=\mu(P,R)+\mu(R,Q)$.

$0 < t < T$.

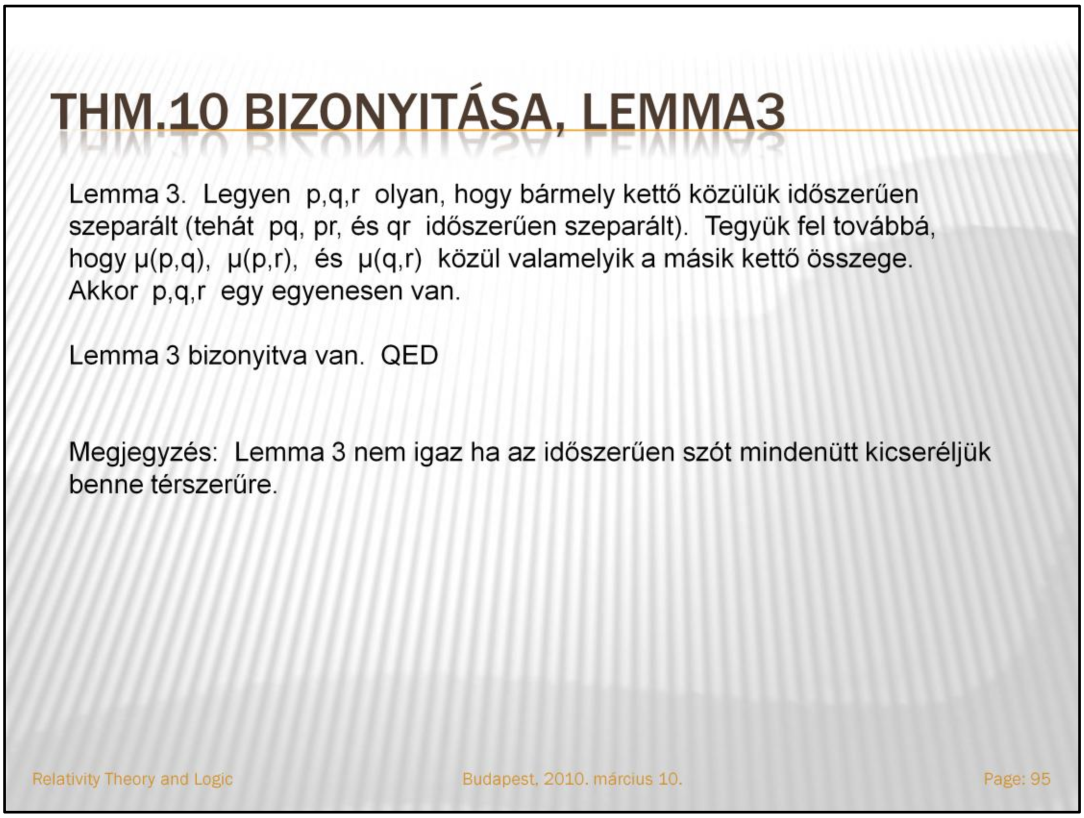
$\mu(P,R') > \mu(P,R)$,

$\mu(R',Q) > \mu(R,Q)$,

$\mu(P,Q) > \mu(P,R)+\mu(R,Q)$.

Ellentmondás, tehát
P,Q,R egy egyenesen van.

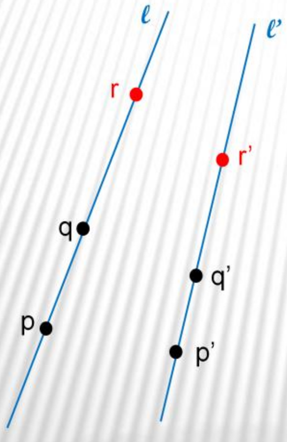
QED(Lemma 3)



Gyakorlat: Bizonyitsuk, hogy az olló-trafok nem őrzik meg az időkoordinátákon a rendezést.

THM.10 BIZONYITÁSA

b) Időszerű egyenest időszerű egyenesre visz.



$$\mu(p,q) + \mu(q,r) = \mu(p,r)$$
$$\mu(p',q') + \mu(q',r') = \mu(p',r')$$

Tehát p',q',r' egy egyenesen van Lemma 3 szerint.

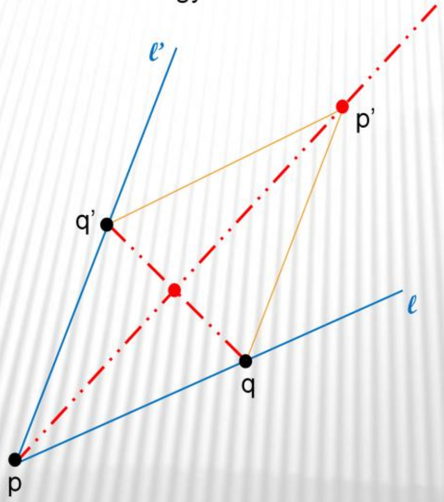
ℓ f-képe része ℓ' -nek

ℓ f-képe tartalmazza ℓ' -et

Visszatérünk a b) lépés bizonyitásához.

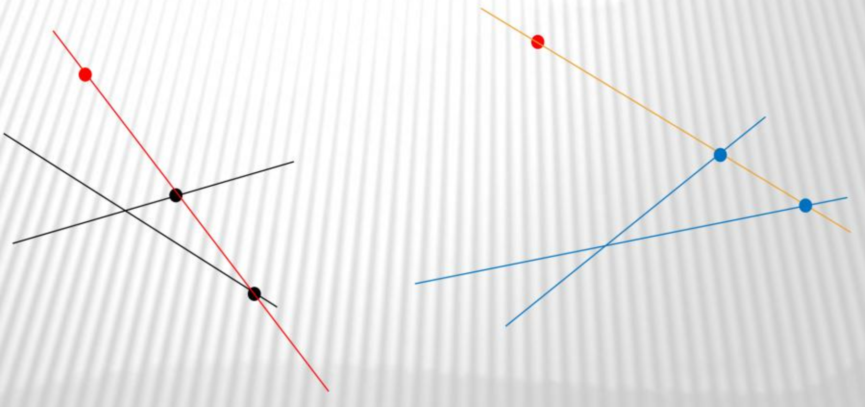
THM.10 BIZONYITÁSA

c) Térszerű egyenest térszerű egyenesre visz.



THM.10 BIZONYITÁSA

d) Sikor sikra visz: minden sikot ki lehet rakni térszerű egyenesekből.



THM.10 BIZONYITÁSA

e) f értékkészlete az egész Q^4:

f értékkészlete Q^4 -nek altere, 4-dimenziós mert f egy-egy-értelmű. Ezért maga a Q^4 .

Konstruálunk egy SpecRel modellt, amiben f világképtrafo:

Először megkonstruáljuk egyetlen m megfigyelő világképét, hogy AxField, AxSelf, AxPh teljesüljön, ez könnyű.

Aztán hozzáadunk mégegy k megfigyelőt úgy, hogy a w_{mk} világképtrafo az f legyen: m világképét egyszerűen levetitjük f –el. m világképében az új k megfigyelő életútja az időtengely f szerinti inverz képe.

Mivel f bijekció, AxEv teljesül. Mivel f fényszerű szeparáltságot megőriz, AxPh teljesül k világképében is. Mivel f relat távolságtartó, azért AxSymd is teljesül. AxSelf teljesül k világképében. QED(Thm.10)

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG

Definició. Legyen (Q,+,·) egy Euklideszi test. Definiáljuk a relativisztikus ekvi-távolság négyargumentumú relációt Q^4 –en.

$$Reqt(p,q,r,s) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mu(p,q) = \mu(r,s)$$

Megyünk tovább SpecRel_0 modelljei felé. Körző használata. Tarski Euklideszi geometria axiomatizálása.

SPECREL$_0$ VILÁGKÉPTRANSZFORMÁCIÓK

- **Thm11.** Tfh. AxField. Legyen $f : Q^4 \rightarrow Q^4$ tetszőleges. Az alábbi (i) - (iv) ekvivalens:

  (i) f világképtranszformáció valamely SpecRel$_0$ modellben ahol c nemnulla

  (ii) f megőrzi a fényszerű szeparáltságot és ráképezés

  (iii) f megőrzi a fényszerű szeparáltságot és bijekció

  (iv) f megőrzi a relativisztikus ekvi-távolságot és ráképezés

A ráképezés feltétel (ii)-ben szükséges. Nem tudjuk, hogy (iv)-ben szükséges-e.

DEFINIÁLHATÓSÁG

Legyen L az az elsőrendű nyelv, amelynek alapfogalmai a fényszerű szeparáltság F(x,y) és az egyenlőség x=y, ahol x,y változójelek. L tehát ezekből a *nem*, *és*, valamint *van olyan x* mondattani kapcsolókkal felirt mondatokból áll.

Azt mondjuk, hogy koordinátapontok valamely T(x,y,z,w,…) tulajdonsága **kifejezhető a fényszerű szeparáltságból**, ha van olyan φ(x,y,z,w,…) formula L-ben, hogy minden Euklideszi (Q,+,·) testre igaz, hogy minden p,q,r,s,… koordinátapontra igaz (Q,+,·) -ban, hogy

$$\varphi(p,q,r,s,\ldots) \leftrightarrow T(p,q,r,s,\ldots)$$

Felvesszük azt a fonalat, amit az első órán elkezdtünk a NoFTL bizonyitásával, majd az Alexandrov tétellel folytattunk. Azt fogjuk látni, hogy a fényszerű szeparáltságból minden, még a test műveletek is majd mind definiálhatók. Persze a relativisztikus távolság nem definiálható. Biz. Gyakorlat.

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG DEFHÓ

Thm.12. A relativisztikus ekvi-távolság négyargumentumú reláció definiálható a fényszerű szeparáltságból.

Bizonyitás:

Hamarabb láttuk már, hogy a következő tulajdonságok definiálhatók a fényszerű szeparáltságból:

Egy egyenesen lenni Coll(p,q,r)

Időszerű szeparáltság Idősz(p,q)

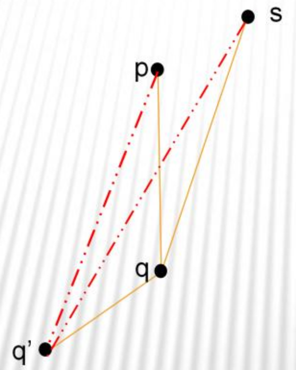
Térszerű szeparáltság Térsz(p,q)

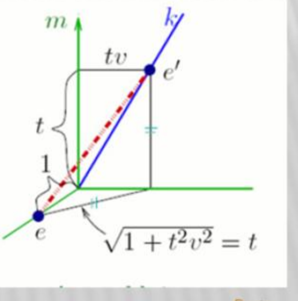
Fényszerű egyenesnek lenni

Párhuzamos egyenesnek lenni, egy sikban lenni, stb

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG DEF

1.) Kifejezzük, hogy Reqt(p,q,q,s) ahol pq időszerű:





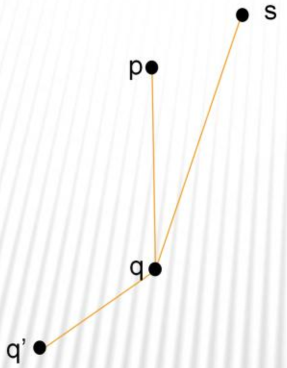
Először az időlassulás tétel bizonyitását használjuk:

Van q', hogy q'q merőleges a pqs sikra, és q'p, q's fényszerűen szeparáltak.

Megint lépésekben bizonyitunk.

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG DEF

Kifejezzük, hogy Reqt(p,q,q,s) ahol pq időszerű:



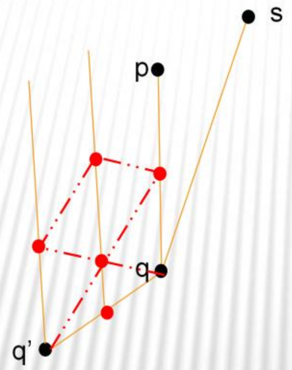
Hogyan fejezzük ki, hogy q’q merőleges a pqs sikra?

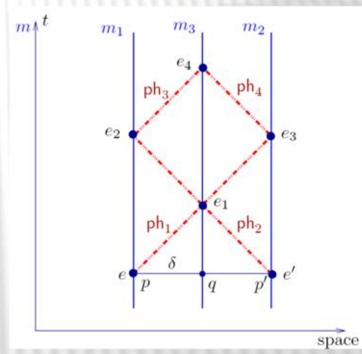
Most az Aszinkron tétel második részének bizonyitását használjuk:

q’q merőleges a pqs sikra, ha mind a pq mind az sq megfigyelők szerint egyidejűek

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG DEF

Kifejezzük, hogy Reqt(p,q,q,s) ahol pq időszerű:



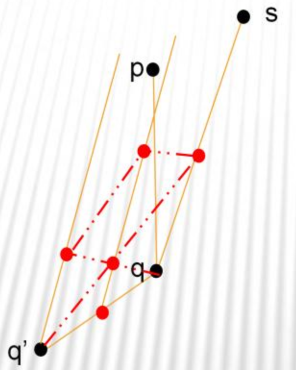


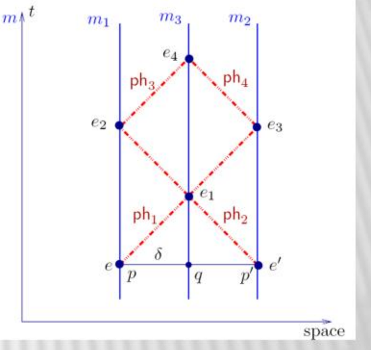
Hgyan fejezzük ki, hogy q'q egyidejűek a pq megfigyelő szerint?

Van l_1, l_2 egyenes aki parhuzamos a pq-val, es van $ph_1,\ldots,ph_4$ fényegyenes, és van $r_1,\ldots,r_5$ pont, hogy …

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG DEF

Kifejezzük, hogy Reqt(p,q,q,s) ahol pq időszerű:

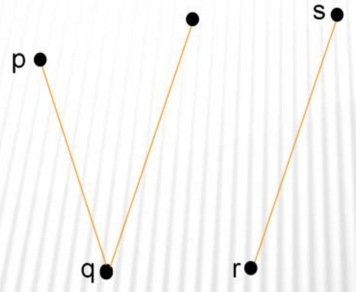




És q'q egyidejűek a ps megfigyelő szerint.

RELATIVISZTIKUS EKVI-TÁVOLSÁG DEF

3) Kifejezzük, hogy Reqt(p,q,r,s) ahol pq időszerű:

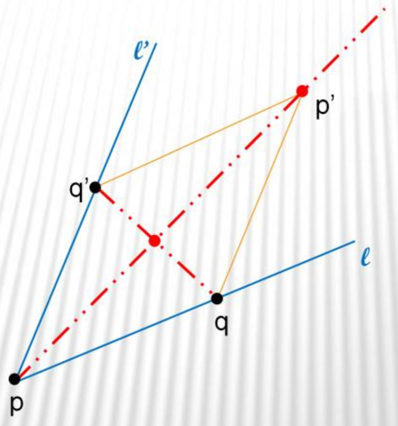


4) Kifejezzük, hogy Reqt(p,q,r,s) ahol pq térszerű:

Visszevezetni időszerű ekvi-távolságra:

THM.12 BIZONYITÁSA

Visszevezetés időszerű ekvi-távolságra:

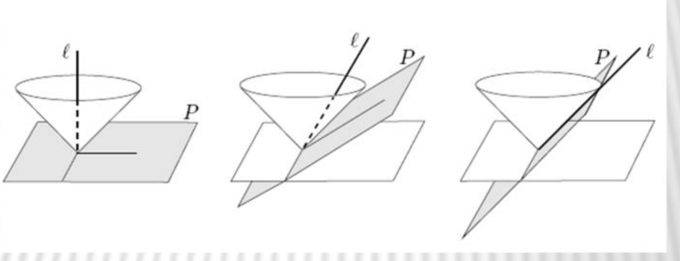


QED(Thm.12)

Minden pq térszerűen szeparált pontpárhoz igy lehet definiálni egy pq' pontpárt, ahol pq' időszerűen szeparált és ugyanaz a pq távolság abszolút értéke mint pq' -é.

RELATIVISZTIKUS MERŐLEGESSÉG

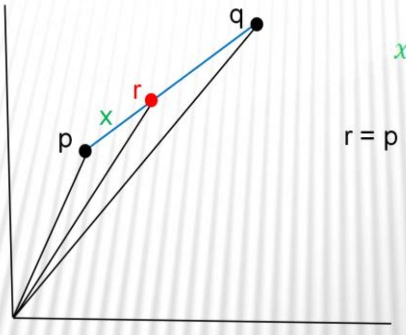
Mi más definiálható még?



Relativisztikus merőlegesség definiciója equi-távolsággal.

KÖZTESSÉG (BETWEENNESS) DEFINICIÓJA

Bw(p,r,q) azt jelenti, hogy p,r,q egy egyenesen van és r a p és q között helyezkedik el.



$$x = \frac{|pr|}{|pq|}$$

r = p + x(q-p) = xq + (1-x)p.

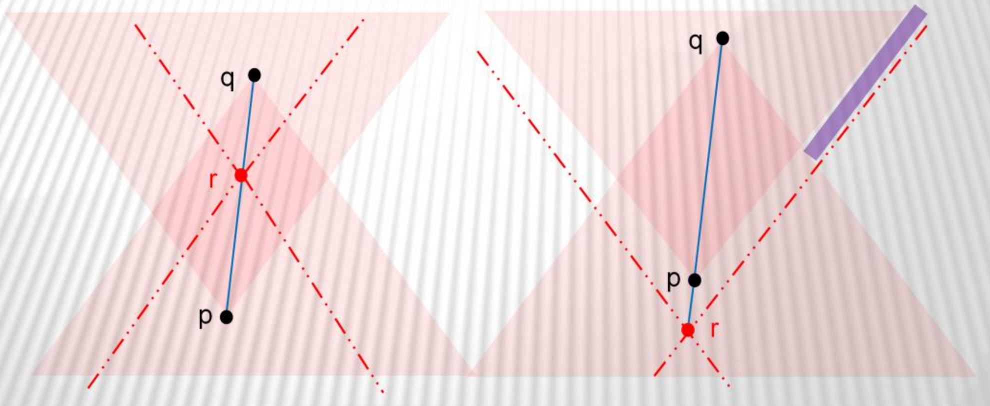
Koordinátás definició:

$$Bw(p,r,q) \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists x(0 \leq x \leq 1 \;\; \wedge \;\; r = xp + (1-x)q)$$

KÖZTESSÉG DEFINICIÓJA FÉNYSZERŰ SZEP.BÓL

1. Ha p,r,q időszerű egyenesen van:

$$Bw_t(p,r,q) \overset{def}{\Longleftrightarrow} Col(p,r,q) \wedge \forall w\big(r\tau w \rightarrow (p\tau w \ \ vagy \ \ q\tau w)\big)$$

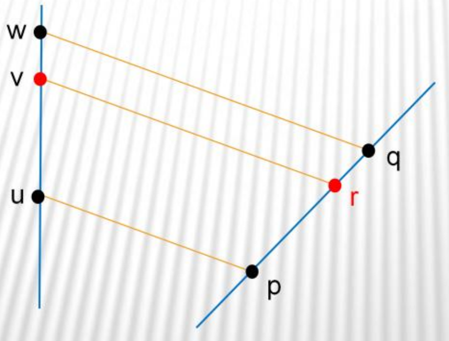


$p\tau w$ azt jelenti, hogy p és w időszerűen szeparált

KÖZTESSÉG DEFINICIÓJA FÉNYSZERŰ SZEP.BÓL

2. Köztesség megmarad párhuzamos vetitésre:

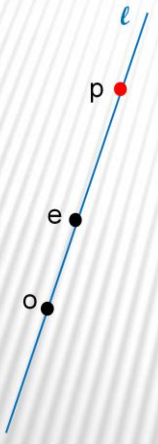
$$Bw(p,r,q) \overset{def}{\Longleftrightarrow} Col(p,r,q) \wedge \exists uvw(Bw_t(u,v,w) \wedge pu \parallel rv \parallel qw)$$



Félegyenes definiciója:

HILBERT-FÉLE KOORDINATIZÁCIÓ

Minden egyenesen két különböző pontot kijelölve „ott van (visszanyerhető)" a test:



Test alaphalmaza ℓ

Intuitiven:

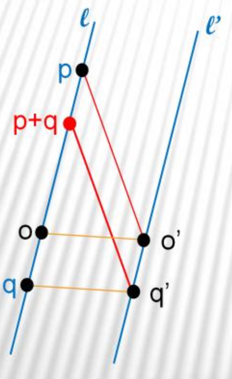
p = |po|/|eo| ha Bw(o,e,p) vagy Bw(o,p,e) és

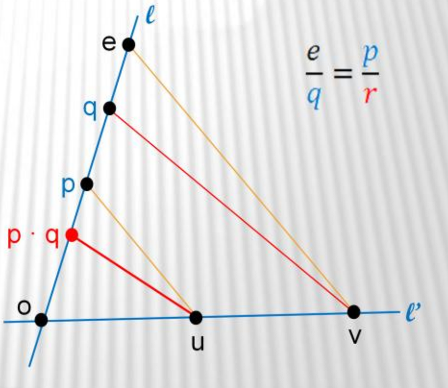
p = - |po|/|eo| egyébként.

HILBERT-FÉLE KOORDINATIZÁCIÓ

Összeadás: $p + q = r \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \boldsymbol{l}' \parallel \boldsymbol{l}\ \exists o'q' \in \boldsymbol{l}' (oo' \parallel qq' \wedge po' \parallel rq')$

Szorzás: $p \cdot q = r \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists \boldsymbol{l}'\ \exists uv \in \boldsymbol{l}'\ (\boldsymbol{l}' \cap \boldsymbol{l} = \{o\} \wedge ev \parallel pu \wedge qv \parallel ru)$





$$\frac{e}{q} = \frac{p}{r}$$

PARAMÉTEREK NÉLKÜL

Intuitive, a mennyiségek a pontok közti távolságok. Ezeket a távolságokat a pontpárokon az ekvi-távolság ekvivalenciareláció blokkjaival reprezentáljuk.

$pq \equiv rs \overset{def}{\Longleftrightarrow} Reqt(p,q,r,s)$

$T \overset{\text{def}}{\equiv} Q^4 \times Q^4/_{\equiv}$

$F = pp/_{\equiv}$ akármelyik p - re. F lesz a testünk 0-ja.

Pozitiv elemek lesznek: $\{\ pq/_{\equiv}\ :\ pq$ időszerűen szeparált $\}$

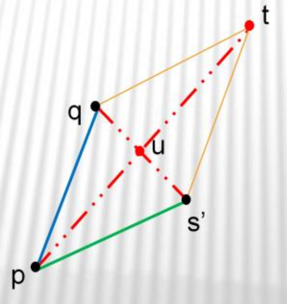
Negativ elemek lesznek: $\{\ pq/_{\equiv}\ :\ pq$ térszerűen szeparált $\}$

NEGÁCIÓ

Pozitiv és negativ számok közötti bijekció az „ellentettnek lenni” ~ reláció:

$$pq/_{\equiv} \sim rs/_{\equiv} \overset{def}{\iff} \exists s'tu \quad ps' \equiv rs \land$$

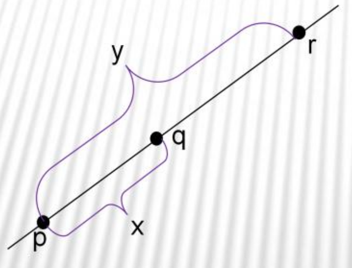
$$pq \parallel s't \land ps' \parallel qt \land Col(p,u,t) \land Col(s',u,q) \land F(p,t) \land F(q,s')$$



ABSZOLÚT ÉRTÉKEK ÖSSZEHASONLITÁSA

|x| definiciója: |x|=x ha x nemnegativ, és |x|= ~ x ha x negativ.

$|x| < |y| \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists pqr\, Bw(p,q,r) \wedge pq \in |x| \wedge pr \in |y|$

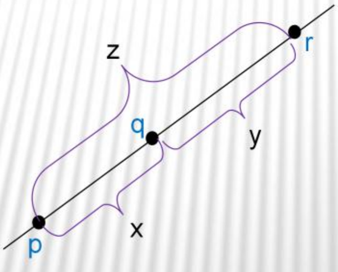


ÖSSZEADÁS

$x + y = z$:

Ha x,y nemnegativ vagy x,y nempozitiv:

$\exists pqr\ Bw(p,q,r) \wedge pq \in x\ \wedge qr \in y \wedge pr \in z$

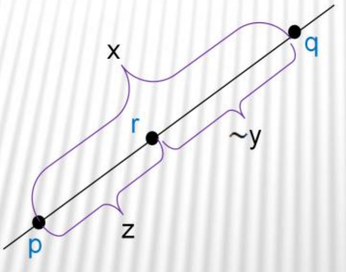


ÖSSZEADÁS

$x + y = z$:

Egyébként: legyen $|x| \geq |y|$. Ekkor

$\exists pqr\ Bw(p,r,q) \wedge pq \in x\ \wedge qr \in {\sim}y \wedge pr \in z$

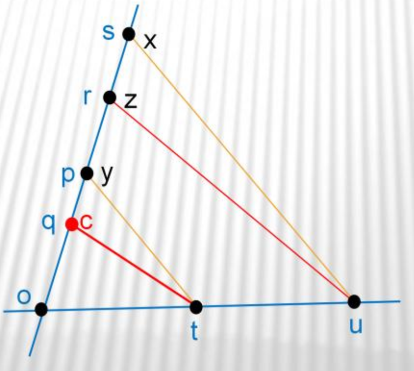


AFFIN SZORZÁS

x,y,z pozitiv:

$x \cdot y : z = c \overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists opqrstu$

$os \in x \wedge or \in z \wedge op \in y \wedge oq \in c \wedge su \parallel pt \wedge ru \parallel qt$



SZORZÁS

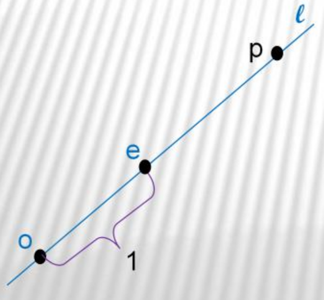
Legyen M = { pq : μ(p,q)=1 } . Ez eleme a testünknek, T –nek.

$$x \cdot y = z \overset{def}{\Longleftrightarrow} x \cdot y : M = z$$

Állitás: (T,+,·) izomorf (Q,+,·) –val.

Bizonyitás:

Megadunk egy izomorfizmust (T,+,·) és egy időszerű egyenesen való test-példánnyal.



$$f(p) = \begin{cases} {}^{op}/_{\equiv} & \text{ha p az oe félegyenesen van} \\ \sim {}^{op}/_{\equiv} & \text{egyébként} \end{cases}$$

SPECREL GEOMETRIÁI

Ha **M** modellje SpecRel-nek, akkor az **M** geometriája, Ge(**M**) a következő:

$$\mathrm{Ge}(\mathbf{M}) = (\mathrm{Ev}_M, F, M).$$

Jelölje MinkTh a { Ge(**M**) : **M** $\models$ SpecRel} modellosztályban érvényes összes formulát.

Miért geometria?

Megmutatjuk, hogy a MinkTh és a SpecRel elsőrendű logikai elméletek ekvivalensek a logikai értelemben (ha SpecRel-hez hozzáadunk még „egyszerűsitő” axiómákat).

Miért geometria?

F a fényszerű egyeneseknek felel meg és M az 1-sugarú relativisztikus köröknek.

Téridőgeometria.

EGYSZERŰSITŐ AXIÓMÁK

$AxExt^{ob}$ $\quad \forall m,k \in IOb \;\; w_{mk} = Id \;\rightarrow m = k$

$AxExt^{ph}$ $\quad \forall ph, ph' \in Ph \;\; \forall m \in IOb \;\; wline_m(ph)\; egyenes \;\; és$

$$wline_m(ph) = wline_m(ph') \;\rightarrow ph = ph'$$

$AxThExp$ $\quad \forall m \in IOb \;\; \forall p,q \in Q^4$

$$v(p,q) < 1 \;\rightarrow \exists k \in IOb \;\; p,q \in wline_m(k)$$

$AxCoord$ $\quad \forall m \in IOb \;\; \forall S\; tér-izo\; a\; Q^4-n \quad \exists k \in IOb \;\; w_{mk} = S$

$$IOb \neq \emptyset$$

$AxNoB$ $\quad B = IOb \cup Ph \quad és \quad W \subseteq IOb \times Q^4 \times B$

$$SpecRel^c \stackrel{\text{def}}{=} SpecRel \cup \{fenti\; axiómák\}$$

Sztenderd modellek

Relativity Theory and Logic — Budapest, 2010. március 24 — Page: 124

SpecRel-t le kell „butitani” az ekvivalencia tételhez, mert a geometria kevesebb tulajdonságot tükröz.

A kék axiómák extenzionalitási axiómák (mint halmazelméletben). Leibniz elv: két objektum ami nem különböztethető meg a nyelv (azaz a vizsgálati szint) szempontjából, az nem különböző. Pl. ha két foton útvonala megegyezik de a szinük nem, akkor ugyannak számitanak, mert a szinről (vagy energiáról) nem beszélünk a nyelvben. Az első axióma azt mondja, hogy egy megfigyelő az tényleg nem más mint egy koordinátarendszer.

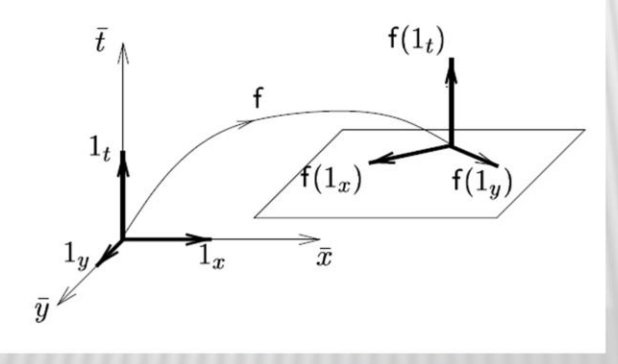
A zöld axiómák létezést posztuláló axiómák, mint a komprehenzió axióma a halmazelméletben. AxThExp az amit KiserletAx-nak hivtunk. AxCoord azt mondja, hogy egy megfigyelő át tudja koordinátázni a terét, máshova tudja tenni az időszámitása kezdetét, és meg tudja foorditani az idő irányitását. A következő szlájdon felidézzük a tér-izo definicióját. Kvantor fut a tér-izo leképezéseken. Nem baj, mert minden tér-izo affin transzformáció, tehát lehet azzal kódolni, hogy hova mennek az egységvektorok.

A kék és zöld axiómákat feltehettük volna ha akartuk volna, de nem volt rájuk szükség, minek komplikálni.

AxNoB azt posztulálja, hogy most csak az inerciális megfigyelőkre és a fotonokra koncentrálunk, nincsenek pl gyorsuló megfigyelők. Ez valódi megszoritás. Hamarosan rátérünk a gyorsuló megfigyelők vizsgálatára SpecRel-ben, és akkor fontos lesz, hogy nem tesszük fel az AxNoB axiómát.

SPECREL MODELLJEI

- Definició:
  - Az f transzformációt **tér-izo** transzformációnak nevezzük, ha az x,y,z altéren egybevágóság, és a t időtengelyen eltolás esetleg tükrözéssel komponálva.



Ez volt a tér-izo definiciója.

DEFINICIÓS EKVIVALENCIA TÉTEL

Thm.13. $\mathrm{SpecRel}^c$ és MinkTh definíciósan ekvivalensek.

A gyenge def. ekvivalencia a következő (i)-(iii)-at jelenti.

(i) Van f interpretáció $\mathrm{SpecRel}^c$ nyelvéből MinkTh nyelvébe, úgy hogy $\mathrm{MinkTh} \models f(\mathrm{SpecRel}^c \cup \mathrm{Th}(=))$,

(ii) Van g interpretáció MinkTh nyelvéből $\mathrm{SpecRel}^c$ nyelvébe, úgy hogy $\mathrm{SpecRel}^c \models g(\mathrm{MinkTh} \cup \mathrm{Th}(=))$. Továbbá

(iii) Az f és g inverzei egymásnak abban az értelemben, hogy

$\mathrm{SpecRel}^c \models \varphi \leftrightarrow gf(\varphi)$ minden φ $\mathrm{SpecRel}^c$ nyelvén levő zárt formulára, és
$\mathrm{MinkTh} \models \varphi \leftrightarrow fg(\varphi)$ minden φ MinkTh nyelvén levő zárt formulára.

$$\mathrm{Th}(=) = \{\forall xyz(x = x \wedge (x = y \rightarrow y = x) \wedge (x = y \wedge y = z \rightarrow x = z))\}$$

Relativity Theory and Logic Budapest, 2010. március 24 Page: 126

Interpretáció azt jelenti, hogy fordítófüggvény. Mindjárt definiáljuk, hogy mi egy interpretáció.

DEFINICIÓS EKVIVALENCIA TÉTEL

Az (erős) def. ekvivalenciánál a (iii) helyett erősebb feltétel van, ami a nyitott φ formulák között is kapcsolatot teremt.

$SpecRel^c$ és MinkTh erősen is definiciósan ekvivalensek.

$SpecRel^c$ és AxField gyengén def. ekvivalensek, de nem erősen definiciósan ekvivalensek.

Itt megadjuk majd a két f,g interpretációt $SpecRel^c$ és MinkTh között ami erős értelemben is inverzei egymásnak, de csak a gyenge inverzet (azaz (iii)-at) bizonyitjuk róluk. Az erős ekvivalencia bizonyitása analóg az Irodalombeli [AMN06] p.650-en levő bizonyitással.

A definiciós ekvivalenciáról ld. az Irodalomban [AMN02, sec.6.3], [AMN03], [AMN06, sec.2.6], [M02, sec.4.3].

Interpretáció azt jelenti, hogy forditófüggvény. Mindjárt definiáljuk, hogy mi egy interpretáció.

INTERPRETÁCIÓ - EGYSZORTÚ

Mi egy interpretáció két elmélet között?

1. Egyszortú interpretáció mikor új entitásokat nem definiálunk, csak meglevő elemeken új relációkat:

Interpretáció L1 –ből L2 -be egyszerűen egy konnektivumtartó függvény, azaz $f\colon L1 \rightarrow L2$ úgy hogy minden $\varphi,\psi \in$ L1 formulára és minden x,y változójelre

$f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$, $f(\forall x\, \varphi) = \forall x\, f(\varphi)$, $f(x=y) = x=y$.

Egy ilyen függvényt azzal lehet megadni, hogy az L1 alapfogalmaihoz rendelünk formulákat (tetszés szerint).

Szort azt jelenti, hogy valamely tipusú elemek. Azért nem tipusnak hivjuk, mert a tipus mást is jelent logikában.

INTERPRETÁCIÓ ELMÉLETEK KÖZÖTT

L1-ből L2-be menő interpretáció indukál egy függvényt L2 modellosztályából L1 modellosztályába:

$$L1 \rightarrow L2$$

$$M1 \leftarrow M2$$

Az f interpretáció az L1-nek Th1 elméletéből interpretáció az L2-nek Th2 elméletébe, ha

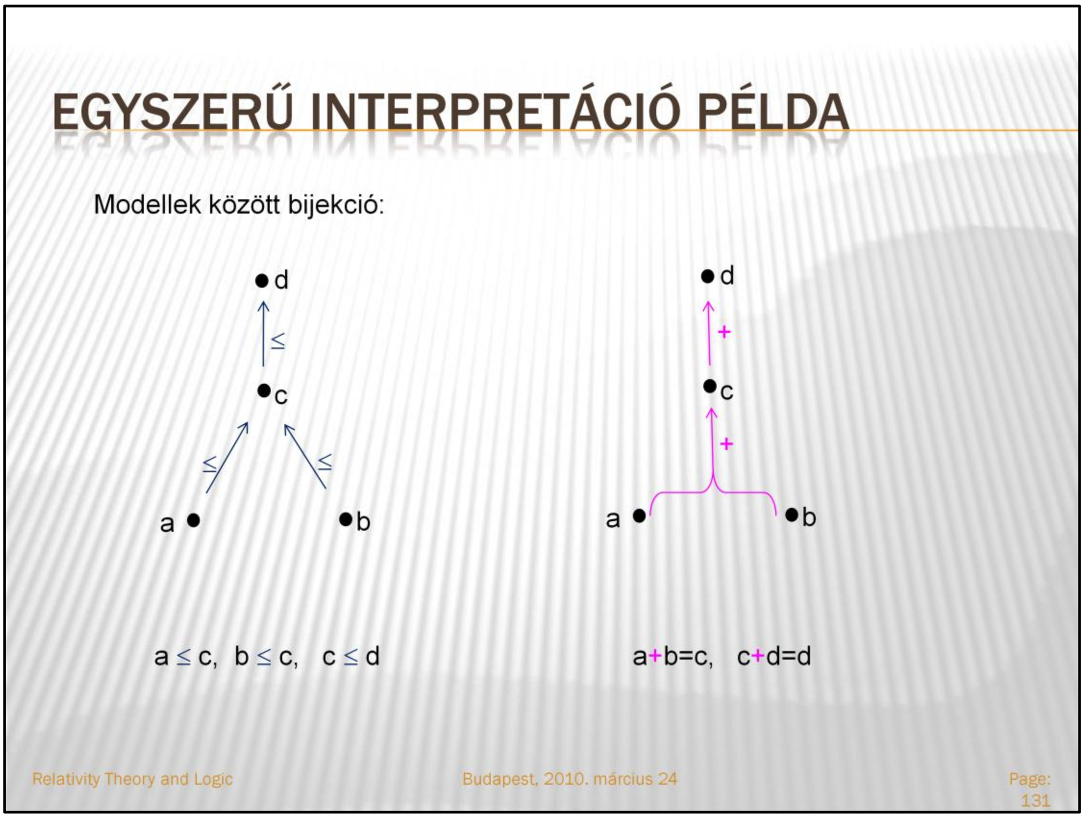
$$Th2 \models f(Th1).$$

Ezzel ekvivalens, hogy

$$ModTh1 \leftarrow ModTh2$$

A formulák (jelsorozatok, szintaxis) és modellek (jelentés, szemantika) közti dualitás a matematikai logika központi témája. Ezzel összhangban, interpretáció a modelleken is jelent valamit.

Ez a két függvény interpretáció T1 és T2 között, sőt definiciós ekvivalenciát adnak meg T1 és T2 között, mert egymás inverzei a p.126 értelmében (sőt, az erős def eq értelmében is). Két egyszortú interpretáció egymás inverze az erősebb értelemben ha a modelleken indukált függvényeik egymás inverzei.



A két interpretáció amit megadtunk bijekciót definiál T1 és T2 modelljei között.

INTERPRETÁCIÓ TÖBBSZORTÚ PÉLDA

Affin sik mint többszortú és egyszortú struktúra:

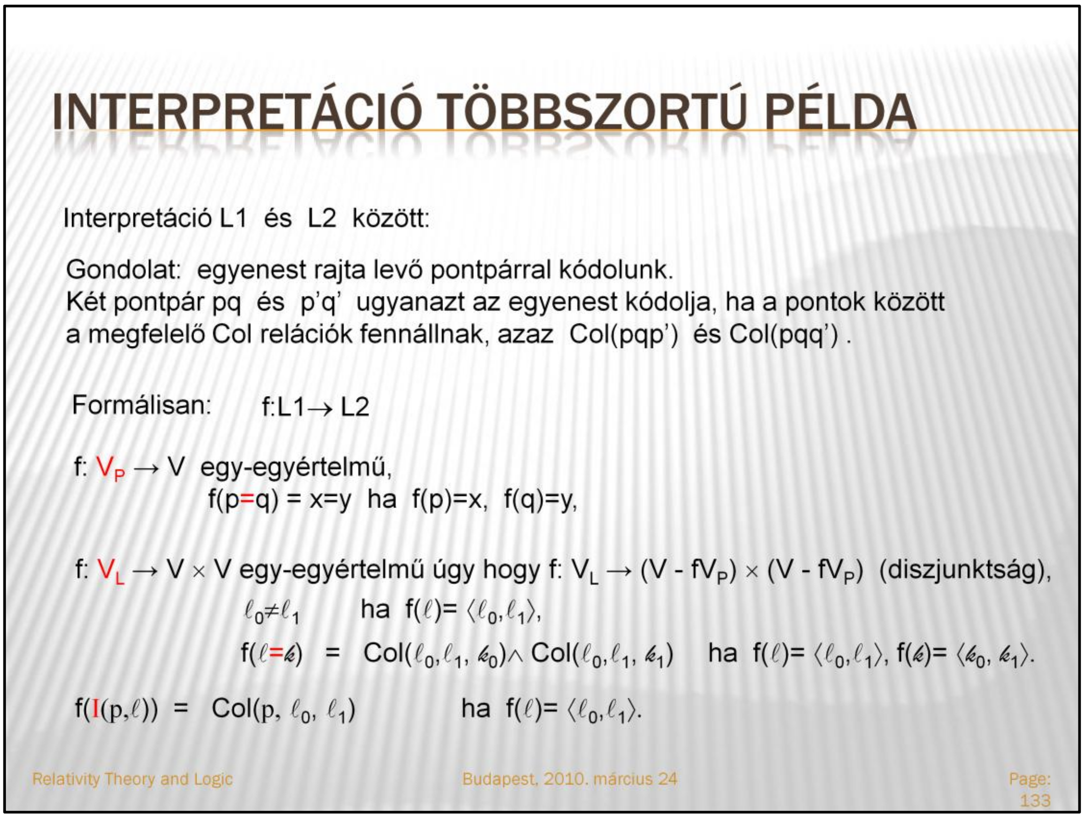
1. Nyelv L1: két szort, pontok V_P és egyenesek V_L, továbbá egy $V_P \times V_L$ argumentumú I relációjel.

   Elmélet T1: $\forall p,q \in P \;\; p \neq q \rightarrow \exists! \ell \in L \;\; I(p,\ell) \wedge I(q,\ell)$

2. Nyelv L2: egy szort, egy három-argumentumú Col relációjel.

   Elmélet T2: $Col(x,y,z) \rightarrow Col(y,x,z), \ldots, \forall xy Col(x,y,y),$
   $\forall xyzw(Col(x,y,z) \wedge Col(x,y,w) \rightarrow Col(y,z,w))$

Olyan példa, ahol új entitásokat is definiálunk (kreálunk). Nevezetesen, a pontok tipusú elemekből az egyenesek tipusú elemeket.



Az új tipusú változójeleket is „definiáljuk" rendelkezésre álló tipusú változójelsorozattal (azaz a nyelv amibe interpretálunk változójelsorozatával) egy „kiválasztó" formulával valamint egy formulával, ami az új (most definiálandó) tipusú elemeken az egyenlőséget definiálja. Példánkban egy „lines" tipusú változójelet két „points" tipusú változójelként definiálunk, a kiválasztó formula az, hogy az egyenest reprezentáló két pont különböző kell legyen, és az egyenlőség interpretálása az a formula, hogy az egyeneseket reprezentáló két-két point kollineáris (annak a nyelvnek a fogalma, amibe interpretálunk). Az alaprelációk definiálása (interpretálása) ezután már tetszőleges, kivéve hogy a leforditott változó jeleket kell használni. Esetünkben a p pont illeszkedik az l egyenesre, ha a p és az l –et reprezentáló két pont kollineáris.

INTERPRETÁCIÓ TÖBBSZORTÚ PÉLDA

Interpretáció L2 és L1 között:

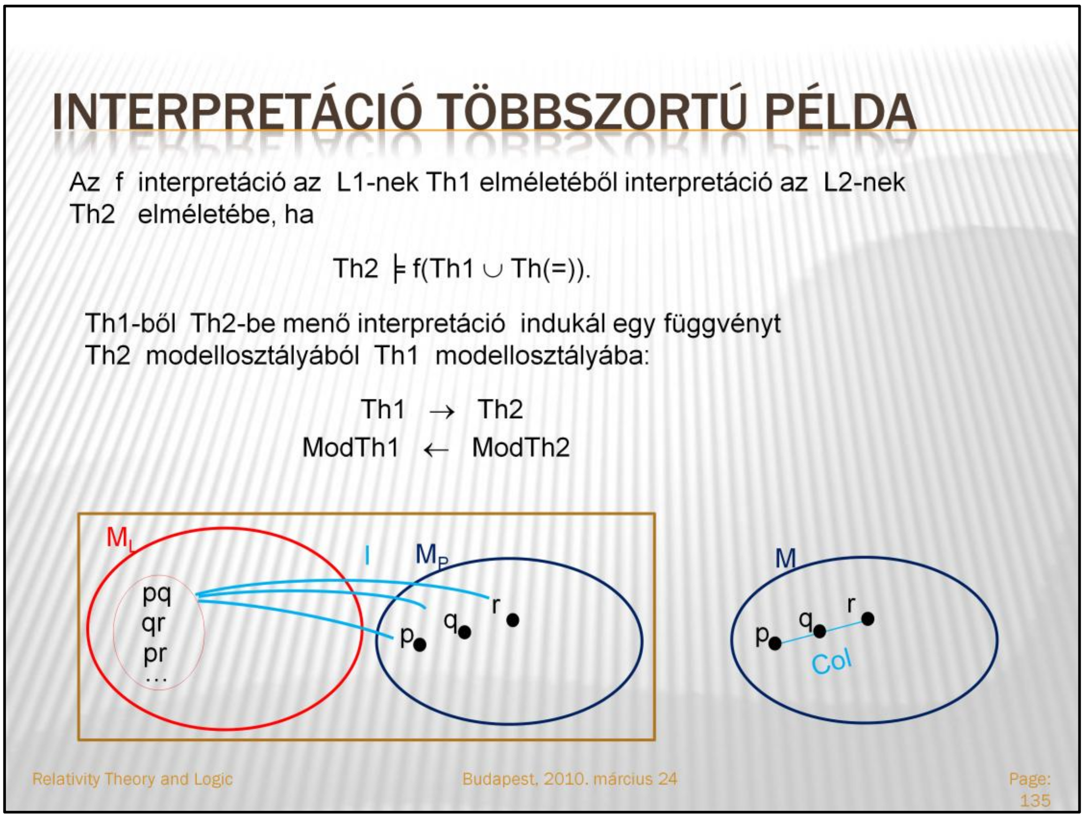
Gondolat: az illeszkedés relációt levetitjük a pontszortra és elfelejtjük az egyenesek szortját.

Formálisan: $f{:}L2 \rightarrow L1$

f: $V \rightarrow V_P$ identitás, $f(x=y) = x=y$

$f(Col(x, y, z)) = \exists \ell(I(x,\ell) \wedge I(y,\ell) \wedge I(z,\ell)$.

Feltehetjük, hogy V ugyanaz mint V_P .



Az, hogy Th2 –ből bizonyitható a Th(=) (persze minden szortra kell) azt jelenti, hogy az egyenlőséget definiáló formula a Th2 elméletben ekvivalenciareláció a kiválasztott pontpárokon. Példánkban a kollinearitási feltétel ekvivalenciareláció ha mindkét pontpár különbözö pontból áll.

INTERPRETÁCIÓ - TÖBBSZORTÚ

Mi egy interpretáció két elmélet között?

2. Ha új entitásokat is definiálunk, nemcsak meglevő elemeken új relációkat:

Interpretáció L1 –ből L2 -be konnektivumtartó függvény, ami a változójeleket is és az egyenlőséget is interpretálja, azaz

f: $L1 \rightarrow L2$ úgy hogy minden $\varphi, \psi \in$ L1 formulára és L1 minden s szortjára

$f : V_s \rightarrow V_{s1} \times V_{s2} \ldots \times V_{sn}$, $\zeta_s(x1,\ldots,xn)$, ahol f egy-egyértelmű, s1,…,sn az L2 szortjai és ζ_s formula L2 nyelvén. A különböző szortú változójelek képei legyenek diszjunktak.

$f(x=y) = \varepsilon(fx,fy)$, ahol ε formula L2 nyelvén.

$f(R(x1,\ldots,xn)) = \rho(fx1,\ldots,fxn)$, ahol ρ formula L2 nyelvén.

$f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi)$, $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$, $f(\forall x\, \varphi) = \forall fx(\zeta_s(fx) \rightarrow f(\varphi))$.

A példa után itt van az általános definiciója az interpretációnak.

INTERPRETÁCIÓ ELMÉLETEK KÖZÖTT

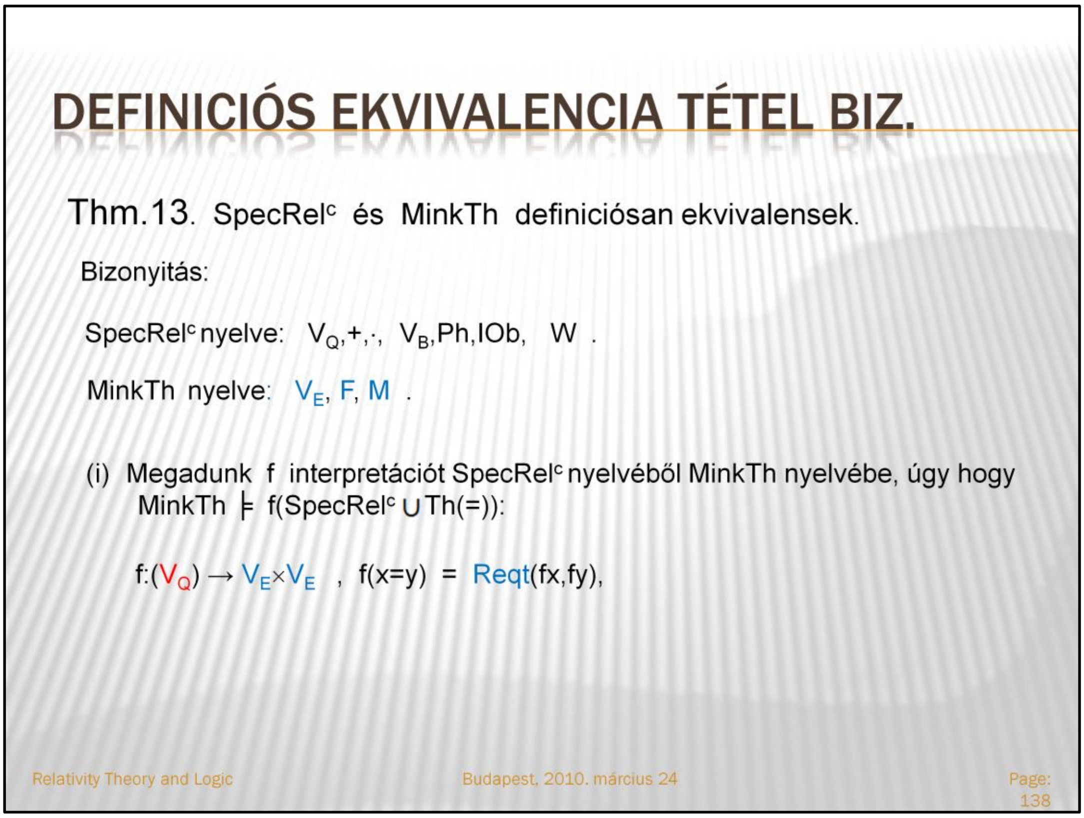
Az f interpretáció az L1-nek Th1 elméletéből interpretáció az L2-nek Th2 elméletébe, ha

$$Th2 \models f(Th1 \cup Th(=)).$$

Th1-ből Th2-be menő interpretáció indukál egy függvényt Th2 modellosztályából Th1 modellosztályába:

$$\begin{array}{ccc} Th1 & \rightarrow & Th2 \\ ModTh1 & \leftarrow & ModTh2 \end{array}$$

Az általános definició folytatása.



Most hogy definiáltuk, hogy mi egy interpretáció, belekezdhetünk a tétel bizonyitásába. Az igazi munkát már elvégeztük hamarabb, most csak formába kell önteni.

Hamarabb definiáltuk a fényszerű szeparáltságból a relativisztikus ekvitávolságot. Ezt a koordinátapárokon definiáltuk, de vegyük ugyanazt a formulát az eseménypárokon. Lehet, mert csak a fényszerű szeparáltságot használtuk, ami a koordinátapontokon is meg az eseményeken is értelmezett. Tehát fent Reqt ezt a formulát jelöli. Ez a formula csak az F relációjelet tartalmazza. Ezt úgy jelezzük, hogy kékkel irtuk a formulát.

A fenti definició azt mondja, hogy egy mennyiséget eseménypárral reprezentálunk, nincs megkötés a reprezentáló eseménypárra, és két eseménypár akkor reprezentálja ugyanazt a mennyiséget, ha fennáll köztük a (fényszerű szeparáltságból felirt) ekvitávolság.

PARAMÉTEREK NÉLKÜL

Intuitive, a mennyiségek a pontok közti távolságok. Ezeket a távolságokat a pontpárokon az ekvi-távolság ekvivalenciareláció blokkjaival reprezentáljuk.

$$pq \equiv rs \overset{def}{\iff} Reqt(p,q,r,s)$$

$$T \overset{def}{=} Q^4 \times Q^4 /_{\equiv}$$

$F = pp/_{\equiv}$ akármelyik p - re. F lesz a testünk 0-ja.

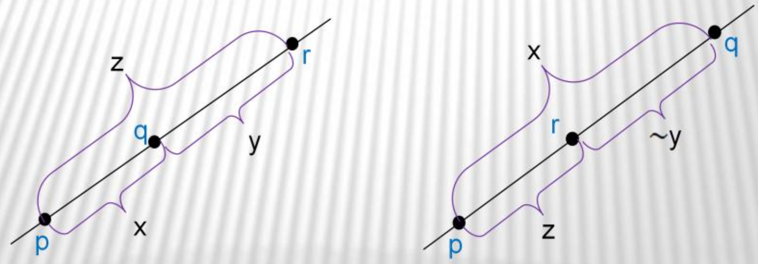
Pozitiv elemek lesznek: $\{\, pq/_{\equiv} \;:\; pq$ időszerűen szeparált $\}$

Negativ elemek lesznek: $\{\, pq/_{\equiv} \;:\; pq$ térszerűen szeparált $\}$

Emlékeztető, hogy igy definiáltuk a test alaphalmazát múlt órán a fényszerű szeparáltságból.

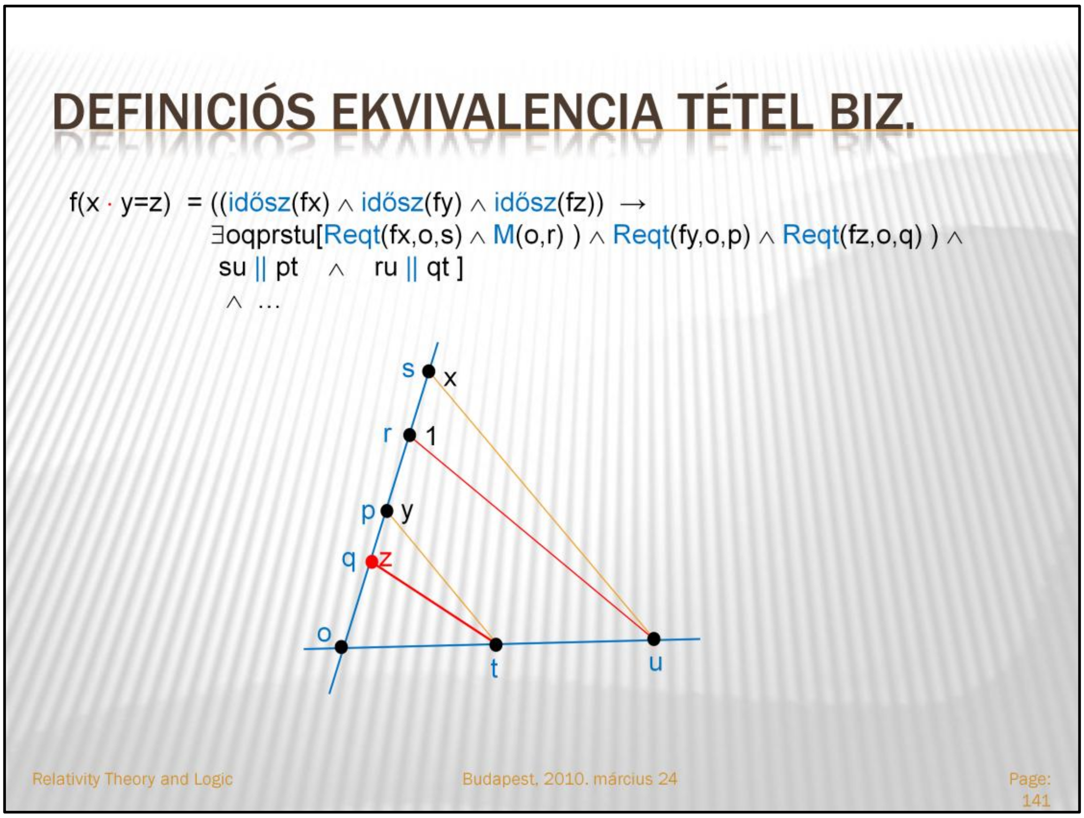
DEFINICIÓS EKVIVALENCIA TÉTEL BIZ.

$$
\begin{aligned}
f(x+y=z) \; = \; & \neg\,((\text{idősz}(fx) \land \text{térsz}(fy)) \lor (\text{térsz}(fx) \land \text{idősz}(fy))) \rightarrow \\
& \exists e_1e_2e_3[\text{Bw}(e_1,e_2,e_3) \land \text{Reqt}(fx,e_1,e_2) \land \text{Reqt}(fy,e_2,e_3) \land \text{Reqt}(fz,e_1,e_3)] \\
& \land \\
& ((\text{idősz}(fx) \land \text{térsz}(fy)) \lor (\text{térsz}(fx) \land \text{idősz}(fy)) \land |fx|>|fy|) \rightarrow \\
& \exists e_1e_2e_3[\text{Bw}(e_1,e_3,e_2) \land \text{Reqt}(fx,e_1,e_2) \land \text{Reqt}(\sim fy,e_2,e_3) \land \text{Reqt}(fz,e_1,e_3)].
\end{aligned}
$$



Az igazi munkát már elvégeztük hamarabb, most csak formába kell önteni. Ez a formula az összeadás múlt órai definiciójának megismétlése, formulába öntve.

Emlékeztetünk rá, hogy a kékkel jelölt részformulákat már hamarabb definiáltuk a fényszerű szeparáltságból.



Az igazi munkát már elvégeztük hamarabb, most csak formába kell önteni. A formula végén a három pont azt jelenti, hogy itt még el kéne mondanunk, hogy ha x,y közül pontosan egy negativ, akkor z negativ kell legyen, és ha x,y mindketten negativak, akkor z pozitiv és egyébként a fenti szlájdra felirt formulát kell felirni az abszolut értékekre.

DEFINICIÓS EKVIVALENCIA TÉTEL BIZ.

SpecRel^c nyelve: $V_Q,+,\cdot,\ V_B,Ph,IOb,\ W$.

Gondolat: Egy megfigyelőt az origojában levő, valamint a 4 egységvektora hegyén levő eseményekkel reprezentáljuk. Fotont a foton életútján levő két különböző eseménnyel, és hogy mindkétfajta bodit 5 eseménnyel reprezentáljuk (hogy ne legyen esetszétválasztás), megismételjük a második eseményt 3-szor.

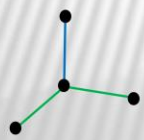
Formálisan:

$f:(V_B) \to V_E \times V_E \times V_E \times V_E \times V_E$, $Ph(e_0,e_1,\dots,e_4) \vee IOb(e_0,e_1,\dots,e_4)$, ahol

$Ph(e_0,e_1,\dots,e_4) \Leftrightarrow F(e_0,e_1) \wedge e_0 \neq e_1 \wedge e_2=e_3=e_4$,

$IOb(e_0,e_1,\dots,e_4) \Leftrightarrow M(e_0,e_1) \wedge \sim M(e_0,e_2) \wedge \sim M(e_0,e_3) \wedge \sim M(e_0,e_4) \wedge$

$e_0e_1 \perp e_0e_2 \wedge e_0e_1 \perp e_0e_3 \wedge e_0e_1 \perp e_0e_4 \wedge e_0e_2 \perp e_0e_3 \wedge e_0e_2 \perp e_0e_4 \wedge e_0e_3 \perp e_0e_4$.



Eddig a mennyiségeket és a rajtuk való műveleteket definiáltuk (interpretáltuk MinkTh nyelvébe). Most a bodikat és a rajtuk levő relációkat interpretáljuk. Múlt órán definiáltuk az ellentett relációt valamint a merőlegesség relációt a fényszerű szeparáltságból.

DEFINICIÓS EKVIVALENCIA TÉTEL BIZ.

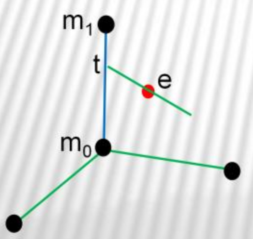
$SpecRel^c$ nyelve: $V_Q, +, \cdot,\ V_B, Ph, IOb,\ W$.

$f{:}(V_B) \to V_E \times V_E \times V_E \times V_E \times V_E \quad , \quad Ph(e_0,e_1,\ldots,e_4) \vee IOb(e_0,e_1,\ldots,e_4),$

$f(b{=}k) \;=\; Ph(fb) \to (Ph(fk) \wedge line(b_0,b_1)=line(k_0=k_1)) \wedge$

$\qquad IOb(fb) \to (IOb(fk) \wedge b_0=k_0 \wedge b_1=k_1 \wedge b_2=k_2 \wedge b_3=k_3 \wedge b_4=k_4)$.

$f(W(m,t,x,y,z,b)) \;=\; IOb(fm) \wedge (IOb(fb) \vee Ph(fb)) \wedge \exists e[\,Col(e,b_0,b_1) \wedge$



$\exists e_t(Reqt(e_t,m_0,t_0,t_1) \wedge$
$\quad időszt(t_0,t_1) \to (Bw(m_0,e_t,m_1) \vee Bw(m_0,m_1,e_t)) \wedge$
$\quad térsz(t_0,t_1) \to Bw(m_1,m_0,e_t) \wedge$
$\quad e_te \parallel m_0m_2 \wedge e_te \parallel m_0m_3 \wedge e_te \parallel m_0m_4) \wedge$
$\exists e_x(Reqt(e_x,m_0,x_0,x_1) \wedge \ldots\,]$.

$f(m)= \langle m_0,m_1,m_2,m_3,m_4\rangle,$
$f(t)= \langle t_0,t_1\rangle,$ stb.

Relativity Theory and Logic Budapest, 2010. március 24 Page: 143

Megismételjük az előző oldalról a bodi-szort definicióját és a kiválasztó formulát. Továbbá már definiáltuk a Ph és IOb relációkat is.

Most definiáljuk, hogy két eseményötös (ami teljesiti a kiválasztóformulát) mikor reprezentálja ugyanazt a bodit. Akkor ha vagy mindkettő foton és az első két esemény ugyanazt az egyenest definiálja, vagy ha mindkettő megfigyelő, és az események tagonként megegyeznek.

A kékkel irt részformulák mind a fényszerű szeparáltságból (és M-ből) felirt definiáló formulát jelentik, amit már hamarabbi alkalmakkor felirtunk (elvben).

Végül a világképrelációt kell interpretálnunk (azaz definiálnunk az F és M relációkból). Ez lényegében azt jelenti, hogy meg kell mondjuk, hogy egy megfigyelő eseményötöst hogyan tekintünk koordinátarendszernek. Ez egyben algoritmus is, hogy hogyan koordinátáz egy eseményötössel megadott megfigyelő úgy, hogy csak a fényszerű szeparáltságot és a Minkowski köröket használja. (Nagyon megfigyelőorientált.)

W definiciójának első sora azt mondja, hogy m megfigyelő kell legyen, b pedig vagy megfigyelő vagy foton (azaz bodi), továbbá van egy e esemény ami a b_0b_1 egyenesén van és (a második sortól kezdve) amely eseményhez az m a t,x,y,z koordinátát rendeli. A W definiciójának 2-5 sora azt mondja meg, hogy hogyan állapitja meg m az e esemény időkoordinátáját. A hatodik sortól kezdve az analóg formulák vannak az x,y,z koordináták megállapitásának algoritmusáról. A … azt jelenti, hogy ha megértettük, hogy az m az időkoordinátát hogyan állapitja meg, akkor a formula többi részének kitöltése feltehetőleg nem okoz problémát majd.

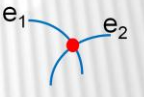
Hogyan állapitja meg m az e esemény időkoordinátáját? Levetiti az e eseményt a többi koordinátatengellyel párhuzamosan a t tengelyre (5-ik sor), igy kapja az e_t eseményt. Ha az e_t esemény az m_0m_1 félegyenesen van, akkor az időkoordináta az m_0e_t mennyiség (ez pozitiv mert időszerű), ha pedig az m_0m_1 egyenes másik felén van az e_t, akkor az m_0e_t mennyiség ellentettjét veszi (ez negativ szám lesz).

DEFINICIÓS EKVIVALENCIA TÉTEL BIZ.

MinkTh nyelve: V_E, F, M .

(ii) Megadunk g interpretációt MinkTh nyelvéből SpecRel^c nyelvébe, úgy hogy SpecRel^c $\models$ g(MinkTh $\cup$ Th(=))

$g:(V_E) \to V_B \times V_B$, $meet_2(e_1,e_2)$
$g(e=e') = meet_4(e_1,e_2,e'_1,e'_2)$



$g(F(e,e')) = \exists ph \in Ph \;\; meet_3(ph,e_1,e_2) \wedge meet_3(ph,e'_1,e'_2)$

$g(M(e,e')) = \exists m \in IOb \;\; \exists p,q \in Q^4 \;\; \mu(p,q)=1 \;\wedge$
$p=wline_m(e_1) \cap wline_m(e_2) \wedge q=wline_m(e'_1) \cap wline_m(e'_2)$.

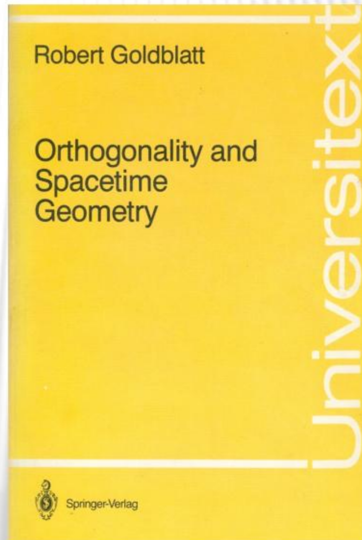
$meet_n(e_1,e_2,\ldots e_n) \;\Leftrightarrow\; \exists m \in IOb \;\; |wline_m(e_1) \cap wline_m(e_2) \cap \ldots \cap wline_m(e_n)|=1$

Állítás: A most megadott f,g teljesiti a Thm.13 kimondásában szereplő (i)-(iii) feltételt.

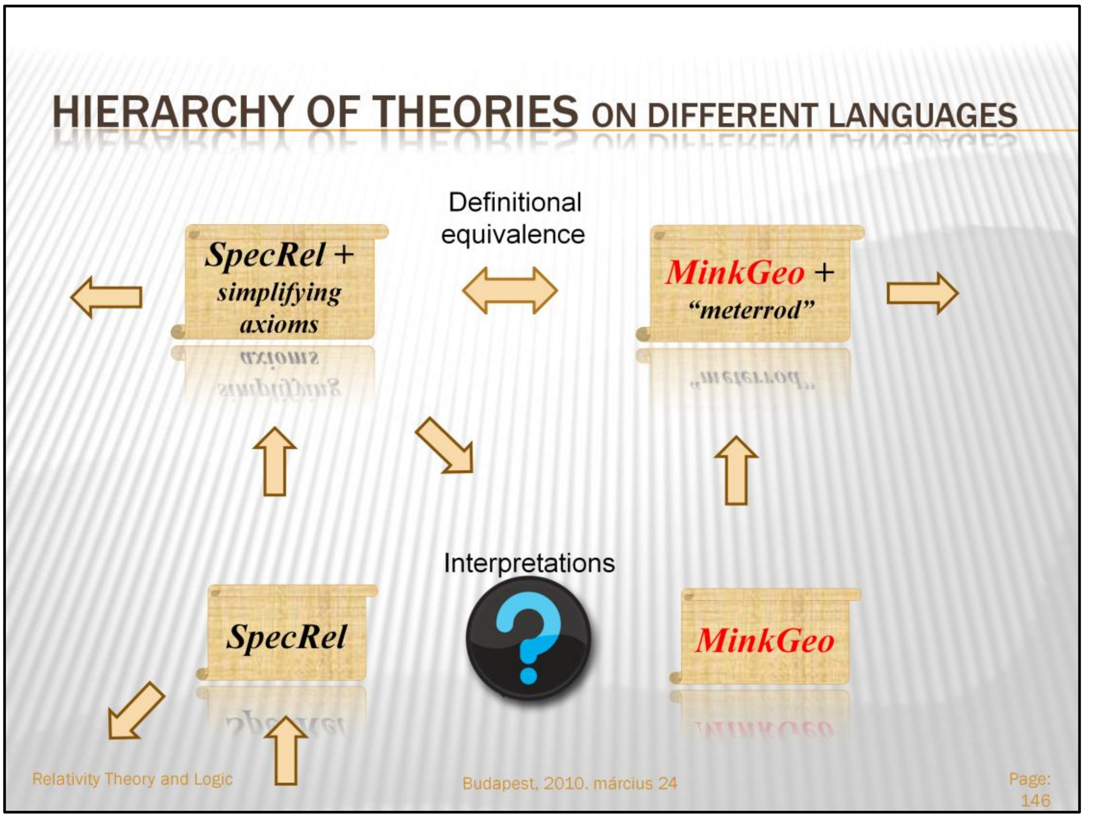
Itt van a másik irányú interpretáció. Le kell ellenőrizni, hogy tényleg interpretációk a két elméletünk között és hogy egymás inverzei.

OTHER FORMALISATIONS OF SPECREL

Minkowskian Geometry: Top-down approach to SR, observer-free.



Robert Goldblatt:
complete FOL axiom system MinkGeo



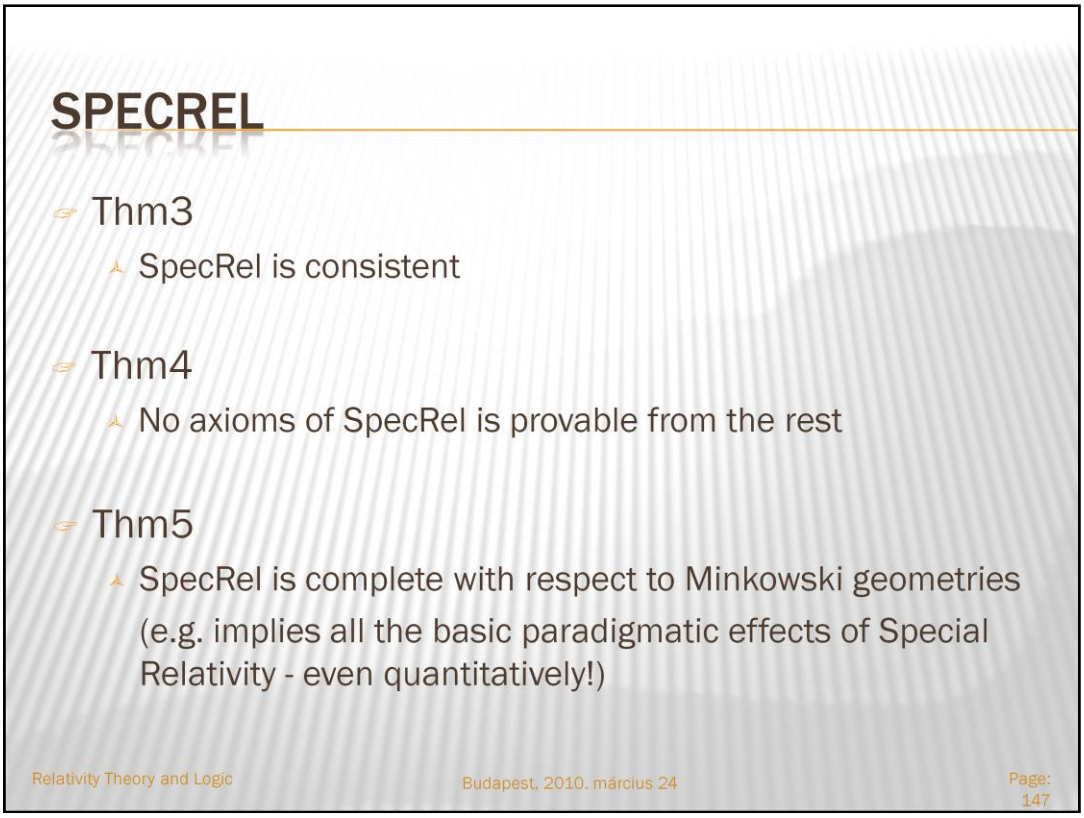
What is the connection between SpecRel and MinkGeo?

There are interpretations in both directions between them.

SpecRel and MinkGeo are FOL theories on languages with different vocabularies. The vocabulary of MinkGeo contains basic symbols like points, lines, betweenness relation between points, and orthogonality of lines. These are notions geometric in nature. An interpretation of SpecRel in MinkGeo consists of interpreting the basic notions of SpecRel with these geometric basic notions, and then proving in MinkGeo the axioms of SpecRel written up with these interpretations (i.e., definitions) in place of the original "atomic" basic symbols. An interpretation is "analysing further the basic notions of SpecRel". An interpretation of SpecRel in MinkGeo gives us a recipe for how to set up the coordinate systems (observers) so that the axioms of SpecRel be true, and such an interpretation also tells us how our notion of numbers (the quantities with addition, multiplication) comes from geometry.

In definability theory, the strongest relation between two theories is definitional equivalence (apart from equality of teories). When two theories are definitionally equivalent, they are the same theory in different linguistic representation. Are SpecRel and MinkGeo definitionally equivalent? Can't be because SpecRel is undecidable and MinkGeo is decidable (when the field-structure is appropriate).

How to measure the difference between SpecRel and MinkGeo? Add simplifying axioms to SpecRel, add two constants to MinkGeo, and then the two theories become definitionally equivalent.



Theorems 3,4 show what we cannot prove from SpecRel. Them 5 shows what we CAN prove from SpecRel. It is a completeness theorem for SR.

The completeness theorem for SR is a completeness theorem in the usual sense of logic, namely it says that SR is complete wrt its “standard model”, or “intended model”, i.e. wrt Minkowskian geometry. (See also a later slide.)

This theorem implies the so-called *paradigmatic (i.e., characteristic) effects of SR*, e.g. the fact that “moving clocks run slow”, and that “moving clocks get out of synchronism”. In fact, we prove this completeness theorem via proving the paradigmatic effects one-by-one, directly from the axioms of SR and then we show that the completeness theorem follows. This illuminates or illustrates why the paradigmatic effects are true and show how to perform a conceptual analysis.

After the next slide come the three paradigmatic effects and their proofs.

SPECREL

- Thm6
  - SpecRel generates an undecidable theory. Moreover, it enjoys both of Gödel's incompleteness properties
- Thm7
  - SpecRel has a decidable extension, and it also has a hereditarily undecidable extension. Both extensions are physically natural.

Proofidea for Thm6: we can use the worldline of a periodically circling body to select a subset of Q which together with the field-operations satisfy Robinson's arithmetic.

Proofidea for the existence of a decidable extension: We may postulate that the field-reduct is a real-closed field (which has a decidable FOL theory, Tarski's thm), all bodies are observers or photons, there are no two observers with the same worldview, and a few similar extra axioms.

OTHER FORMALISATIONS OF SPECREL

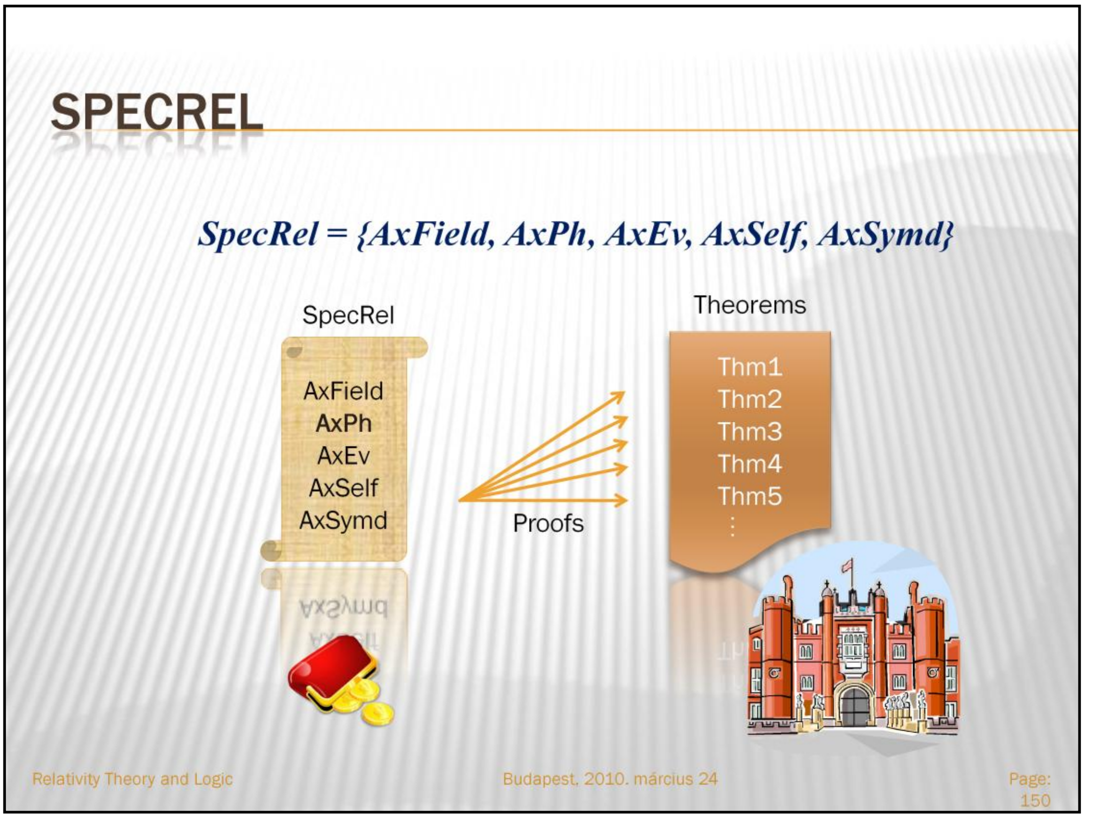
Minkowskian Geometry
James Ax: Signals
Alfred Robb: causality
Patrick Suppes: worldview transformations
…

Connections between theories. Dynamics of theories.
Interpretations between them. Theory morphisms. Definitional equivalence.

Tamás Füzessy, Judit Madarász and Gergely Székely began joint work in this

Definability theory of logic! (Tarski, Makkai)

Contribution of relativity to logic: definability theory with new objects definable (and not only with new relations definable). J. Madarász' dissertation.



5 axioms, AxPh is the most important one of them.
We got lots of theorems.

SPECREL

Conceptual analysis of SR goes on ... on our homepage

New theory is coming:

We have to interrupt studying this theory in this prezentation since we want to go on towards general relativity theory.
Comes Part II: theory of accelerated observers in special relativity.