

Ez a prezentáció harmadik része. Az  ltal nos relativit selm letr l sz l.

Az  ltal nos relativitáselmélet és a fekete lyukak elmélete nagyon izgalmas  tt r  fejezetei a mai tudománynak.

III RÉSZ

Általános Relativitáselmélet



Akármilyen vad áltrel téridő akármilyen vad részében lokálisan az ott elejtett picit űrhajó egy rövid ideig SpecRel-t fog tapasztalni. Ez az AccRel elmélet Együttmozgó Axiómájának az áltrel megfelelője. Alapidea: áltrel téridő = lokálisan SpecRel téridő = lokálisan Minkowski geometria.

ÁLTALÁNOS RELATIVITÁSELMÉLET

Einstein erős Relativitás Elve:

“Minden megfigyelő egyenjogú” (ugyanazok a természettörvények vonatkoznak rájuk)

Töröljük el az inerciális és gyorsuló megfigyelők különböző kezelését az axiómákban

G. R.



$GenRel \subseteq FOL$

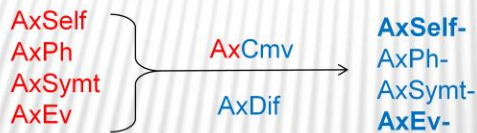
Demokratikus forradalom. Nemesi előjogok törlése.

GENREL

GenRel nyelve: ugyanaz mint SpecRel -é.

Recept arra, hogy hogyan kapjuk meg GenRel -t AccRel -ből:

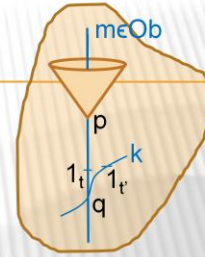
hagyjuk el AccRel összes olyan axiómáját, ami IOb -ot említi.
De tartsuk meg a gyorsulókra való következményeiket.



Pl., $AxPh + AxCmv \vdash AxPh^-$

Minden olyan axiómát, ami utal inerciális megfigyelőkre kicserélünk olyanra, ami nem utal inerciális megfigyelőkre, de ami kb ugyanazt mondja. AxSelf és AxEv -re már van ilyen axiómánk az AccRel-ben. Tehát SpecRel axiómái közül csak AxPh és AxSymd megfelelőjét kell megmondani. AxCmv-t egyszerűen kihagyjuk majd.

GENREL AXIÓMÁI



⇒ AxPh⁻

Azoknak a fotonoknak a sebessége, amikkel a megfigyelő találkozik a találkozás pillanatában 1, és a megfigyelő életútjának minden pontjában minden irányban ki lehet küldeni fotont. Formálisan: $\forall m \in Ob \forall p \in wline_m(m) \forall v \in Q^3$

$$|v| = 1 \leftrightarrow \exists h \in Ph \ wl_m^m(h)'(p_t) = \langle 1, v \rangle$$

⇒ AxSymt⁻

Találkozó megfigyelők egymás óráit egyformán látják lelassulni (a találkozás pillanatában). Formálisan: $\forall m, k \in Ob \forall q \in wline_m(m) \cap wline_m(k)$

$$|wl_m^k(k)'(w_{mk}(q)_t)| = |wl_k^m(m)'(q_t)|$$

A fenti két formulában szereplő jelölésekről: $wl_m^m(k)$ és $wl_m^k(k)$ definíciója a II rész 31. és 61. oldalán található, paraméterezett $g(t)$ görbe $g'(t)$ deriváltjának definíciója a II rész 62. oldalán.

Az AxSymd axióma helyett a vele ekvivalens (ld. Gyakorlat 2.11) AxSymt axiómát „lokalizáltuk”, mert annak a lokalizáltja egyszerűbb.

A formulákban a deriváltakat lehet helyettesíteni az epsilon-deltás definíciójukkal, nem lesz sokkal bonyolultabb.

GENREL

GenRel =

AxField + *AxPh* + *AxEv* + *AxSelf* + *AxSynt* + *AxDif* + *AxCont*

GenRel

AxField
AxPh⁻
AxEv⁻
AxSelf⁻
AxSynt⁻
AxDif⁻
AxCont⁻



Tételek

Thm1001
Thm1002
Thm1003
⋮



7 axióma.

GENREL

AccRel ugródeszka SpecRel-től GenRel felé:

⇒ Thm1001

$$\text{SpecRel} \Rightarrow \text{AccRel} \models \text{GenRel}$$



↑
rugalmasabb

A gyorsuló megfigyelők AccRel modelljei speciális GenRel modellek. De GenRel-nek van sok más modellje is. Örülünk, hogy GenRel rugalmasabb mint AccRel. Definiálni tudjuk GenRel-ben a geodetikusokat mint lokálisan időt maximalizáló életutakat, és ezekre kimondhatnánk a SpecRel axiómákat, ezzel visszakapnánk az AccRel elméletet. De ezt nem akarjuk, mert GenRel segítségével a gravitációt szeretnénk tanulmányozni. Azt szeretnénk, hogy egy gravitáló tömeg (pl. a Nap) térideje legyen GenRel modell úgy, hogy a gravitáció jelenlétebeli inerciálisok a téridő geodetikusai legyenek. A Nap felé eső egyszerre elejtett sugárirányban szeparált testek távolodnak egymástól, tehát nem igaz rájuk a SpecRel. Olyan GenRel téridőt is szeretnénk, ahol ezek az elejtett testek is geodetikusok. GenRel rugalmassága („gyengesége”) azért is jó, mert több fogalom definiálható benne, pl. különböző típusú görbületek (amik mind nullák SpecRel-ben).

GENREL MODELLJEI

⇒ Thm1002

▲ GenRel modelljei Lorentz sokaságok.

SpecRel teljességi tételével analóg. Lorentz sokaság intuitív definíciója: lokálisan Minkowski téridő.

Látni fogjuk, hogy minden GenRel modell egy Lorentz sokaság. Megfordítva, minden (bizonyos tulajdonságokat teljesítő) Lorentz sokaság egy GenRel modell. Pontosabban, minden GenRel modell természetes módon definiál egy Lorentz sokaságot stb. Ez dualitás tétel.

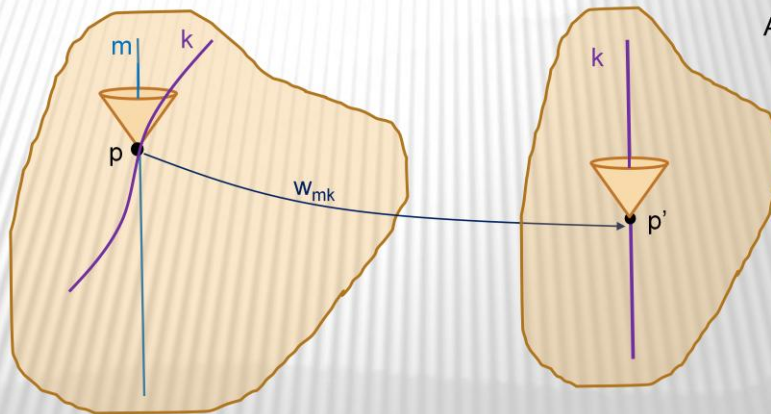
Nem fogjuk bizonyítani ezt a tételt, hanem csak motivációként használjuk a Lorentz sokaság definiálásához.

Lorentz trafoknak nevezik azokat a SpecRel világképtrafokat, amik az origót helybenhagyják. Innen a Lorentz sokaság névben a Lorentz szó.

EGY VILÁGKÉP

Lemma 1003. Tfh GenRel. Legyen $m, k \in \text{Ob}$, $k, m \in \text{ev}_m(p)$. Akkor $\text{Dif}(w_{mk})p$ SpecRel világkép transzformáció.

AxEv⁻
AxDif
AxPh⁻
AxSymt⁻



QED

Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 5.

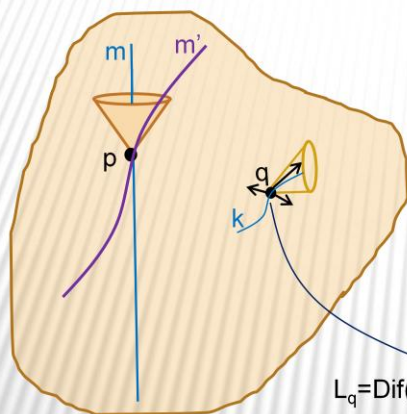
Page: 10

Nézzük, milyenek a GenRel modellek. Vegyünk egy tetszőleges m megfigyelő világképét.

Találkozzon k az m -el a p pontban. Nézzük k világképét.

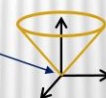
AxEv⁻ miatt a találkozás eseményét k látja, azaz w_{mk} definiálva van p -ben. AxDif szerint létezik a w_{mk} lineáris közelítése a p -ben, ez $f := \text{Dif}(w_{mk})p$. A világképtrafo definíciója szerint p -nek a w_{mk} szerinti p' képe k életútján van. Akkor AxPh⁻ szerint a p és p' -ből kiinduló fotonok sebességeinek hossza 1. Tehát f a p -ből kiinduló 1 meredekségű egyeneseket ráképezi a p' -ből kiinduló 1 meredekségű egyenesekre. Mivel minden 1 meredekségű egyenes párhuzamos egy p -n átmenő ilyennel és lineáris trafok párhuzamosságtartók, azért tehát f az 1 meredekségű egyeneseket ráképezi az 1 meredekségű egyenesekre. Akkor f SpecRel₀ világképtrafo az I rész Thm.11 (101old.) (ii)⇒(iv) szerint ahol $c=1$. Gyakorlat 2.11 szerint AxSymd ekvivalens AxSymt+c=1 -el ha feltesszük SpecRel₀-t. AxSymt⁻ szerint az f olyan SpecRel₀ világképtrafo, hogy AxSymt is teljesül, tehát AxSymd is teljesül Gyak.2.11 szerint, tehát f SpecRel világképtrafo. Emlékeztetünk rá, hogy SpecRel₀=SpecRel - AxSymd.

GENREL MODELLJEI LORENTZ



Q^4 nyílt részhalmaza
fénykúpokkal
feldekorálva

$$L_q = \text{Dif}(w_{mk})q$$



lokális
SpecRel

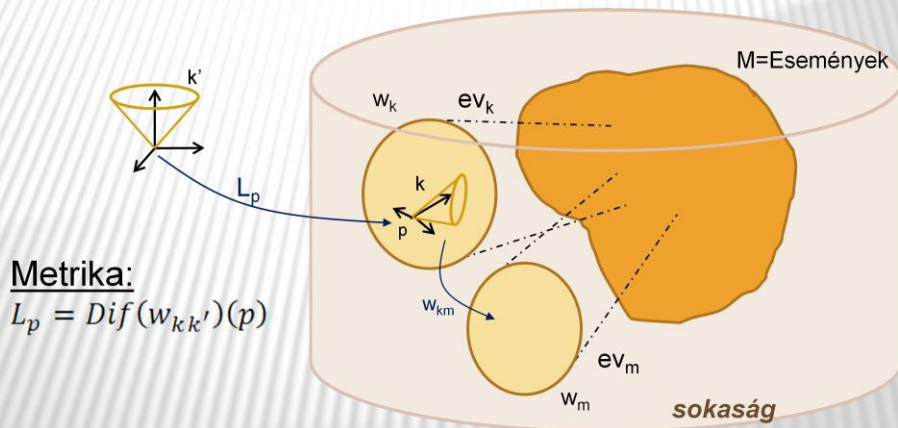
Lemma 1004. Legyen q, k, L_q mint az ábrán. Legyen h tetszőleges megfigyelő, aki részt vesz a q -beli eseményben úgy, hogy h karórája T -t mutat ebben az eseményben. Akkor a $v := w|_m^h(h)'(T)$ négyes-sebesség L_q -képének Minkowski-hossza 1 (azaz $\mu(0, L_q v) = 1$).

Tehát hogy a q -beli megfigyelők sajátideje hogyan telik tudjuk, ha tudjuk az L_q lineáris függvényt. Továbbá tudjuk, hogy mely irányok megfigyelők lehetséges útvonalai és mely irányok fotonok életútjai.

Vegyünk egy eseményt az m világképéből, q . Van k megfigyelő, aki ebben részt vesz (ld. II rész 11. old.). Definiáljuk: $L_q := \text{Dif}(w_{mk})q$. Tehát 1 világképhez hozzárendelhető a Q^4 nyílt részhalmazának feldekorálása helyi lokális SpecRel modellekkel, és ebből a számunkra érdekes adatok megkaphatók: minden megfigyelő életútja e helyi fénykúpon belül van, az idő rajtuk a helyi SpecRel szerint telik, és a fotonok életútjai is a helyi fénykúp szerint indulnak ki. Ez volt a Lorentz. Mi a sokaság?

GENREL MODELLJEI LORENTZ SOKASÁGOK

Megfigyelők együttesen
térképezik a világot



GenRel-ben nincs (nem feltétlenül van) megfigyelő, akinek világképe az összes eseményt tartalmazza. SpecRel-ben és AccRel-ben voltak ilyenek, az inerciálisok például. A megfigyelők team-ként dolgoznak együtt a világ feltérképezésében. Így lehetséges például, hogy azt találják, hogy a világ 4-dimenziós véges gömb. Large-scale structure of the space-time. Az Univerzum topológiája. Ez a sokaság.

SOKASÁG DEFINÍCIÓJA

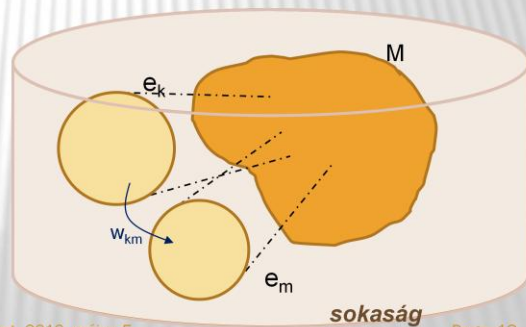
n -dimenziós differenciálható Q -sokaságnak egy $\langle M, e \rangle$ párt nevezünk, ahol

M tetszőleges halmaz,

$e = \langle e_k \rangle_{k \in K}$ Q^n -ből M -be menő parciális bijekciók rendszere úgy hogy

- (i) Az e_k -k értékkészletei lefedik M -et
- (ii) A w_{mk} áttérési függvények differenciálhatók.

T_2 ,
parakompakt



Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 5.

Page: 13

Ki szokták kötni legtöbbször, hogy a sokaság topológiája T_2 , azaz hogy minden két M -beli pont elválasztható őket körülvevő diszjunkt valamely térképbeli nyílt halmazok képeivel. Továbbá ki szokták kötni, hogy a sokaság parakompakt, ez lényegében azt jelenti, hogy az M topológiája (amit az e_k térképekből örököl Q^4 -ből) megszámlálható bázissal rendelkezik. Ez a két tulajdonság nem a fogalom lényegéhez tartozik, azért szokták kikötni, mert ezek a feltételek sokszor teljesülnek és ha feltesszük őket, akkor sok tulajdonságát lehet bizonyítani a Lorentz sokaságoknak. Emlékeztetünk rá, hogy abból, hogy w_{mk} differenciálható, következik, hogy az értelmezési tartománya nyílt. Az e_k -t értelmezési tartományai is nyíltak, mert azok a w_{kk} függvények értelmezési tartományaival megegyeznek.

ÁLTREL TÉRIDŐ DEFINÍCIÓJA

(Egyszerű) áltreidőnek egy $\langle D, L \rangle$ párt nevezünk, ahol

$D \subseteq Q^4$ nyílt részhalmaz,

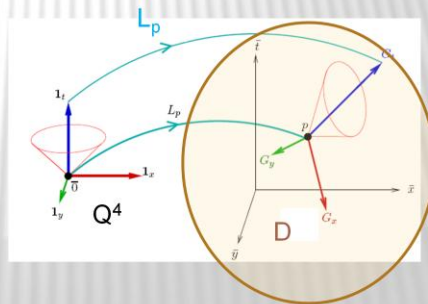
L minden $p \in D$ -hez megad egy

$L_p : Q^4 \rightarrow Q^4$ bijektiv affin leképezést, ami az origót a p -be viszi, és

L „sima”.

D : „fogas”,
„nagy globális koordinata-rács”,
„közös nevező”.

Lokális SpecRel megfigyelők világképe

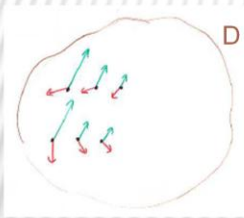


Idea: lokálisan SpecRel.

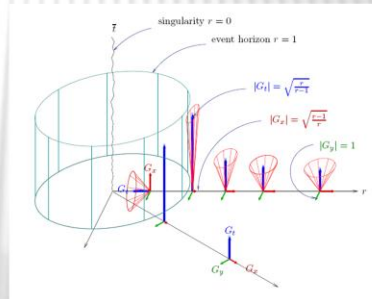
EKVIVALENS DEFINÍCIÓ

Az L_p lineáris transzformációt megadhatjuk azzal, hogy megadjuk a 4 egységvektor képét, azaz megadjuk az $1_t, 1_x, 1_y, 1_z$ egységvektorok képét. Akkor az L megadása ekvivalens azzal, hogy megadjunk 4 vektormezőt (az első vektormező minden p ponthoz hozzárendeli az 1_t L_p szerinti képét, stb) úgy hogy minden pontban az ott megadott 4 vektor lineárisan független.

Az L lokális SpecRel téridőket általában a G_t, G_x, G_y, G_z vektormezőkkel adjuk meg, mert ezeket jobban lehet rajzolni.



$$\langle G_t(p), G_x(p), G_y(p), G_z(p) \rangle_{p \in D}$$



A helyi lokális SpecRel (Minkowski) téridőket az egységvektorok képeinek berajzolásával lehet jól rajzolni. Ezt tesszük majd a GenRel példáink megadásával, pl a Schwarzschild téridő a példarajzon. Ezek mellé be szoktuk még rajzolni a fénykúp képét is. Elég lenne a négy egységvektor képe, vagy pedig a fénykúp képe és még az egyik egységvektor képe. Néha a fénykúp képét és az idő-egységvektor képét rajzoljuk csak.

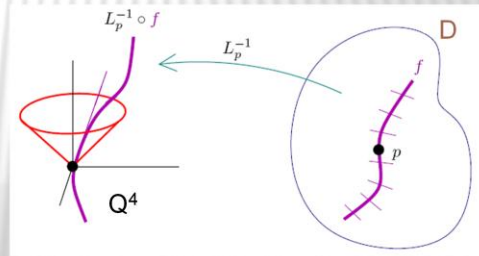
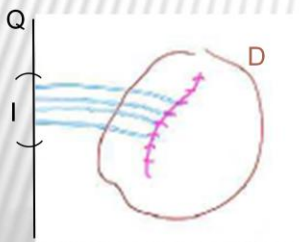
IDŐSZERŰ GÖRBE

Mire, hogyan használjuk? Minden pontban az ott levő lokális SpecRel téridő mondja meg, hogy merre indulnak ki fény életutak, milyen irányokban lehet mozogni megfigyelőnek és milyen ütemben telik az arra mozgó megfigyelő saját-ideje (karóra-ideje). Adott egy (D, L) áltrel téridő.

Definíció.

Görbéknek $f: I \rightarrow D$ differenciálható függvényt hívunk, ahol I a Q intervalluma.

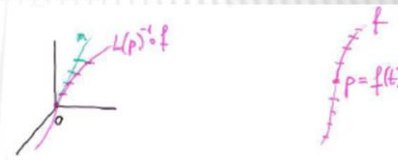
Időszerű görbe az f ha mindig a lokális fénykúpon belül halad, azaz ha minden $t \in I$ -re $L_p^{-1}(f'(t))$ időszerű vektor, azaz $\mu(0, L_p^{-1}(f'(t))) > 0$, ahol $p = f(t)$.



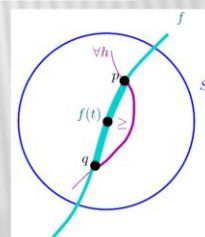
JÓL-PARAMÉTEREZETT, GEODETIKUS

f jól méri az időt, másszóval **jól-paraméterezett**, ha időszerű és minden pontban a lokális SpecRel megfigyelő világképében az érintő megfigyelő órája lokálisan úgy jár mint az f paraméterezése. Formálisan

$$\mu(0, L_p^{-1}(f'(t)))=1, \text{ ahol } p=f(t).$$



f **időszerű geodetikus** ha jól-paraméterezett és lokálisan maximalizálja az eltelt időt, azaz minden $t \in I$ -re $f(t)$ -nek van olyan S környezete, hogy ha h olyan jól-paraméterezett görbe aki S -en belül halad és $f(t_1)=h(T_1)$, $f(t_2)=h(T_2)$, akkor $|t_1-t_2| \geq |T_1-T_2|$.



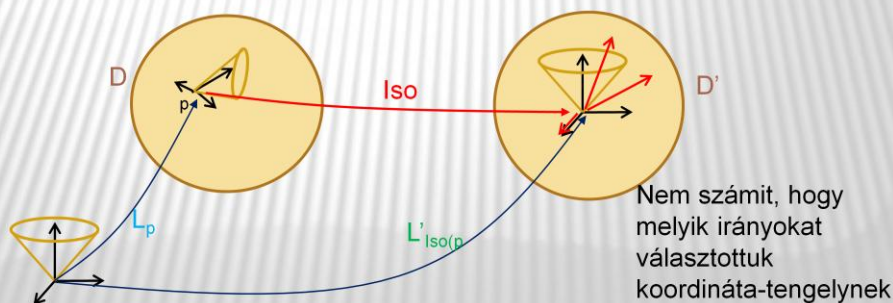
Azt, hogy egy görbe jól-paraméterezett-e, az egyes lokális SpecRel téridők egymástól függetlenül „döntik el”. Az, hogy egy görbe geodetikus-e, függ az egyes lokális SpecRel téridők egymáshoz való viszonyától is (mert a pont egész környezete határozza meg a tulajdonságot, nemcsak a p pontbeli SpecRel L_p beágyazás).

ÁLTREL TÉRIDŐ IZOMORFIZMUS

Definíció: Legyen $\langle D, L \rangle$ és $\langle D', L' \rangle$ két áltrel téridő. Az $\text{Iso}: D \rightarrow D'$ függvényt izomorfizmusnak hívjuk, ha Iso

diffhó, bijektív, inverze is diffhó és lokális SpecRel-t lokális SpecRel-be visz abban az értelemben, hogy minden $p \in D$ -re

$$L_p \mid \text{Dif}(\text{Iso})(p) = L'_{\text{Iso}(p)} \mid \text{„Lorentz trafo”}.$$



Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 5.

Page: 18

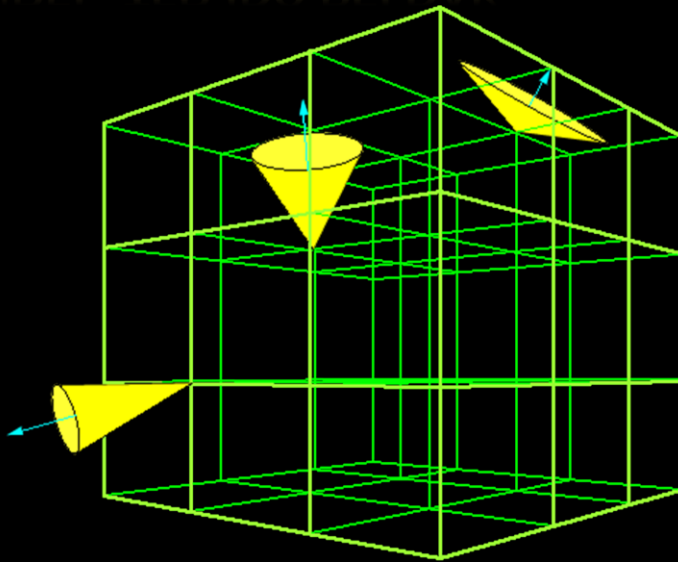
El akarunk eltekinteni attól, hogy pont melyik irányokat választottuk koordinátatengelyeknek.

A képletben függőleges vonal függvénykompozíciót jelent, a fordított sorrendben, tehát $(f \mid g)(x) = g(f(x))$. Azért szoktuk ezt a sorrendű kompozíciót használni, mert jobban követi a rajzolási sorrendet.

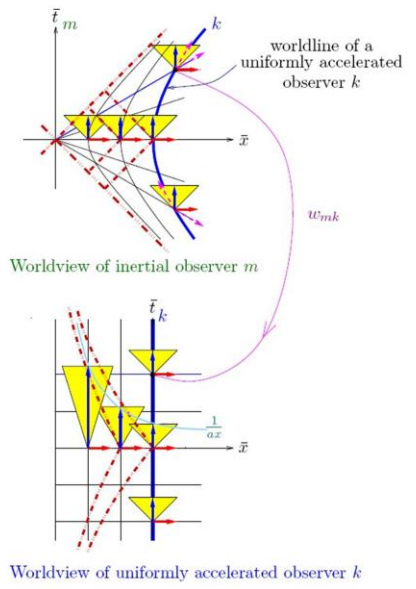
ÁLTREL IZOMORFIZMUS

- ⇒ Hivják átkoordinátázásnak is.
- ⇒ Izomorfizmusok megőrzik a minket érdeklő tulajdonságokat, pl. lokális fénykúp, lokális relativisztikus távolságok, időszerű görbe, jól-paraméterezett, geodetikus,.

GENREL TÉR-IDŐ PÉLDÁK



ÁLLANDÓ GYORSULÁSÚAK TÉR-IDEJE



Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 5.

Page: 21

Első példa a Minkowski téridő. Egy szelete ábrázolva van a felső rajzon. Második példa a gyorsuló világképe (2 dimenzióban), ld. a kép alsó részét. Kettő közti izomorfizmus is ábrázolva van. Egy GenRel modell világképei között ható világképtranszformációk általrel téridő izomorfizmusok (átkoordinátázások), általában parciálisok azaz izomorfizmusok az értelmezési tartományuk és az értékkészletük között.

FEKETE LYUKAK ELMÉLETE

Miért fontos a fekete lyukak elmélete?

Tipikus áltrel téridő

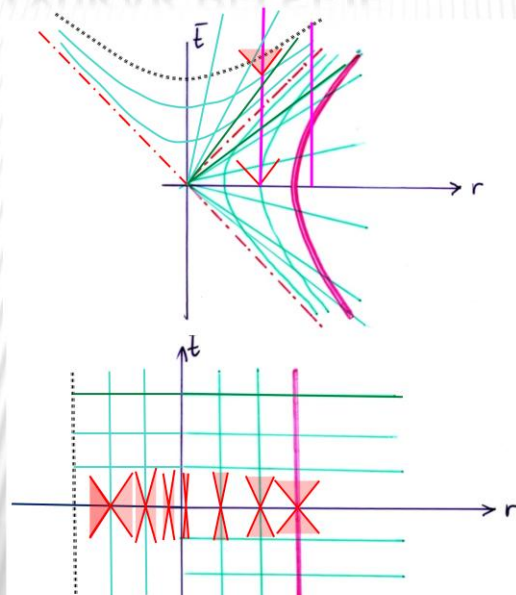
Sok más téridő épül erre

Relativisztikus gravitáció legegyszerűbb formája (egy pontban van az összes gravitáló tömeg)

Gravitációs tere idealizációja a Napénak.

Sokféle fekete lyuk van, most a legegyszerűbbet nézzük.

FEKETE LYUKAK BELSEJE



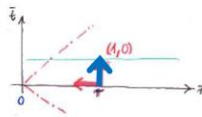
Kilométerkövek
egyre gyorsabban
suhannak el mellette

Fénysebesség után
fénysebességnél
gyorsabban

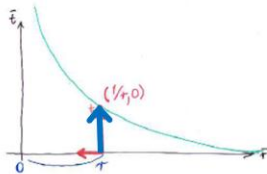
Egy helyen elvágjuk
mert henger szimmet-
rikussá akarjuk majd
tenni. Ott lesz a
szingularitás.

A fekete lyuk belsejének koordinátázása.

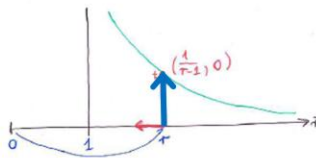
FEKETE LYUK GYORSULÓBÓL



Minkowski téridő
 $1 = G_t$



Gyorsuló
átkoordinátázása
 $1/r = G_t$



Fekete lyuknak
van belseje

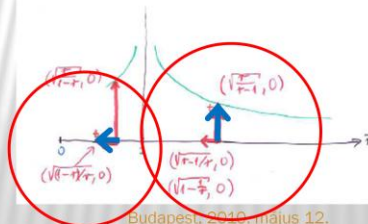
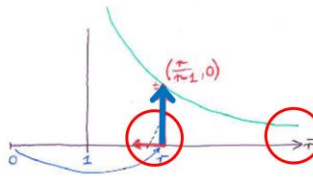
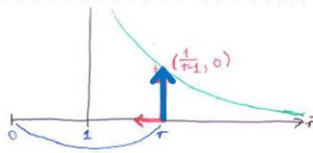
$1/(r-1) = G_t$

Hengerszimmetrikussá
tesszük: megforgatjuk a
tx síkot a t tengely körül.

Emlékeztetünk rá, hogy a lokális SpecRel téridőket az egységvektorok képeivel adjuk meg (ld. 15. old). Az első két téridő még 2-dimenziós, a harmadik már 4-dimenziós. Az origóból kiinduló sugárirányú egyeneseket ábrázoljuk és azokon csak a G_t , G_x vektorokat akkor is mikor a téridő már 4-dimenziós. A G_y, G_z vektorok irányai olyanok, hogy merőlegesek a G_t, G_x síkjára és egymásra is, hosszuk 1. Ez azt jelenti, hogy csak sugárirányban „történik valami”, csak sugárirányban van hatás.

A „henger-szimmetrikus” szót használjuk, mert ábrázoljuk az időtengelyt is. Ha csak a teret nézzük, akkor gömbszimmetrikus, és „időben állandó”, azaz az időtengely menti eltolás nem változtat semmit.

FEKETE LYUK GYORSULÓBÓL



Einstein Vákuum
Egyenlet

$$\sqrt{(r-M)}/r = G_x$$

$$\sqrt{r}/(r-M) = G_t$$

Előző oldalról
 $1/(r-1) = G_t$

Megforgatás miatt
aszimptotikusan
lapos

$$1 + (1/r-1) = r/(r-1) = G_t$$

Megforgatás miatt
árapályerő,
métrúd rövidülés:

$$\sqrt{(r-1)}/r = G_x$$

$$\sqrt{r}/(r-1) = G_t$$

Feketelyuk belseje
ugyanaz a formula

Mivel megforgattuk a 2-dimenziós téridőt, az „origóból kiinduló hatások” gömbfelületen oszlanak el, emiatt végtelen felé haladva „lecsengenek”. Ekvivalens módon tekinthetjük tapasztalati ténynek is, hogy a gravitációs hatások messziről nézve lecsengenek, nullához tartanak. „**Aszimptotikusan lapos**” azt jelenti, hogy az origótól egyre messzebb haladva a lokális SpecRel téridők egyre inkább megegyeznek a „koordináta-SpecRel téridővel”, esetünkben az L_p trafok lineáris részei egyre inkább közelítenek az identitás függvényhez ahogy p egyre messzebb van az origótól. Ez azt jelenti, hogy a G_t, G_x, G_y, G_z vektorok egyre inkább ugyanazok mint a koordináta-rendszerbeliek.

Az **árapály**-erőkről a következő oldalakon lesz szó, árapály azt jelenti, hogy a sugárirányban egyszerre elejtett testek távolodnak egymástól (mert gyorsulnak az origó felé), a sugárirányra merőlegesen szeparáltan elejtett testek pedig közelednek egymáshoz (mert egyformán esnek). Newtoni Mechanika szerint egy pont körül gömb-alakban szeparáltan elejtett pici porgömb térfogata nem változik (csak az alakja változik). Az **Einstein Vákuum Egyenlet** azt mondja, hogy ez ÁltRelben is így van, ahol a térfogatot úgy mérjük, hogy az elejtett porszemek mérik az egymástól való távolságukat radarral.

Úgy érzük el, hogy az elejtett almák távolodjanak egymástól, hogy az origó felé haladva rövidítjük a méterrudakat (ezáltal ugyanazt a koordináta-távolságot nagyobbak fogják mérni a lokális SpecRel-ek, ld. a következő oldalakat). Úgy rövidítünk, hogy a G_t, G_x aránya ne változzon és szorzatuk 1 legyen.

Végül, ugyanezt a formulát alkalmazzuk a fekete lyuk belsejében is, csak $r-1$ helyett $1-r$ -t írunk hogy a gyökjel alatt pozitív szám legyen és felcseréljük a G_t, G_x vektorokat.

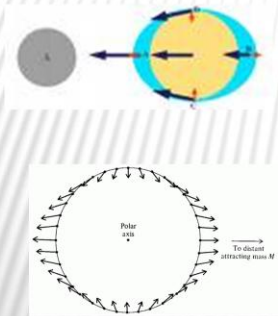
A példában 1-nek választottuk a fekete lyuk sugarát. Választhatjuk tetszőleges M nemnulla számnak, ezt hívják a fekete lyuk **tömegének**. Ha $M=0$, akkor visszajövünk a Minkowski téridőhöz.

A végeredményül kapott téridőt Schwarzschild téridőnek vagy fekete lyuknak hívják, térbeli ábrázolása megtalálható a 30. oldalon.

MÉTERRÚD RÖVIDÜLÉS, ÁRAPÁLYERŐ

Newtoni gravitáció elméletben: gömbszimmetria, gravitációs gyorsulás $1/r^2$, beeső porgömb megnyúlik. Árapályerők. Einstein vákum egyenlete.

Gömbszimmetrikussá tett gyorsuló világvégében még nincs.

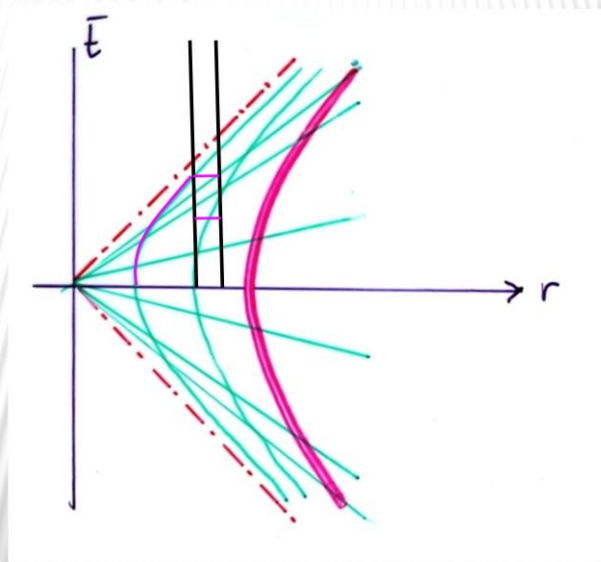


Ld az előző oldalt is.

Mivel a téridő gömbszimmetrikus és csak sugárirányban van hatás, a sugárirányra merőlegesen szeparáltan elejtett porszemek mindenképpen közelítenek egymáshoz.

ÁRAPÁLYERŐ KELL

a létra felső
fokai a
gyorsuló
világképben
origóhoz
közelebb
vannak



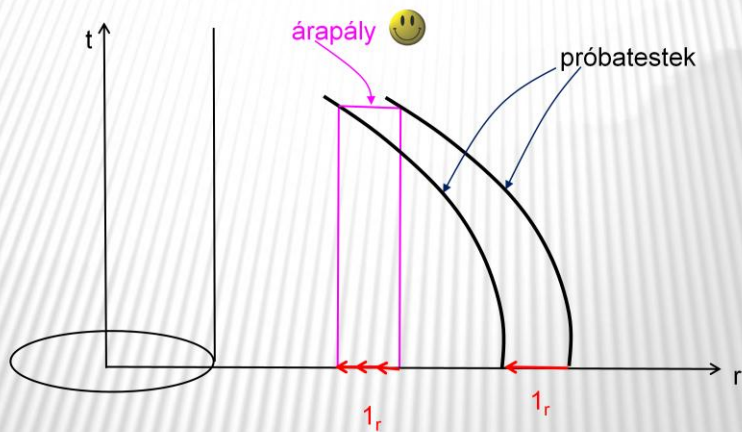
Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 12.

Page: 27

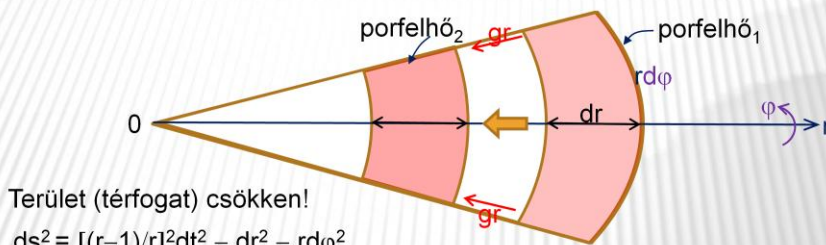
Gyorsuló világkép vissza-koordinátázása SpecRel-re, ld. 21. old. Itt láthatjuk, hogy a beeső porszemek életútjai a függőleges egyenesek, ezek egymástól állandó távolságot mérnek radarral, tehát nem távolodnak egymástól. Amikor aszimptotikusan lapossá tettük a téridőt azáltal, hogy $1-t$ adtunk hozzá a G_t -k hosszához (ld. 25. old), akkor az esemény-horizont közelében alig változtattunk, mert itt a G_t hossza végtelenhez tartott. Tehát igaz ugyan, hogy a G_t megváltoztatása kissé távolítja az új téridőhöz tartozó geodetiusokat, nem eléggé: a porszemek távolodása az eseményhorizont közelében kifejezettebb kéne legyen mint távolabb, viszont pont itt alig változtattunk a téridőn.

MÉTERRÚD RÖVIDÜLÉS



Az előző kép átkoordinátázva. Látszik, hogy a beljebb levő 1_r egységvektor (1_r ugyanaz mint eddig az 1_x egységvektor) alkalmas rövidítésével elérhető, hogy a porszemek távolodni lássák egymást.

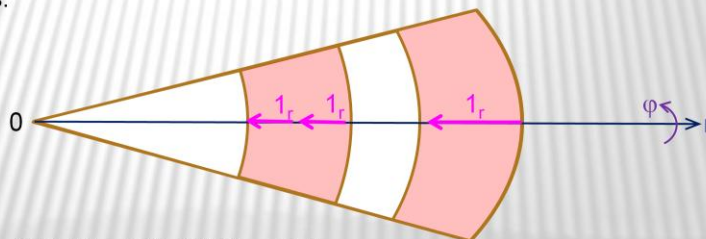
EINSTEIN VÁKUM EGYENLET SÉRÜLÉSE



Terület (térfogat) csökken!

$$ds^2 = [(r-1)/r]^2 dt^2 - dr^2 - rd\varphi^2$$

Kijavítás:



$$ds^2 = [(r-1)/r] dt^2 - [r/(r-1)] dr^2 - rd\varphi^2$$

Már a newtoni gravitációelméletből következik, hogy a sugárirányban elejtett porszemek távolodnak egymástól és az elejtett porgömb térfogata nem változik csak az alakja. Áltrel téridőben az elejtett porszemek életútját a helyi SpecRel egységvektorok határozzák meg, nevezetesen az elejtett porszemek életútjai geodetikusok (ld. 17. old). Úgy akarjuk definiálni a lokális SpecRel egységvektorokat, hogy a geodetikusok távolodjanak egymástól stb. Henger-szimmetria és csak sugár-irányú hatás miatt a sugárirányra merőlegesen szeparáltan elejtett porszemek közeledni fognak egymáshoz. Einstein Vákuum Egyenletének teljesüléséhez tehát el kell érni, hogy a sugárirányban szeparáltan eső porszemek távolodjanak egymástól.

SCHWARZSCHILD FEKETE LYUK

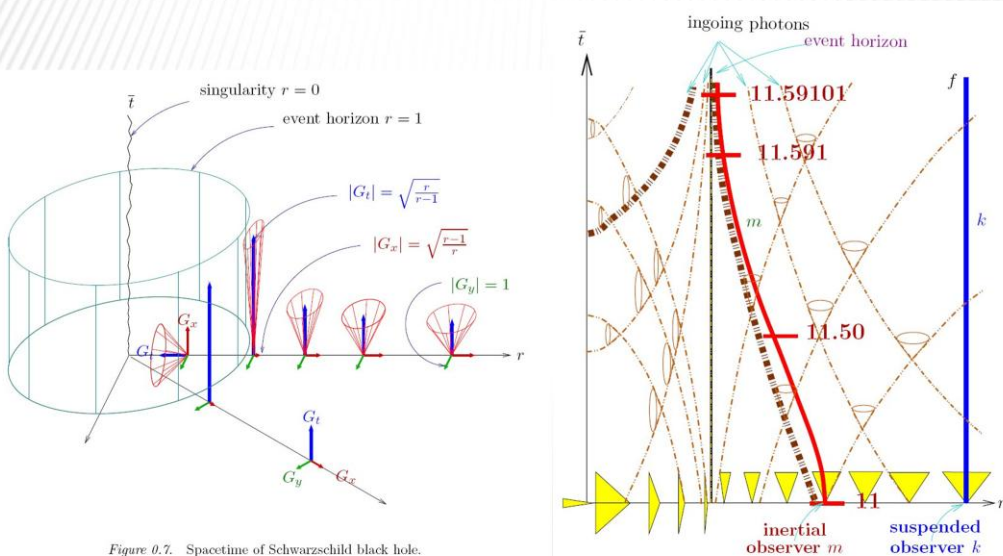
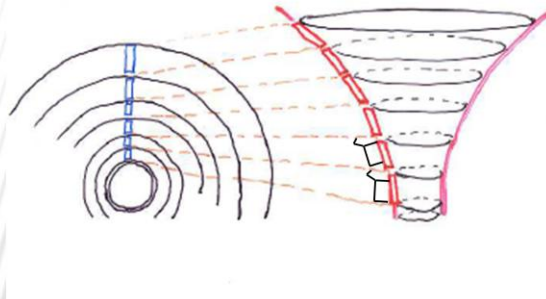


Figure 0.7. Spacetime of Schwarzschild black hole.

Ez lett tehát a végeredmény: Négy vektormező, megmondják hogy a lokális SpecRel-ek (Minkowski geometriák) hogyan vannak begyűrve a nagy globális koordinátarendszerbe. A fontos az, hogy egymást hogyan látják eldeformálódni.

BEÁGYAZÓ DIAGRAM



A vizsgálandó metrikus tér

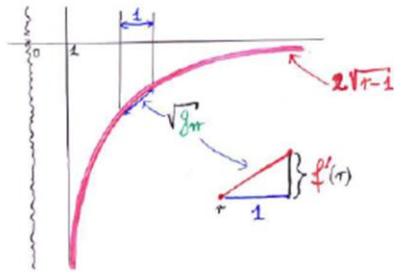
Segédeszköz: $n+1$
dimenziós
Euklidészi térbe
való beágyazás

A hangya (lokális megfigyelő) így látja

A méterrúd rövidülést így lehet ábrázolni (szemléltetni) plusz dimenzió felvételével. A kétdimenziós síkot, amin a metrika absztrakt, beágyazzuk egy háromdimenziós térbe úgy, hogy az absztrakt metrika átmenjen a háromdimenziós tér euklidészi metrikájába.

SCHWARZSCHILD KÖRÜLJÁRÁSA

Beágyazó diagram



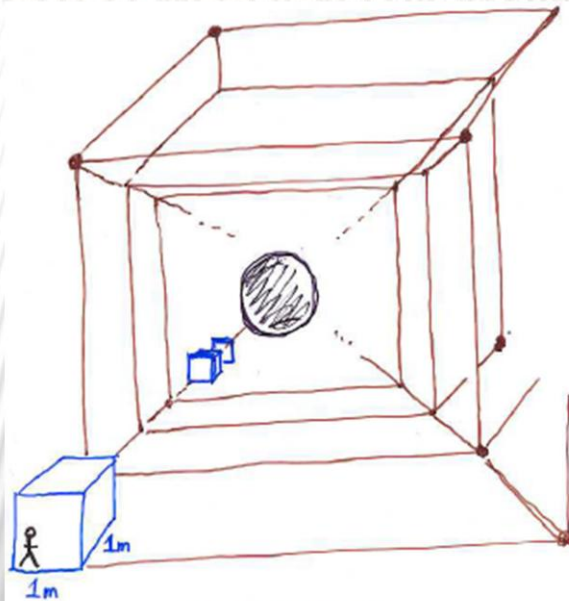
$$f'(r) = \left(\frac{r}{r-1} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{r - (r-1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$g_{rr}$$

$$f(r) = 2(r-1)^{\frac{1}{2}} \quad (+ konst.)$$

Az ábrán gyök(g_{rr}) az, amennyinek a lokális SpecRel méri az 1 koordináta-távolságot, azaz most G_x hosszának reciproka. Tehát g_{rr} itt $r/(r-1)$. Ennek alapján egyszerűen ki lehet számítani a beágyazó görbét.

FELFÜGGESZTETT MEGFIGYELŐK ÁLLVÁNYZATA



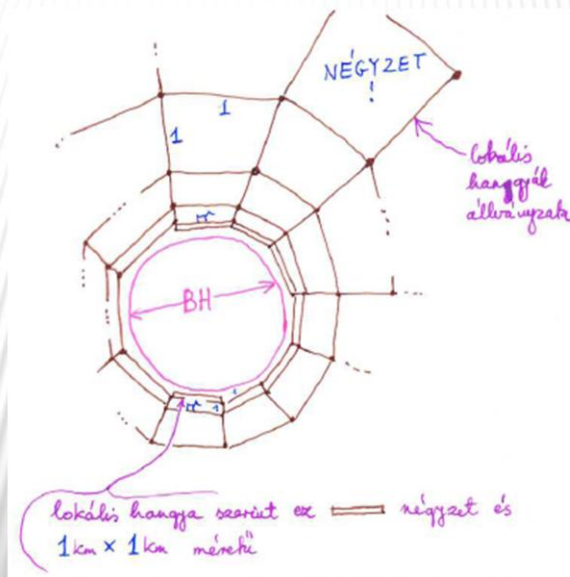
Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 12.

Page: 33

A BH köré építve. „Merev” rudak tartják fenn a csomópontokat. Ez kiváltható radarozással merev rúd nélkül is. Állványzat. Űrhajó-flotta fényjelekkel és elejtett űrcsónakokkal tájékozódva és egymással kommunikálva tartják fenn a helyzetüket, mint a gyorsuló megfigyelőnél.

ÁLLVÁNYZAT



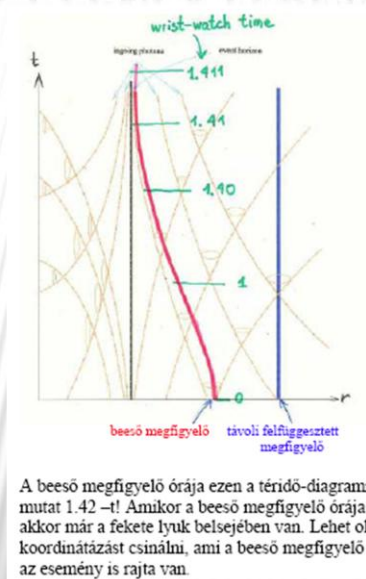
TÁVOLSÁG ESEMÉNYHORIZONTIG VÉGES

Fekete lyuk felé lefogott kötel hossza:

$$\int_1^r \sqrt{\frac{r}{r-1}} dr = \sqrt{r(r-1)} + \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r-1})$$

Távolság fekete lyuk eseményhorizont-
jáig véges

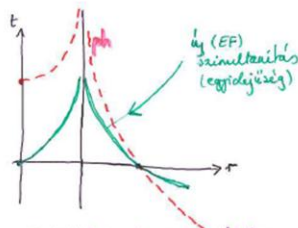
BELE IS LEHET ESNI A FEKETE LYUKBA!



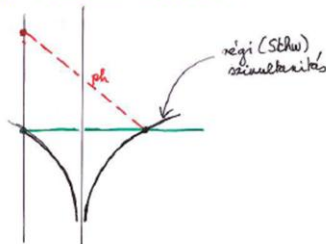
A képen az 1.42 szám szimbolikus, lényeg az, hogy véges.

EDDINGTON-FINKELSTEIN KOORDINÁTÁK

Schwarzschild koordinátákban:



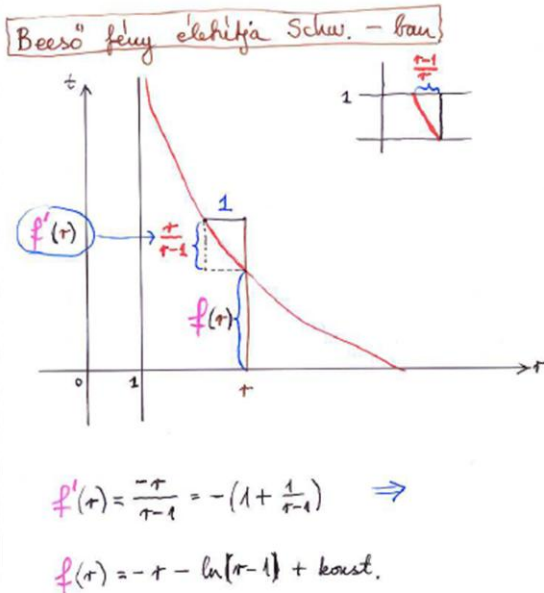
Eddington-Finkelstein koordinátákban:



A beeső megfigyelő szemével akarjuk látni a fekete lyukat. Ahelyett, hogy az ő életútját koordinátáznánk rá a t tengelyre, úgy koordinátázzunk át, hogy a beeső fotonok életútjai legyenek 45 fokos egyenesek. Úgy koordinátázzunk át, hogy a t -vel párhuzamos egyeneseket alkalmasan „lehúzzuk”, azaz az átkoordinátázás egy csak r -től függő függvény hozzáadása lesz a téridőpontokhoz. Mivel a foton végtelen magasra felmegy az eseményhorizont közelében, a fekete szimultánitási vonal lehúzás utáni képe végtelen mélyre lemegy. A felső képen levő foton életútjának kiszámítása megtalálható a következő oldalon.

Izomorfizmus. Minden áltrel átkoordinátázás téridő-izomorfizmus lesz. Hiszen ezért vezettük be az izomorfizmus fogalmát..

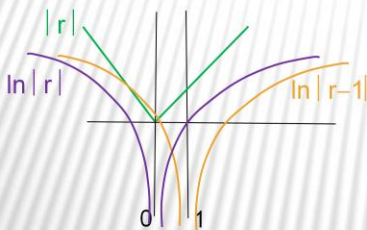
BEESŐ FÉNY ÉLETÚTJA



A sugárirányban beeső fény marad mindig sugárirányú és sebessége (érintőjének iránya) az r helyen az r helyen levő fénykúp alkotója. Innen kiszámítható az életút.

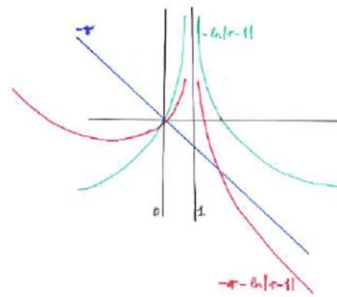
FÉNY ÉLETÚTJA SCHWARZSCHILD FL-BAN

$$-r - \ln|r-1|$$



A BEESŐ FÉNY ÉLETÚTJÁNAK KÉPLETÉBEN SZEREPLŐ FÜGGVÉNYEK ÁBRÁZOLÁSA

Piros a beeső fény életútja ($-r - \ln|r-1|$, $\text{line}(\text{ph})$). A mesterséges szimultánitást úgy választjuk, hogy ez egyenes legyen, azaz hogy $\text{line}(\text{ph}) = -r$ legyen. Ehhez az új (mesterséges) szimultánitást $-\ln|r-1|$. Részletesebben a következő oldalon.



Az előző oldalon kapott függvény ábrázolása lépésekben. Először az $|r|$ függvényt ábrázoljuk (baloldali zöld függvény), aztán az $\ln|r|$ függvényt ábrázoljuk (baloldali lila függvény), stb.

EDDINGTON-FINKELSTEIN FEKETELYUK

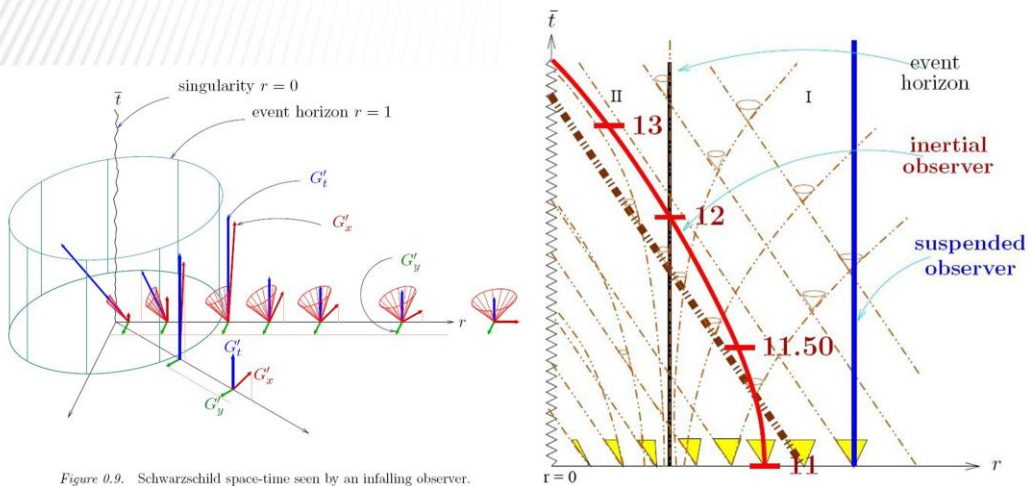
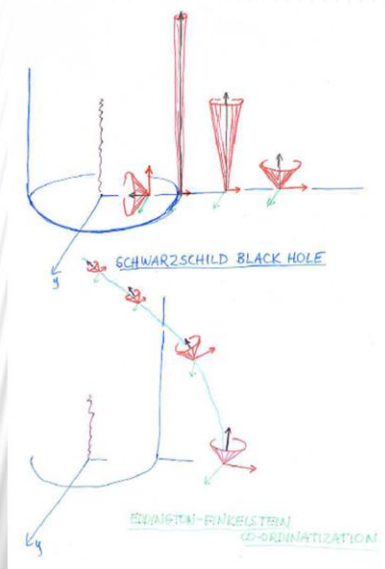


Figure 0.9. Schwarzschild space-time seen by an infalling observer.

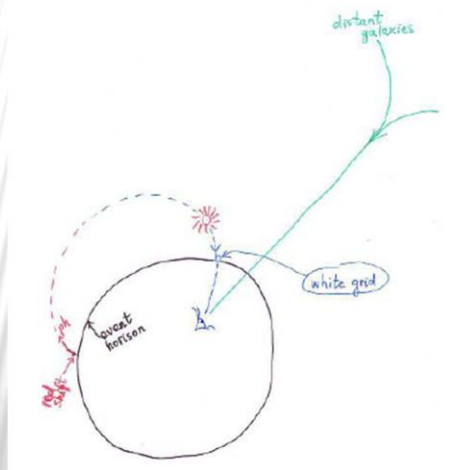
Az átkoordinátázás eredménye. Bedőlnek a fénykúpok. A piros G_x vektorok irányai a 37. oldalon az alsó képen levő fekete vonal érintői irányába mutatnak az eseményhorizonton kívül. Az eseményhorizonton belül pedig a kék G_t vektorok irányai mutatnak ebbe az irányba. A függőleges kék G_t (illetve belül a függőleges piros G_x) vektorok nem változtak.

LEGEGYSZERŰBB FEKETE LYUK



MIT LÁT BEESETT MEGFIGYELŐ

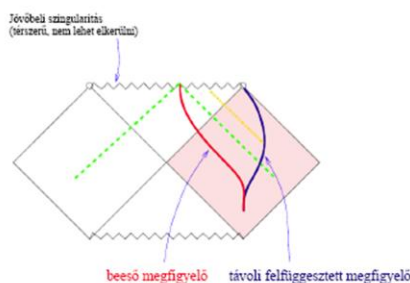
MIT LÁT EGY BEESETT MEGFIGYELŐ
MIKOR MÁR BELÜL VAN A FEKETE
LYUKON?



PENROSE DIAGRAM

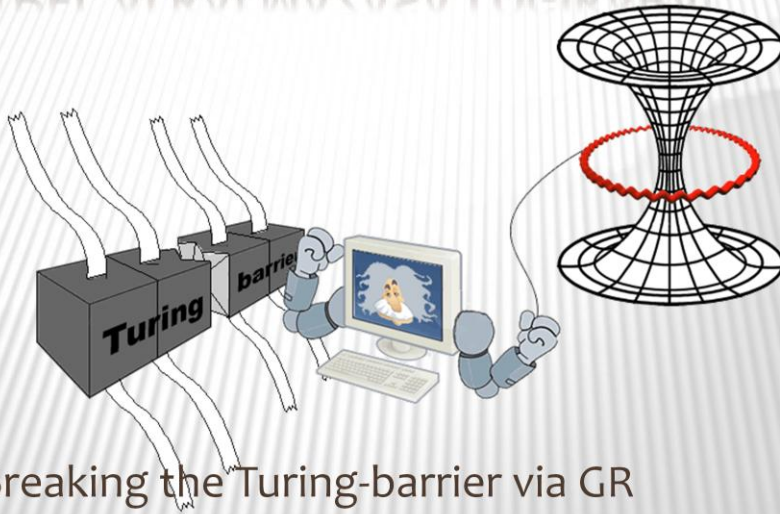
**A SCHWARZSCHILD FEKETE LYUK
LEGJOBBAN KITERJESZTETT VÁLTOZATÁNAK
„OKOZATISÁG-TÉRKÉPE” (PENROSE
DIAGRAMJA).**

A fekete lyukba beesett megfigyelő észleli a képen baloldalt levő „párhuzamos univerzumból” jövő jeleket is. Az alsó háromszög alakú rész egy „fehér lyuk” (amiből csak kijönni lehet, belemenni nem lehet), a felső háromszög alakú rész a fekete lyuk belseje (amiből nem lehet kijönni).



Penrose diagram: keresünk egy jellegzetes kétdimenziós tx -szeletet. Aztán úgy ábrázolunk, hogy a fotonok életútjai 45 fokosak legyenek, és a végtelen $Q \times Q$ sík egy véges részbe menjen át. Eközben a metrikát nem tartjuk meg, de az időszerű, fényszerű és térszerű szeparáltságot igen! Azaz a kauzalitási relációt megőrizzük.

ÁLTREL ALKALMAZÁSA LOGIKÁRA!



Breaking the Turing-barrier via GR

Relativistic Hyper Computing

Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 12.

Page: 44

Ez az irány jól illeszkedik ahhoz a jelenleg igen aktív irányzathoz, ami a kiszámíthatóság fogalmának kiszélesítését célozza meg.

GRAVITÁCIÓ LEASSITJA AZ IDŐT

Einstein's Ekivalencia Elve szerint

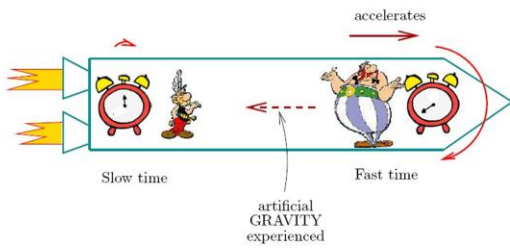


Figure 1: A THEOREM of Special Relativity (SR) (easily proved in first-order logic version of SR).

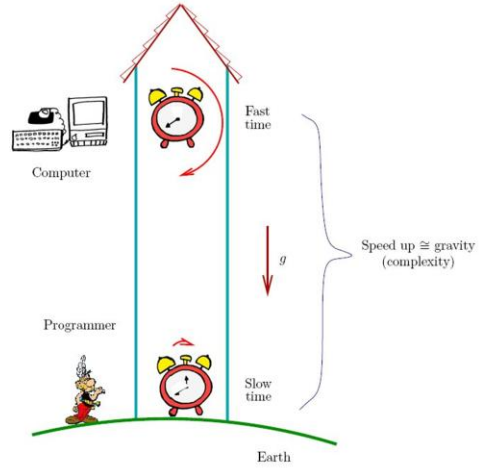


Figure 2: TIME WARP (Tower Paradox, effects of gravity on time). Clocks higher in a gravitational well tick faster.

GRAVITÁCIÓ LEASSITJA AZ IDŐT

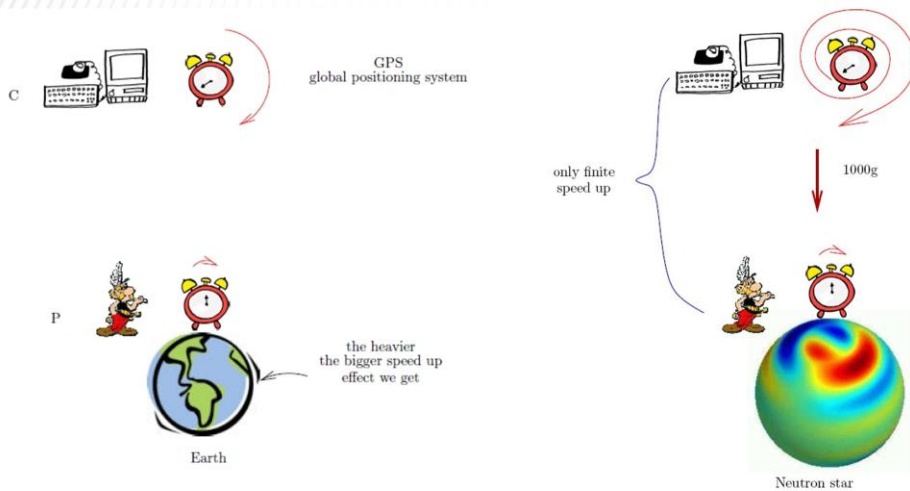


Figure 3: Thought experiment for fast computation: The programmer "throws" his slave-computer to a high orbit. Communicates via radio.

Figure 4: The speed-up effect can be increased by using a neutron star in place of the Earth, but it still remains finite.

GRAVITÁCIÓ LEASSITJA AZ IDŐT

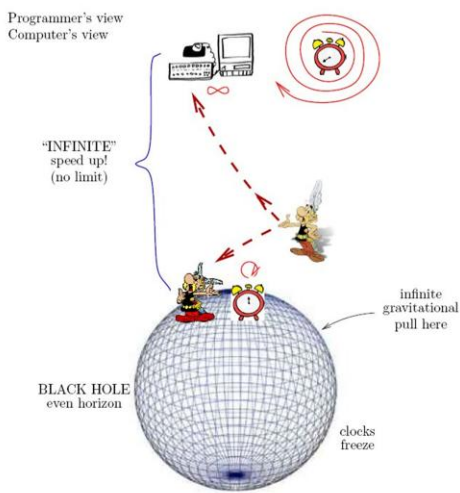


Figure 5: The speed-up effect can be made "infinite" by using a black hole.

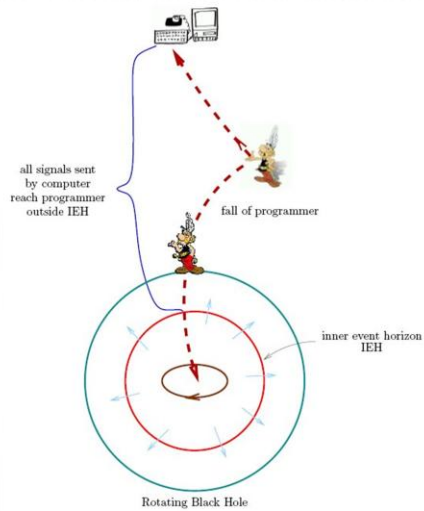


Figure 6: Rotating Black Hole has two event horizons. Programmer can survive forever. (Ring singularity can be avoided.)

Forgó fekete lyuk segítségével el lehet dönteni, hogy a halmazelmélet konzisztens-e. Konkrét fizikai kísérlettel, nem gondolat-kísérlettel.

DUPLA ESEMÉNYHORIZONTÚ FEKETE LYUKAK

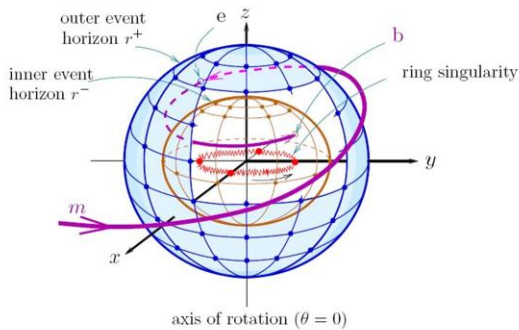


Figure 0.11. Slowly rotating (Kerr) black hole.

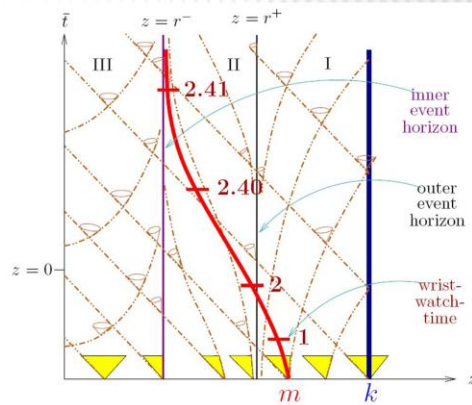


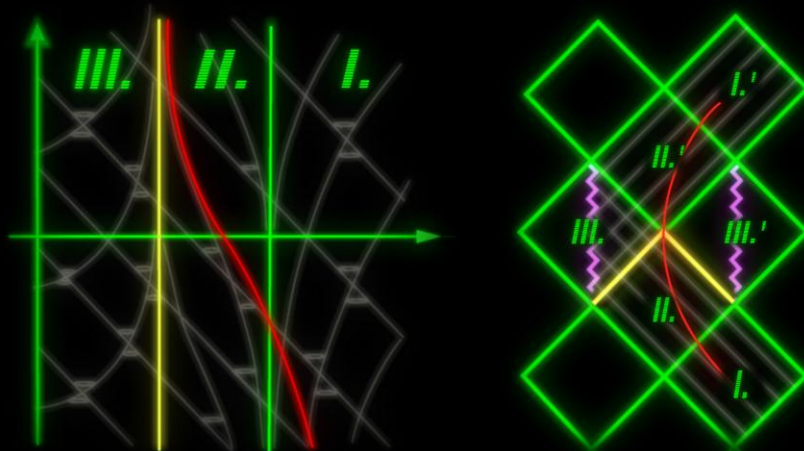
Figure 0.12. The "tz-slice" of space-time of slowly rotating black hole.

A hiperkomputer működéséhez nem elég a legegyszerűbb Schwarzschild fekete lyuk. Olyan fekete lyuk kell, aminek két eseményhorizontja van, mint például a forgó (Kerr féle) vagy pedig az elektromosan töltött (Reissner-Nordström féle) fekete lyuk. Ezekben a gravitáció befelé húzó erején kívül van egy kifelé lökő erő is, ami az origóhoz közeledve „legyőzi” a gravitációs erőt (itt van a második eseményhorizont).

ELEKTROMOSAN TÖLTÖTT FEKETE LYUK

$$ds^2 = \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{e}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{1}{r} + \frac{e}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\varphi^2$$

PENROSE DIAGRAM



Relativity Theory and Logic

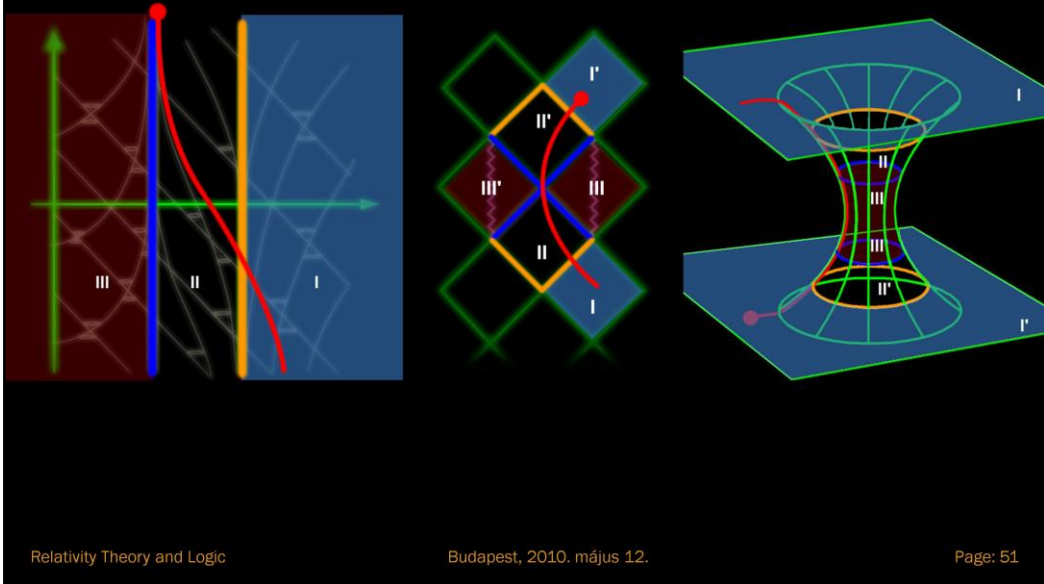
Budapest, 2010. május 12.

Page: 50

On the right side, there is the picture of the rotating Black Hole's Penrose diagram. As a diagram, it has to have some rule, in order to get some information out of it. And the rule is that the possible lifelines of photons are 45 degree.

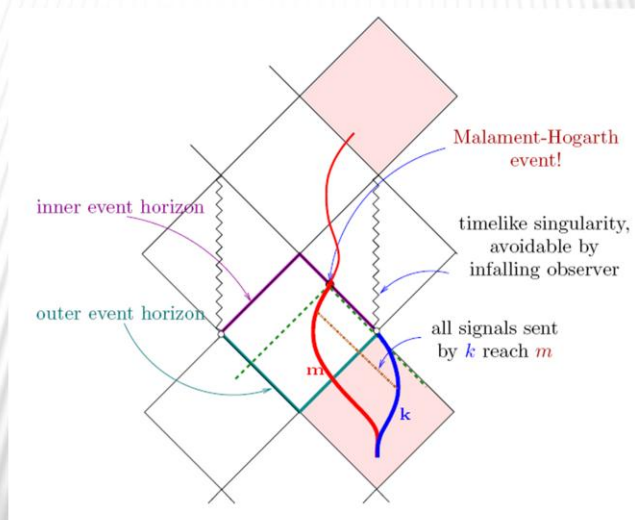
In the Penrose diagram you can see not only the regions of the Black Hole (II., III.), but also their counterpart's, the regions of the White Hole (III', II') and a universe (I') where the White Hole opens to. In this diagram finally we will be able to draw in the whole lifeline of the programmer.

FÉREGLYUK

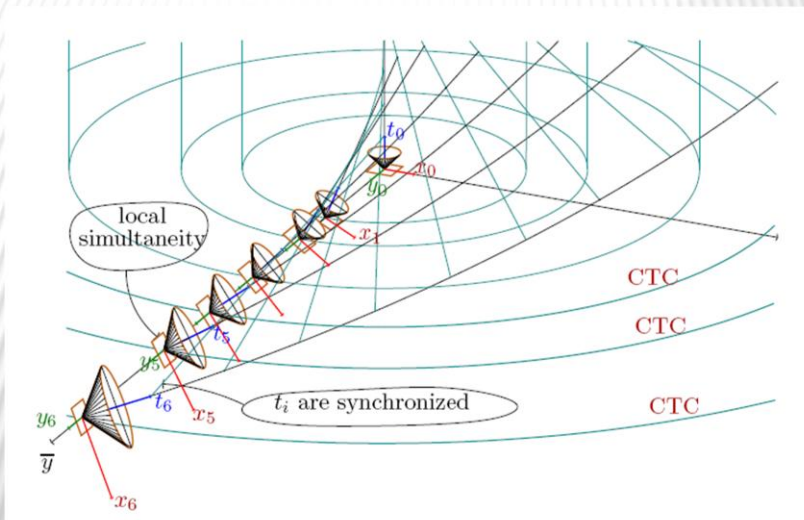


On this picture you can visualize how the Eddington-Finkelstein diagram, the Penrose diagram and the popularizer book's wormhole picture relate to each other.

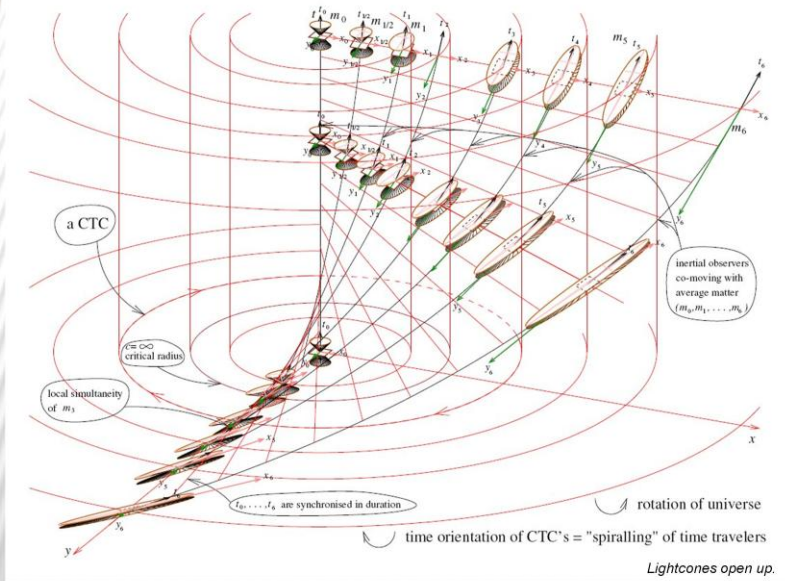
PENROSE DIAGRAM



GÖDEL TÉRIDŐ KIINDULÁS



GÖDEL TÉRIDŐ



More in our papers in **General Relativity and Gravitation 2008** & in **arXiv.org 2008**

Relativity Theory and Logic

Budapest, 2010. május 12.

Page: 54

Timetravel is possible in the direction opposite to that of rotation of matter.

IDŐUTAZÁS GÖDEL TÉRIDŐBEN

